

CHAPITRE 6

EXPÉRIENCES (ORBITES ET ENSEMBLES DE TYPE JULIA)

Ces expériences concernent des transformations quadratiques spéciales, en fait de deux types. La situation la plus simple à décrire est la suivante. On se donne une transformation quadratique f à « coefficients réels », par exemple $f = A\sigma$ avec A dans $GL_3(\mathbb{R})$. Évidemment f induit une transformation birationnelle du plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que nous notons toujours f . Une carte affine $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et un entier N étant donnés on procède comme suit ; si m désigne un point de \mathbb{R}^2 (que l'on espère ne pas appartenir à $\text{Ind}^\pm f, \text{Exc}^\pm f$) on dessine

$$\mathcal{O}(f, m; N) = \{m, f(m), \dots, f^N(m)\}.$$

Pour N positif assez grand on peut penser avoir une représentation raisonnable de l'orbite positive de m suivant f ; c'est le cas lorsque les $\mathcal{O}(f, m; N)$ se « stabilisent » quand N croît. De façon pratique les $N/3$ premiers itérés sont de couleur rouge, les $N/3$ suivants de couleur bleue et les $N/3$ derniers de couleur verte. Nous verrons plus loin que certaines « orbites » apparaissent monocolors ; ceci est dû au phénomène suivant : un point coloré rouge, *i.e.* un point des $N/3$ premières itérations, ne sera pas ensuite recoloré au cours des itérations suivantes. C'est une manifestation de la stabilité mentionnée ci-dessus.

Nous aurons à itérer des orbites de transformations non réelles ; la procédure sera alors expliquée à ce moment.

Revenons aux transformations réelles du plan pour lesquelles nous allons utiliser une démarche maintenant classique en dynamique complexe. Soit $P \in \mathbb{C}(t)$ une application holomorphe de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans lui-même de degré au moins deux. L'**ensemble de FATOU** de P , noté $\text{Fatou}(P)$, est l'ensemble des points m de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en lesquels la famille des itérés $\{P, P^2, \dots\}$ est normale, *i.e.* équicontinue. Son complément $\text{Julia}(P) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \text{Fatou}(P)$ est l'**ensemble de JULIA**. C'est un fermé, jamais vide, qui peut être tout l'espace ; c'est le cas pour les applications de type LATTÈS ([13]), mais qui peut aussi être d'intérieur vide, par exemple lorsque P est un polynôme. Dans tous les cas $\text{Julia}(P)$ est l'adhérence (ordinaire) de l'ensemble des points périodiques « **répulsifs** » ; ce sont les points m pour lesquels il existe n_0 (minimal > 0) tels que

$$P^{n_0}(m) = m \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial P^{n_0}(m)}{\partial t} \right| > 1.$$

Lorsque P possède un point périodique cette fois **contractant**, *i.e.* lorsqu'il existe un point m tel que

$$P^{n_0}(m) = m \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial P^{n_0}(m)}{\partial t} \right| < 1$$

le **bassin d'attraction** $W^s(m)$ de m est par définition

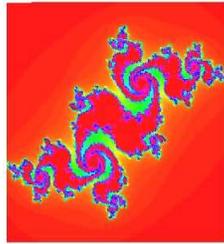
$$W^s(m) = \bigcup_{0 \leq \ell \leq n_0 - 1} \{q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_0 k + \ell}(q) = m\}.$$

Dans ce contexte le bord de $W^s(m)$ est encore l'ensemble de JULIA ([13]). C'est la même chose pour le bord de l'orbite d'un « **domaine de SIEGEL** » : c'est un domaine maximal, conformément équivalent à un disque dans lequel un itéré de P (éventuellement P lui-même) est conjugué à une rotation d'angle irrationnel devant 2π (voir [13]).

Sur http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/Julia/Julia.html on a trouvé le programme suivant :

```
couleur :=proc(a,b)
local y,t,yi,ti,n;
global α, β;
y :=a; t :=b;
for n from 0 to 100 while evalf(y2+t2)<4 do;
yi :=evalf(y2-t2+α); ti :=evalf(2yt+β);
y :=yi; t :=ti;
od;
n;
end :
α := -0.181; β := -0.667;
plot3d(0, (-13/10)..(13/10), (-13/10)..(13/10), orientation=[-90,0],
style=patchngrid, scaling=constrained, axes=none, numpoints=100000,
color=couleur);
```

Pour la transformation $z \mapsto z^2 - 0.181 - 0.667i$, on obtient la figure :



Le bord de la composante intérieure rouge représente l'ensemble de JULIA du polynôme

$$z^2 + \alpha + i\beta, \quad (\alpha, \beta) = (-0.181, -0.667).$$

Nous proposons une « adaptation » de ce programme à certaines transformations birationnelles réelles de degré inférieur ou égal à deux. Plus précisément on note $\mathbb{D}(r) \subset \mathbb{R}^2$ le disque

de rayon r centré en 0 et $\Delta(\rho)$ le polydisque de rayon ρ :

$$\Delta(\rho) = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \rho, |t| < \rho\}.$$

Soit f une transformation birationnelle à coefficients réels, *i.e.* f appartient à $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$. Soient $m = (x_0, x_1)$ un point de $\Delta(\rho) \setminus \text{Ind } f$ et M un entier strictement positif. On appelle temps de passage $N(m; r, \rho, M)$, relatif aux données de contrôle $r, \rho \leq \frac{r}{\sqrt{2}}, M$, du point m de l'intersection $\Delta(\rho) \cap \mathbb{D}(r)$ le plus grand entier n dans $[0, \dots, M]$ tel que

$$f^k(m) \in \mathbb{D}(r) \setminus \text{Ind } f, \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

On considère le spectre (continu) des couleurs

$$[\text{rouge} \dots \text{orange} \dots \text{jaune} \dots \text{vert} \dots \text{bleu} \dots \text{indigo} \dots \text{rouge}]$$

que l'on discrétise en $M + 1$ intervalles

$$[I_0, \dots, I_M] = [\text{rouge} \dots \text{jaune} \dots \text{bleu} \dots \text{rouge}].$$

Soit (r, ρ, M) un triplet de contrôle. Si $N(m; r, \rho, M) = k$, on colore le point m de la couleur $\text{Col}(m) = I_k$. Comme $I_0 = I_M = \text{rouge}$, les points colorés en rouge sont ceux pour lesquels le temps de passage est 0 (sortie immédiate) ou M (pas de sortie au bout de M itérations) ; sur les figures le bord de l'ensemble $\text{Col}^{-1}(I_0)$ est approché par la couleur $I_1 \sim \text{orangé}$.

Dans le cas d'un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, l'ensemble de JULIA est, comme on le sait, approximé par le bord de $\text{Col}^{-1}(I_M)$ pour des valeurs des données de contrôle ad-hoc.

Par analogie avec les ensembles de JULIA nous appellerons les figures obtenues par ce procédé *J-ensembles* ; nous les noterons $\mathcal{J}(f; r, \rho, M)$.

6.1. Orbites des transformations $f_{\alpha,\beta}$ et F_b

Nous commençons par des applications birationnelles qui ne proviennent pas du plan réel mais préservent une famille de quadriques réelles. L'étude des transformations $f_{\alpha,\beta}$ de Σ^3 exprimées dans la carte $x_2 = 1$

$$f_{\alpha,\beta} = \left(\frac{\alpha x_0 + x_1}{x_0 + 1}, \beta x_1 \right), \quad \beta \neq 0,$$

a été initiée dans [32]. Pour les dynamiciens ces transformations présentent peu d'intérêt essentiellement parce qu'elles préservent une fibration rationnelle, ici le pinceau de droites $x_1 = \text{cte}$. Nous avons en fait déjà rencontré ces applications dans le Chapitre 4, §4.6 car elles présentent la particularité suivante : elles sont de carré quadratique. Plus précisément :

$$\deg f_{\alpha,\beta}^2 = 2, \deg f_{\alpha,\beta}^3 = 3, \deg f_{\alpha,\beta}^4 = 3, \deg f_{\alpha,\beta}^5 = 4, \deg f_{\alpha,\beta}^6 = 4, \deg f_{\alpha,\beta}^7 = 5, \dots$$

Les ensembles exceptionnels et d'indétermination des $f_{\alpha,\beta}$ et $f_{\alpha,\beta}^{-1}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Ind } f_{\alpha,\beta} &= \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (1 : -\alpha : -1)\}, \\ \text{Exc } f_{\alpha,\beta} &= \{x_2 = 0, x_0 + x_2 = 0, \alpha x_2 - x_1 = 0\}, \\ \text{Ind } f_{\alpha,\beta}^{-1} &= \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (\alpha : \alpha\beta : 1)\}, \\ \text{Exc } f_{\alpha,\beta}^{-1} &= \{x_2 = 0, \alpha x_2 - x_0 = 0, \alpha\beta x_2 - x_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout n dans \mathbb{N} la droite $x_1 = \alpha\beta^n$ est contractée par l'itéré $f_{\alpha,\beta}^{-n}$; on peut décrire l'adhérence de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_1 = \alpha\beta^n\}$ suivant la nature du nombre β . Le cas qui nous intéresse est celui où β est un nombre complexe de module 1 « générique » : $\beta = e^{2i\pi\eta}$ avec η générique. Dans ce contexte l'adhérence précédente vue dans la carte affine est le cylindre

$$\{(x_0, x_1) \mid |x_1| = |\alpha|\}$$

qui donne une quadrique réelle dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ensemble que l'on prendra soin d'éviter.

Les $f_{\alpha,\beta}$ fixent le point $(0 : 0 : 1)$ au voisinage duquel elles sont en général linéarisables :

Proposition 6.1 ([32]). — *Si α et β sont « génériques », il existe un réel ρ strictement positif tel que $f_{\alpha,\beta}$ soit conjugué à $(\alpha x_0, \beta x_1)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$, où $\mathbb{D}(0, \rho)$ désigne le disque de centre 0 et de rayon ρ .*

Remarques 6.2. — – La transformation $f_{\alpha,\beta}$ dans cet énoncé est vue comme transformation birationnelle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(x_0, x_1)\}$.

– La condition de généricité est la condition habituelle assurant la linéarisabilité d'un germe d'application : condition de POINCARÉ-SIEGEL-BRUJNO.

Le point $(0 : 1 : 0)$ est d'indétermination pour $f_{\alpha,\beta}$ (il est éclaté sur la droite d'équation $x_2 = 0$) mais ne l'est pas pour $f_{\alpha,\beta}^2$ qui le laisse fixe. La proposition qui suit décrit la dynamique de $f_{\alpha,\beta}^2$ au voisinage du point $(0 : 1 : 0)$; on note que cette description est indépendante de α .

Proposition 6.3 ([32]). — *Si β est du type $\exp(2i\mu)$ avec μ réel « générique », il existe un voisinage V de $(0 : 1 : 0)$ sur lequel la dynamique de $f_{\alpha,\beta}^2$ est localement linéaire ; l'adhérence de l'orbite d'un point générique de V suivant $f_{\alpha,\beta}^2$ est homéomorphe à un cercle.*

La théorie ne nous permet pas de prévoir ce qui se passe à l'extérieur de ces deux zones de linéarisation. Lorsque $|\beta| = 1$, les $f_{\alpha,\beta}$ laissent invariantes les 3-variétés $|x_1| = \text{cte}$ dans la carte affine (x_0, x_1) ; les orbites présentées sont bornées dans un $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. La dynamique se passant essentiellement en dimension 3, différentes projections vont nous permettre d'avoir une bonne représentation de l'orbite d'un point. Dans la carte affine $x_2 = 1$ on désigne par p_1 et p_2 les deux projections standards :

$$p_1(x_0, x_1) = x_0, \quad p_2(x_0, x_1) = x_1.$$

Les figures que nous proposons, appelées abusivement orbites, sont des représentations (en perspective) des projections suivantes.

– On considère d’abord l’ensemble

$$\Omega_1 = \{(p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m)), \text{Im}(p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m)))) \mid n = 1..30000\};$$

cet ensemble est contenu dans le produit de \mathbb{R}^2 par un intervalle. L’orbite d’un point sous l’action de $f_{\alpha,\beta}$ est dans ce cas comprimée par le revêtement double $(x_0, \rho e^{i\theta}) \rightarrow (x_0, \rho \sin \theta)$.

– De même on introduit

$$\Omega_2 = \{(\text{Re}(p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m))), p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m))) \mid n = 1..30000\}$$

qui est inclus dans un cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$; cette seconde projection montre comment « décompresser » Ω_1 pour avoir l’allure de l’orbite.

Dans ce paragraphe les dessins de gauche correspondent à Ω_1 , ceux de droite à Ω_2 .

Les figures qui suivent illustrent très bien les énoncés 6.1 et 6.3 :



Orbite du point $(10^{-4}i, 10^{-4}i)$ sous l’action de $f_{\exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2})}$

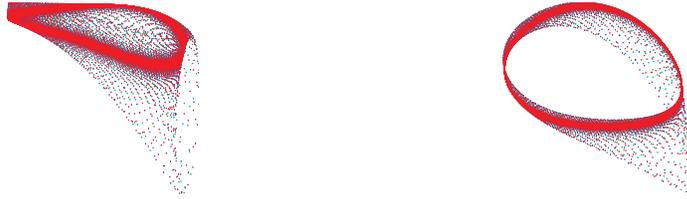
Il s’agit de l’orbite d’un point situé dans la zone de linéarisation du point $(0 : 0 : 1)$; on observe que l’adhérence d’une orbite est un tore.



Orbite du point $(10000 + 10^{-4}i, 10000 + 10^{-4}i)$ sous l’action de $f_{\exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2})}^2$

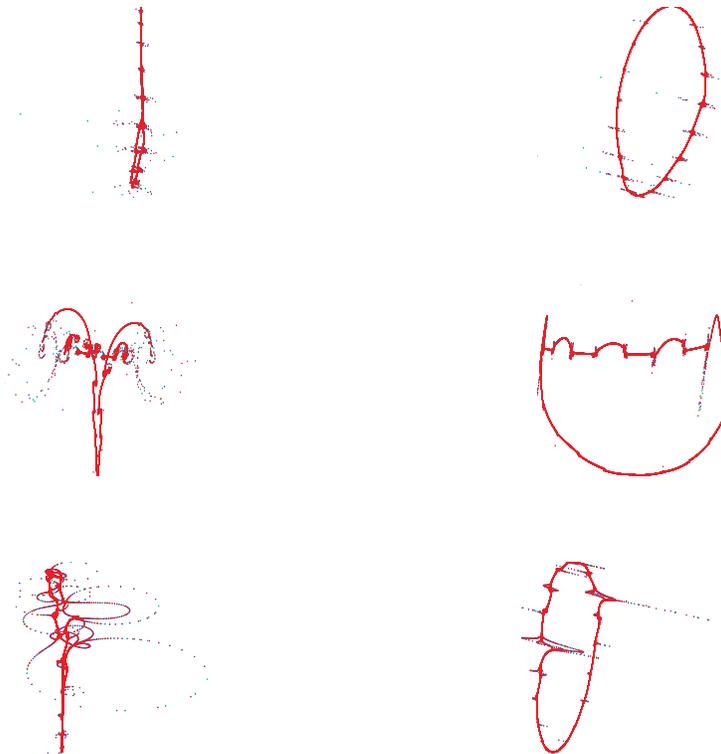
C’est l’orbite d’un point dans la zone de linéarisation du point $(0 : 1 : 0)$; ici l’adhérence d’une orbite est un cercle topologique. Dans la figure de droite les singularités sont des artefacts de projection.

Entre ces deux zones on observe en particulier les orbites suivantes :



Ensembles Ω_1 et Ω_2 associés au point $(0.4 + 10^{-4}i, 0.4 + 10^{-4}i)$

On constate une déformation des tores invariants.



Orbite des points $(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$, $(1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i)$ et $(1.08 + 10^{-4}i, 1.08 + 10^{-4}i)$ sous l'action de $f_{\exp(2i\sqrt{3}), \exp(2i\sqrt{2})}$

Manifestement les tores invariants ont disparu. Toutefois la figure semble s'organiser autour d'une courbe fermée.

Dans le Chapitre 4, §4.6 nous avons rencontré d'autres transformations quadratiques :

$$F_b = \left(1 + \frac{x_1}{x_0}, bx_1 \right), \quad b \in \mathbb{C}^*$$

de carré quadratique. Il se trouve qu'à conjugaison linéaire près les F_b sont des dégénérescences des $f_{\alpha,\beta}$, plus précisément F_b est conjugué à $f_{0,b}$. Les ensembles d'indétermination et exceptionnel des $F_b^{\pm 1}$ sont les suivants :

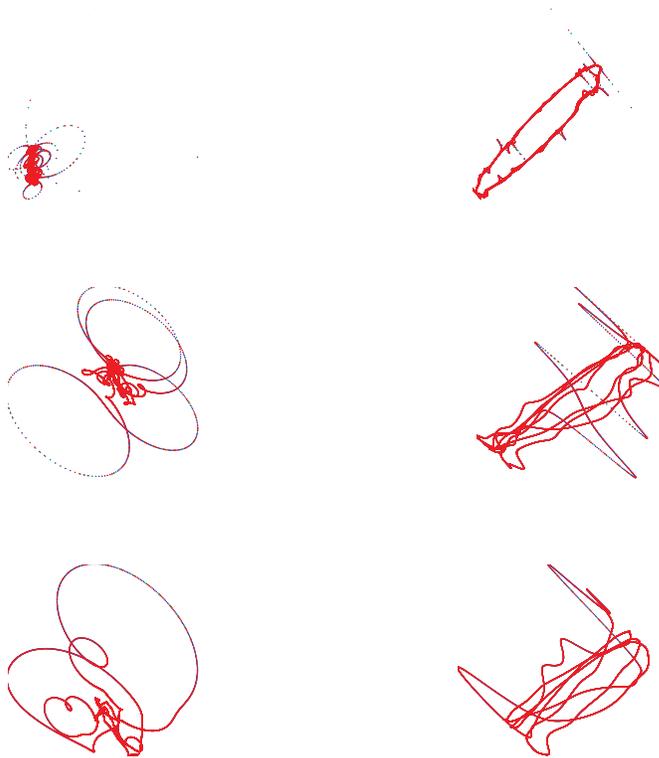
$$\text{Ind } F_b = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}, \quad \text{Exc } F_b = \{x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0\},$$

$$\text{Ind } F_b^{-1} = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (1 : 0 : 1)\}, \quad \text{Exc } F_b^{-1} = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_0 - x_2 = 0\}.$$

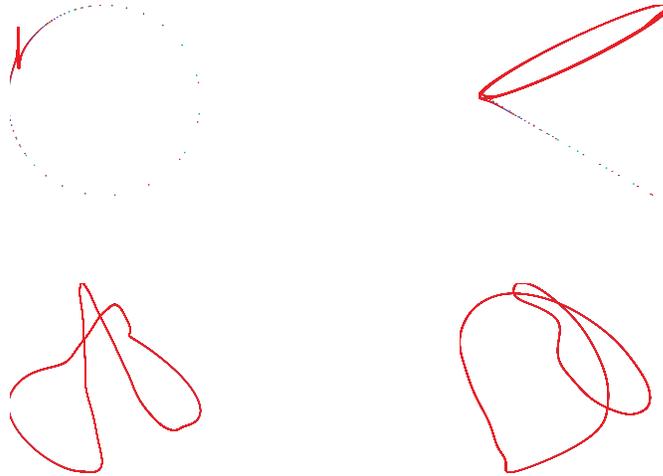
Nous avons représenté dans les dessins qui suivent les ensembles Ω_1 et Ω_2 , en reprenant les notations introduites pour les $f_{\alpha,\beta}$ pour l'application F_b avec $b = \exp(2i\sqrt{2})$ (que l'on espère être générique au sens de la linéarisation).



Orbite du point $(1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i)$ sous l'action de F_b



Ensembles Ω_1 et Ω_2 associés aux points $(1.1 + 10^{-4}i, 1.1 + 10^{-4}i)$, $(1.3 + 10^{-4}i, 1.3 + 10^{-4}i)$, $(1.5 + 10^{-4}i, 1.5 + 10^{-4}i)$ sous l'action de F_b



Orbite du point $(1.8 + 10^{-4}i, 1.8 + 10^{-4}i)$ sous l'action de F_b , resp. F_b^2

Comme les itérés de F_b^2 sont contenus dans ceux de F_b les deux dernières figures doivent en principe être contenues dans les deux précédentes, ce qui ne saute pas aux yeux. La raison est la suivante : pour représenter certains points de l'orbite de F_b qui sont de grand module (*i.e.* dont la première composante est de grand module) il y a un changement d'échelle sur la première composante, ce qui a tendance à aplatir l'orbite sur un cercle.

Dans les paragraphes qui suivent nous allons présenter des orbites et/ou des \mathcal{J} -ensembles pour quelques transformations spéciales. Pour certaines d'entre elles les configurations obtenues sont stables lorsque l'on fait varier les paramètres de contrôle ; dans ce cas nous ne proposons qu'une représentation. À l'inverse lorsque les figures évoluent nous en présentons plusieurs que nous estimons significatives.

6.2. Automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Afin de comprendre ce que sont les \mathcal{J} -ensembles nous commençons par appliquer la procédure pour des transformations linéaires, transformations pour lesquelles on connaît évidemment bien la dynamique. On se place dans la carte affine $x_2 = 1$ et on trace $\mathcal{J}(A; 30, 10, 100)$ pour différents automorphismes A :

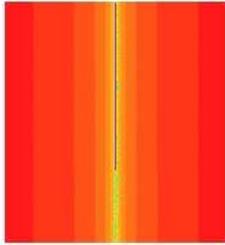


$$A = (2x_0, 3x_1)$$

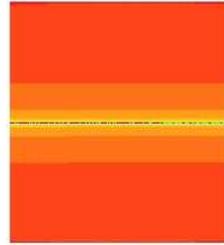


$$A = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_1}{3}\right)$$

Sur la figure de gauche l'automorphisme est dilatant ; tous les points sortent du disque de contrôle $\mathbb{D}(30)$, les points proches de l'origine mettent plus de temps d'où la couleur jaune. Sur celle de droite A est contractant (c'est l'inverse du précédent) ; les points de $\Delta(10)$ ont tous leurs itérés positifs dans $\mathbb{D}(30)$ et donc $\Delta(10)$ est complètement rouge.



$$A = \left(2x_0, \frac{x_1}{3}\right)$$



$$A = \left(\frac{x_0}{2}, 3x_1\right)$$

Dans le premier cas ci-dessus l'automorphisme A est hyperbolique ; l'axe $x_1 = 0$ est la variété stable, $x_0 = 0$ est la variété instable. Les points proches de la variété instable mettent plus de temps pour sortir. Dans la seconde éventualité - qui correspond à l'inverse du précédent - le rôle des axes est inversé.

6.3. Transformations de type $A\sigma$

Pour commencer nous considérons trois transformations dont nous pouvons théoriquement prédire la dynamique. Par exemple la première est une « petite » perturbation (au sens des coefficients) de l'involution de type CREMONA $\left(\frac{2}{x_0}, \frac{1}{3x_1}\right)$; précisément on s'intéresse à l'application φ donnée par

$$\varphi : (x_0, x_1) \mapsto \left(\frac{2}{x_0} + \frac{1}{1000x_1}, \frac{1}{3x_1}\right).$$

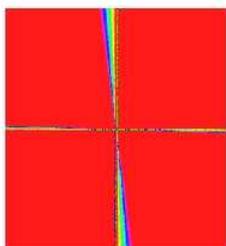
En fait ce qui est facilement prévisible c'est la dynamique de

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \left(\frac{2}{\frac{2}{x_0} + \frac{1}{1000x_1}} + \frac{3x_1}{1000}, x_1 \right)$$

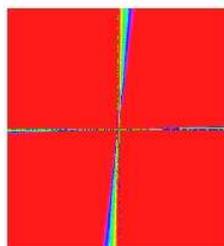
dans la mesure où φ^2 préserve la fibration $x_1 = \text{cte}$ fibre à fibre et sur chaque fibre φ est « linéaire » explicite. De plus les points qui sortent immédiatement pour les données de contrôle choisies ont une de leurs coordonnées inférieure en module à $1/4$; comme les figures ci-dessous représentent un carré de coté 20, les points qui sortent immédiatement sont difficilement visibles ici : ils bordent la zone jaune et sont assimilables aux axes de coordonnées. Dans les deux séries suivantes $1/1000$ est remplacé par $1/100$ puis $1/10$. Nous donnons la liste des points fixes p_k ; pour chaque k , on désigne par μ_k le couple des valeurs propres au point p_k . On note que l'une des deux est toujours -1 .

Les p_k et μ_k de la transformation $\varphi = \left(\frac{2}{x_0} + \frac{0.001}{x_1}, \frac{1}{3x_1} \right)$ sont donnés par le tableau

$p_1 = (-1.41\dots, -0.57\dots)$	$\mu_1 = (-0.99\dots, -1)$
$p_2 = (1.41\dots, -0.57\dots)$	$\mu_2 = (-1.001\dots, -1)$
$p_3 = (-1.41\dots, 0.57\dots)$	$\mu_3 = (-1.001\dots, -1)$
$p_4 = (1.41\dots, 0.57\dots)$	$\mu_4 = (-0.99\dots, -1)$



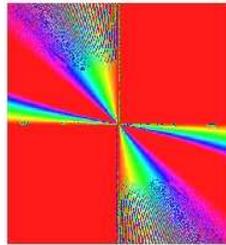
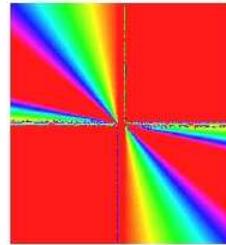
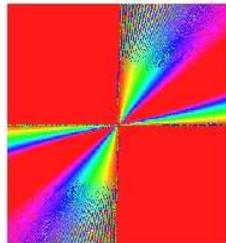
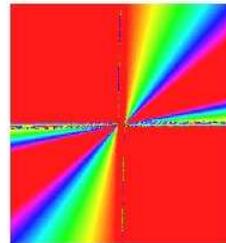
$J(\varphi; 30, 10, 100)$



$J(\varphi^{-1}; 30, 10, 100)$

Nous considérons ensuite la transformation $\tilde{\varphi} = \left(\frac{2}{x_0} + \frac{1}{100x_1}, \frac{1}{3x_1} \right)$ pour laquelle nous avons :

$p_1 = (-1.42\dots, -0.57\dots)$	$\mu_1 = (-0.98\dots, -1)$
$p_2 = (1.40\dots, -0.57\dots)$	$\mu_2 = (-1.01\dots, -1)$
$p_3 = (-1.40\dots, 0.57\dots)$	$\mu_3 = (-1.01, -1)$
$p_4 = (1.42\dots, 0.57\dots)$	$\mu_4 = (-0.98\dots, -1)$

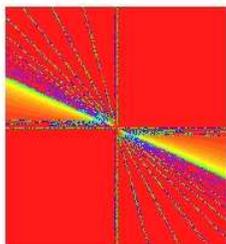
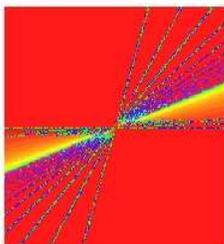
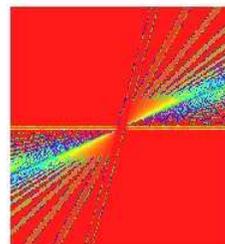

 $J(\tilde{\varphi}; 30, 10, 100)$

 $J(\tilde{\varphi}; 30, 2, 100)$

 $J(\tilde{\varphi}^{-1}; 30, 10, 100)$

 $J(\tilde{\varphi}^{-1}; 30, 2, 100)$

Puis nous nous intéressons à la transformation

$$\psi = \left(\frac{2}{x_0} + \frac{1}{10x_1}, \frac{1}{3x_1} \right)$$

dont les points fixes sont donnés par :

$p_1 = (-1.5\dots, -0.57\dots)$	$\mu_1 = (-0.88\dots, -1)$
$p_2 = (1.33\dots, -0.57\dots)$	$\mu_2 = (-1.13\dots, -1)$
$p_3 = (-1.33\dots, 0.57\dots)$	$\mu_3 = (-1.13\dots, -1)$
$p_4 = (1.5\dots, 0.57\dots)$	$\mu_4 = (-0.88\dots, -1)$

 $\mathcal{J}(\psi; 30, 10, 100)$  $\mathcal{J}(\psi^{-1}; 30, 10, 100)$  $\mathcal{J}(\psi^{-1}; 30, 2, 100)$

Remarques 6.4. — — Comme nous l'avons dit la fibration $x_1 = \text{cte}$ est invariante. Mais la fibration radiale x_1/x_0 est elle aussi invariante. Le lecteur voit d'ailleurs apparaître dans les deux dernières figures (mais aussi dans les précédentes) certaines droites de cette fibration.
 — On note aussi la commutation des transformations précédentes à l'involution $(-x_0, -x_1)$ d'où la symétrie des figures.

La fin de ce paragraphe est consacrée à l'étude d'éléments de type $A\sigma$ choisis au hasard et pour lesquels nous n'avons en général aucune intuition de la dynamique. Comme précédemment les expériences sont faites dans une région contenant un point d'indétermination, ici le point $(0 : 0 : 1)$: il semble donc déraisonnable de tracer des orbites dans ce type de domaine. Toutefois nous présentons la procédure de type JULIA pour diverses données de contrôle.

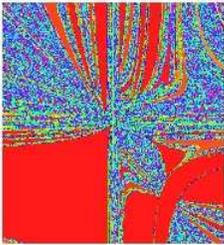
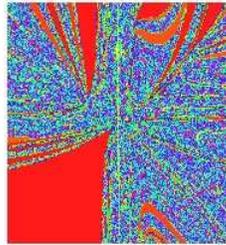
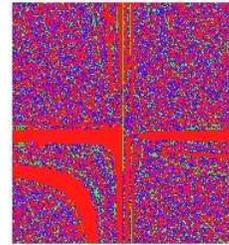
On sait qu'une transformation de Σ^3 possède en général 4 points fixes distincts p_1, p_2, p_3 et p_4 . Nous allons voir que pour les paramètres considérés ou bien ces quatre points fixes sont réels, ou bien deux sont réels et deux sont complexes conjugués.

Considérons la transformation

$$A\sigma, \quad A = (1.2x_0 + 0.9x_1 - 0.1x_2 : -0.3x_0 + x_1 - 2x_2 : -2x_0 + 1.2x_1 + 0.6x_2).$$

Nous précisons dans le tableau ci-dessous la nature des points fixes p_k de $A\sigma$; on note toujours μ_k le couple de valeurs propres de la différentielle de $A\sigma$ en p_k .

$p_1 = (3.83\dots, -42.08\dots)$	$\mu_1 = (-12.48\dots, -0.17\dots)$	hyperbolique
$p_2 = (-1.11\dots, -1.50\dots)$	$\mu_2 = (-0.13\dots + 0.78\dots i, -0.13\dots - 0.78\dots i)$	contractant
$p_3 = (-0.17\dots, 0.23\dots)$	$\mu_3 = (-1.91\dots, -0.44\dots)$	hyperbolique
$p_4 = (1.29\dots, 0.31\dots)$	$\mu_4 = (-0.93\dots, -2.01\dots)$	hyperbolique

 $\mathcal{J}(A\sigma; 30, 10, 100)$  $\mathcal{J}(A\sigma; 30, 3, 100)$  $\mathcal{J}(A\sigma; 200, 50, 1000)$

Dans la seconde figure $\mathcal{J}(A\sigma; 30, 3, 100)$ on ne voit que les trois derniers points fixes. Le bassin d'attraction du point p_2 correspond à la zone rouge dans le troisième quadrant. La dernière figure ($\mathcal{J}(A\sigma; 200, 50, 1000)$) contient les quatre points fixes.

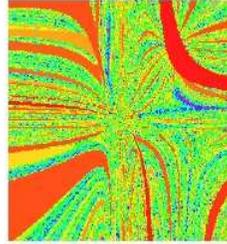
De la même façon nous explicitons dans le tableau ci-dessous la nature des points fixes p_k de

$$A\sigma, \quad A = (1.2x_0 - 0.9x_1 - 0.1x_2 : -0.3x_0 + x_1 + 2x_2 : 2x_0 + 1.2x_1 - 0.6x_2).$$

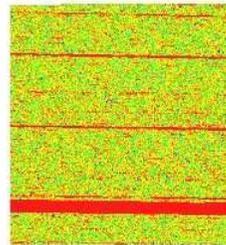
$p_1 = (3.17\dots, 25.51\dots)$	$\mu_1 = (7.60\dots, -0.30\dots)$	hyperbolique
$p_2 = (0.20\dots, 0.29\dots)$	$\mu_2 = (-2.31\dots, 0.34\dots)$	hyperbolique
$p_3 = (-0.05\dots + 0.97\dots i, -0.49\dots - 0.38\dots i)$	$\mu_3 = (-0.26\dots + 0.80\dots i, 0.42\dots - 1.52\dots i)$	hyperbolique
$p_4 = (-0.05\dots - 0.97\dots i, -0.49\dots + 0.38\dots i)$	$\mu_4 = (-0.26\dots - 0.80\dots i, 0.42\dots + 1.52\dots i)$	hyperbolique

La taille des valeurs propres $(2, 7, \dots)$ est relativement grande ce qui nous contraint à travailler avec N « pas trop grand » (ici $N = 100$ et 7^{100} est déjà énorme...) Avec la donnée de

contrôle $\Delta(3)$ on ne voit que le point fixe hyperbolique p_2 . Dans la troisième figure (celle correspondant à $\mathcal{J}(A\sigma; 200, 30, 1000)$) on augmente les deux premières données de contrôle, les deux points fixes sont sur le dessin. Enfin la dernière figure ($\mathcal{J}(A\sigma; 200, (2 \leq x_0 \leq 4, 24 \leq x_1 \leq 26), 1000)$) est un zoom de l'avant dernière ($\mathcal{J}(A\sigma; 200, 30, 1000)$).


 $\mathcal{J}(A\sigma; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(A\sigma; 30, 3, 100)$

 $\mathcal{J}(A\sigma; 200, 30, 1000)$

 $\mathcal{J}(A\sigma; 200, (2 \leq x_0 \leq 4, 24 \leq x_1 \leq 26), 1000)$

6.4. Disques de SIEGEL, bassin d'attraction

La difficulté à donner une interprétation raisonnable des figures précédentes nous conduit à examiner des situations où l'on contrôle a priori un phénomène dans une zone déterminée et éventuellement étudier les déformations de ce phénomène.

Typiquement - c'est ce que nous faisons dans la première série d'expériences - on considère une famille de transformations (réelles) possédant un point fixe générant un domaine invariant (disque de SIEGEL, bassin d'attraction...) et on représente ici à la fois certains \mathcal{J} -ensembles et/ou orbites.

On considère la famille de transformations $g_{\alpha, \varepsilon, \theta}$ donnée par

$$(\alpha((\cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)x_1)(x_2 + \varepsilon x_0) + \ell x_0) : \alpha x_2 \ell : x_2(x_2 + \varepsilon x_0)), \quad \ell = \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_0$$

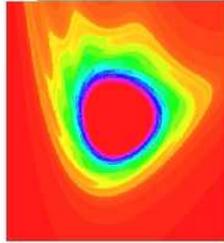
avec α réel strictement positif et ε réel.

Elle a $(0 : 0 : 1)$ (qui sera au centre de chaque figure) comme point fixe et en ce point sa partie linéaire est la similitude $\alpha e^{i\theta}$. Ainsi pour $\alpha = 1$ et θ irrationnel générique devant 2π cette transformation possède un disque de SIEGEL. Pour $|\alpha| < 1$ le point $(0 : 0 : 1)$ est un attracteur.

Le calcul explicite de $\text{Ind } g_{\alpha,\varepsilon,\theta}^{\pm 1}$ ou $\text{Exc } g_{\alpha,\varepsilon,\theta}^{\pm 1}$ montre que $g_{\alpha,\varepsilon,\theta}$ est dans Σ^3 si $\varepsilon \neq 0$ et dans Σ^2 sinon. Plus précisément on a

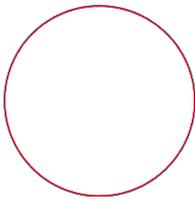
$$\begin{aligned} \text{Ind } g_{\alpha,\varepsilon,\theta} &= \{(0 : 1 : 0), (\varepsilon \tan(\theta) + 1 : \tan(\theta) - \varepsilon : 0), (1 : \tan(\theta) : -\varepsilon)\}, \\ \text{Exc } g_{\alpha,\varepsilon,\theta} &= \{x_2 = 0, x_2 + \varepsilon x_0 = 0, \cos^2(\theta)(\varepsilon x_0 + x_1) + \sin(\theta) \cos(\theta)(\varepsilon x_1 - x_0) + x_2 = 0\}, \\ \text{Ind } g_{\alpha,\varepsilon,\theta}^{-1} &= \{(1 : 0 : 0), (1 : -\varepsilon : 0), (\alpha \sin(\theta) : \alpha \cos(\theta) : -\cos^2(\theta) - \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta))\}, \\ \text{Exc } g_{\alpha,\varepsilon,\theta}^{-1} &= \{x_2 = 0, \varepsilon \cos(\theta)x_0 + \cos(\theta)x_1 + \alpha x_2 = 0, (\varepsilon \sin(\theta) + \cos(\theta))x_1 + \alpha x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Tout d'abord le paramètre α étant fixé à 1, nous allons tracer quelques $\mathcal{J}(g_{1,\varepsilon,\theta}; r, \rho, M)$ et orbites. Comme on l'a dit on s'attend à la présence d'un disque de SIEGEL, tout du moins pour θ générique.



$\mathcal{J}(g_{1,0,1}; 30, 1.2, 100)$

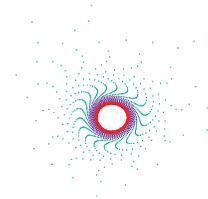
On peut penser dans un premier temps que la région centrale rouge \mathcal{R} ci-dessus représente le disque de SIEGEL. Dans un tel disque chaque orbite est d'adhérence un « cercle ». Nous avons tracé trois orbites de points manifestement dans \mathcal{R} , dont deux semblent contredire l'affirmation précédente :



$\mathcal{O}(g_{1,0,1}, (0.001, 0.01); 3000)$



$\mathcal{O}(g_{1,0,1}, (0.001, 0.05); 3000)$



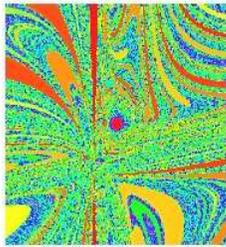
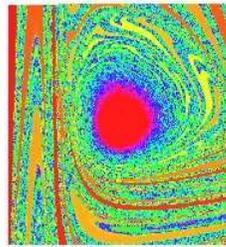
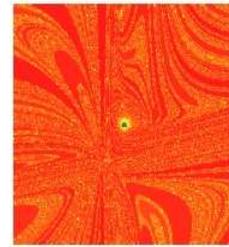
$\mathcal{O}(g_{1,0,1}, (0.001, 0.1); 1500)$

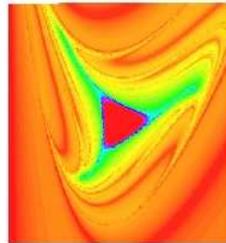
En fait ceci est dû à un mauvais choix des données de contrôle pour visualiser le phénomène que l'on souhaite observer : des points voisins du disque de SIEGEL qui restent assez longtemps confinés dans son voisinage font partie de cette région et le disque de SIEGEL s'avère en fait beaucoup plus petit que la représentation précédente.

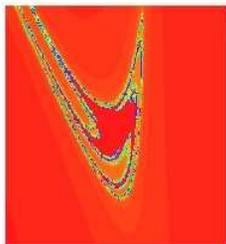
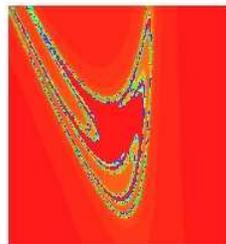
Il semble (d'après la représentation $\mathcal{O}(g_{1,0,1}, (0.001, 0.1); 1500)$) que les points suffisamment proches du disque de SIEGEL ont leur orbite qui accumule ce disque ; l'augmentation du

nombre d'itérations fait « diminuer le disque de SIEGEL ». On observe une certaine stabilité qualitative des diverses représentations bien qu'il y ait une variation métrique de la nature des figures suivant le choix des données de contrôle, en particulier lorsque le nombre d'itérations augmente.

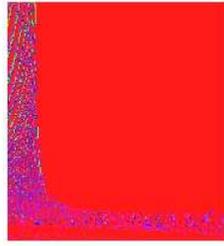
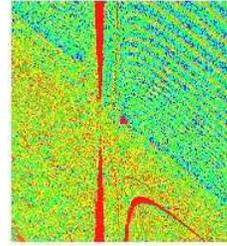
Dans ce qui suit sur chaque ligne les trois figures concernent une même transformation ; on passe d'une figure à l'autre soit par un zoom, soit par une variation du nombre d'itérations. Par exemple dans $\mathcal{J}(g_{1,1,1}; 30, 5, 100)$ et $\mathcal{J}(g_{1,1,1}; 30, 5, 1000)$ on observe la variation de la « taille du domaine de SIEGEL » : en passant de 100 à 1000 itérations sur un même domaine, on affine l'approximation du vrai disque de SIEGEL.


 $\mathcal{J}(g_{1,1,1}; 30, 5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,1,1}; 30, 1, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,1,1}; 30, 5, 1000)$

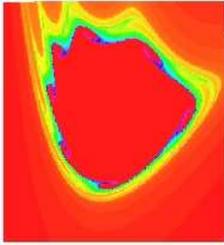
 $\mathcal{J}(g_{1,1,2}; 30, 5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,1,2}; 30, 1, 100)$

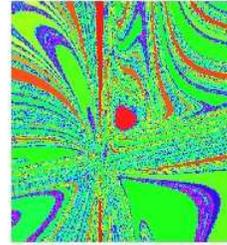
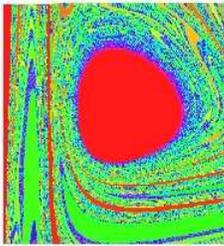
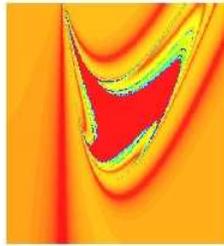
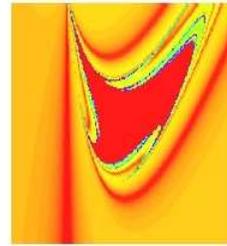
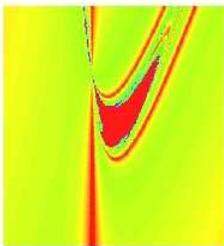
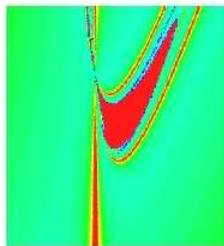
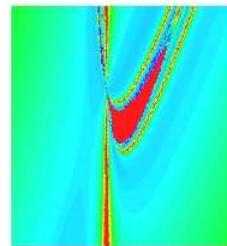
 $\mathcal{J}(g_{1,1,2}; 30, 5, 1000)$

 $\mathcal{J}(g_{1,0,2}; 30, 5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,0,2}; 30, 4, 100)$

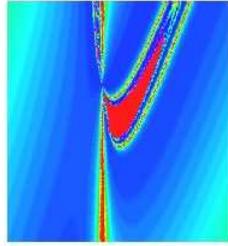
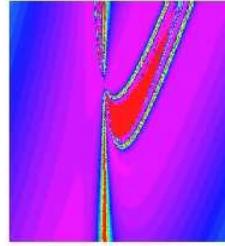
 $\mathcal{J}(g_{1,0,2}; 30, 5, 1000)$


 $\mathcal{J}(g_{1,1,0,1}; 30, 0.5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,1,0,1}; 30, 0.12, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,1,0,1}; 30, 0.5, 1000)$

Maintenant nous faisons prendre au paramètre α des valeurs strictement plus petites que 1. Le point $(0,0)$, central sur les figures, est donc un attracteur. On notera que certains bassins d'attraction semblent très voisins des disques de SIEGEL obtenus précédemment.


 $\mathcal{J}(g_{0.98,0,1}; 30, 1.2, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.98,0,1}; 30, 1.2, 1000)$

 $\mathcal{J}(g_{0.98,1,1}; 30, 5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.98,1,1}; 30, 1, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.9,1,2}; 30, 2, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.88,1,2}; 30, 5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.82,1,2}; 30, 5, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.78,1,2}; 30, 2, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.775,1,2}; 30, 7, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{0.77,1,2}; 30, 7, 100)$  $\mathcal{J}(g_{0.765,1,2}; 30, 7, 100)$

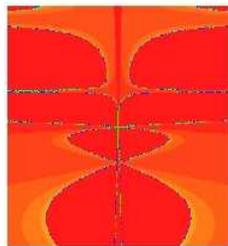
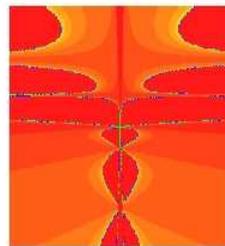
6.5. Transformations ayant une fibration en droites invariante

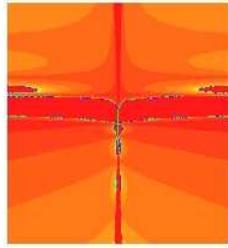
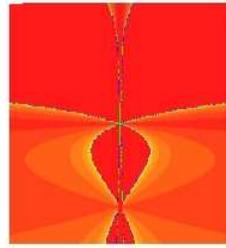
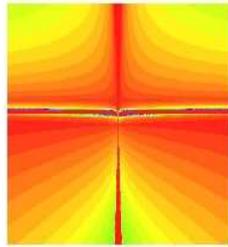
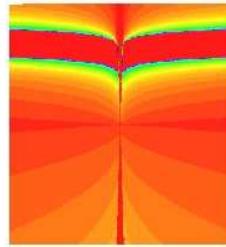
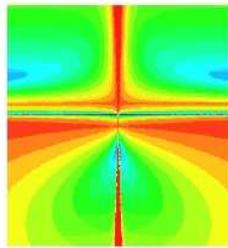
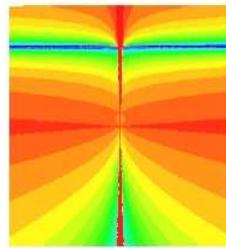
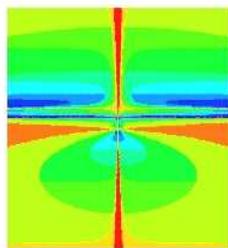
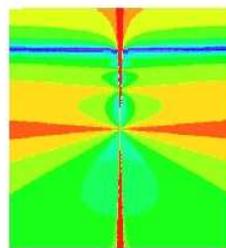
Considérons la famille de transformations

$$g_b = \left(\frac{x_1}{x_0}, b + (1-b)x_1 \right), \quad b \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Pour $b = 0$ l'application g_0 est une involution.

Ici encore la fibration $x_1 = \text{cte}$ est invariante mais de plus l'involution $(-x_0, x_1)$ commute avec g_b , ce qui se reflète dans les figures qui suivent. La dynamique n'est pas pour autant clairement prévisible. Chaque transformation g_b est de type $A\sigma$ et donc dans Σ^3 . Dans la carte affine $x_2 = 1$ chaque g_b possède deux points fixes $(\pm 1, 1)$ et en chacun de ces points fixes les valeurs propres de la différentielle sont $(-1, 1-b)$. Nous présentons quelques \mathcal{J} -ensembles de la transformation g_b où se reflète évidemment la symétrie axiale.

 $\mathcal{J}(g_{1.5}; 30, 10, 100)$  $\mathcal{J}(g_{1.6}; 30, 10, 100)$


 $\mathcal{J}(g_{1.7};30,10,100)$

 $\mathcal{J}(g_{1.7};30,1.5,100)$

 $\mathcal{J}(g_{1.95};30,10,100)$

 $\mathcal{J}(g_{1.95};30,1.5,100)$

 $\mathcal{J}(g_{2.1};30,10,100)$

 $\mathcal{J}(g_{2.1};30,1.5,100)$

 $\mathcal{J}(g_{2.4};30,10,100)$

 $\mathcal{J}(g_{2.4};30,1.5,100)$

6.6. Déformations d'automorphismes de HÉNON

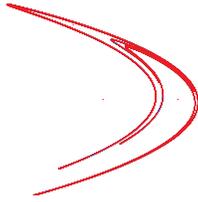
Les transformations de HÉNON sont très populaires. Il est naturel d'en étudier les déformations. Pour cela on considère des familles h_ε de transformations quadratiques réelles dépendant d'un paramètre ε telles que h_0 soit la transformation de HÉNON standard. On s'intéresse à l'évolution des orbites ainsi que des \mathcal{J} -ensembles lorsque les paramètres changent. Nous présentons trois types de déformation, une dans chaque Σ^i .

6.6.1. Déformation dans Σ^1 . —

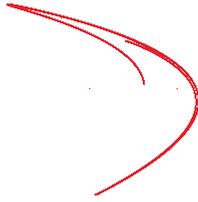
Déformons le prolongement à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de l'application de HÉNON $(x_1 + 1 - ax_0^2, bx_0)$ de premier degré dynamique 2 dans Σ^1 en composant à gauche par $(x_0 : x_1 : x_2 + \varepsilon x_1)$:

$$h_\varepsilon = (x_1 x_2 + x_2^2 - ax_0^2 : bx_0 x_2 : x_2^2 + \varepsilon bx_0 x_2), \quad a = 1.4, \quad b = 0.3.$$

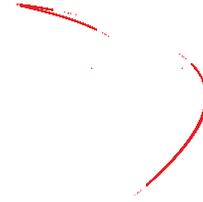
Dans un premier temps nous traçons $\mathcal{O}(h_\varepsilon, (0, 0); 30000)$ pour certaines valeurs de ε :



$\mathcal{O}(h_0, (0, 0); 30000)$



$\mathcal{O}(h_{0.8}, (0, 0); 30000)$



$\mathcal{O}(h_{1.8}, (0, 0); 30000)$

Puis nous dessinons quelques \mathcal{J} -ensembles pour ces mêmes valeurs :



$\mathcal{J}(h_0; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(h_{0.8}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(h_{1.8}; 30, 10, 100)$

Ici encore la stabilité de la figure semble pertinente.

6.6.2. Déformation dans Σ^2 . —

On déforme de nouveau l'application de HÉNON $(x_1 + 1 - ax_0^2, bx_0)$ cette fois de la façon suivante :

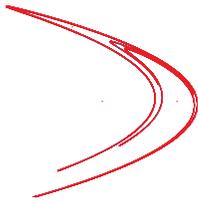
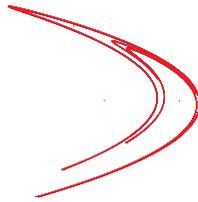
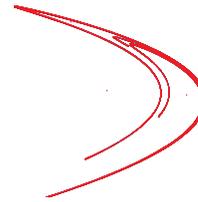
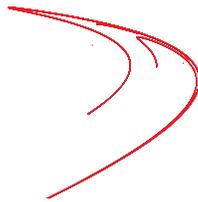
$$h_\varepsilon = \left(-x_2^2 - x_1 x_2 + ax_0^2 + \frac{\varepsilon a}{b} x_0 x_1 - \frac{1}{b} (a\varepsilon + \sqrt{-b\varepsilon}) x_2^2 : -bx_0 x_2 + \sqrt{-b\varepsilon} x_2^2 : \frac{\varepsilon a x_0 x_2}{\sqrt{-b\varepsilon}} - x_2^2 \right)$$

avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Notons que h_ε est dans Σ^2 pour $\varepsilon \neq 0$ et que $\lambda(h_\varepsilon) = 2$. Les lieux d'indétermination et exceptionnel de h_ε sont donnés par :

$$\text{Ind } h_\varepsilon = \{(0 : 1 : 0), (\varepsilon : -b : 0)\}, \quad \text{Exc } h_\varepsilon = \{x_2 = 0, \varepsilon ax_0 - bx_2 = 0\}.$$

On se place dans la carte affine $x_2 = 1$; les dessins qui suivent représentent $\mathcal{O}(h_\varepsilon, (0, 0); N)$ pour certains ε .

Comme précédemment la figure est numériquement stable par petite déformation mais pas par « grande » déformation, l'attracteur étrange semble disparaître ou tout du moins se « casser ».


 $\mathcal{O}(h_{-10^{-9}}, (0, 0); 30000)$

 $\mathcal{O}(h_{-10^{-5}}, (0, 0); 30000)$

 $\mathcal{O}(h_{-10^{-3}}, (0, 0); 30000)$

 $\mathcal{O}(h_{-3.10^{-2}}, (0, 0); 30000)$

 $\mathcal{O}(h_{-4.10^{-2}}, (0, 0); 30000)$

 $\mathcal{O}(h_{-4.48.10^{-2}}, (0, 0); 30000)$

Dessins $\mathcal{J}(h_\varepsilon; 30, 10, 100)$ pour quelques valeurs de ε .


 $\mathcal{J}(h_{-10^{-9}}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(h_{-10^{-3}}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(h_{-4.48.10^{-2}}; 30, 10, 100)$

6.6.3. Déformation dans Σ^3 . —

Considérons la déformation de HÉNON suivante :

$$h_\varepsilon = (-a^2(-x_1x_2 - x_2^2 + ax_0^2) : b(a^2x_0x_2 + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon x_1x_2 + \varepsilon x_2^2) : a(ax_2^2 + \varepsilon x_0x_1 + \varepsilon x_0x_2))$$

où $(a, b) = (1.4, 0.3)$. Si ε est nul h_ε compte un unique point d'indétermination $(0 : 1 : 0)$; sinon h_ε est dans Σ^3 :

$$\text{Ind } h_\varepsilon = \left\{ (\alpha : (-1 + a\alpha^2) : 1) \mid \alpha^3 = -\frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

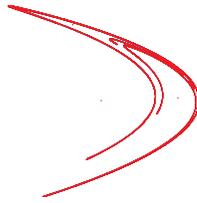
Les dessins qui suivent représentent dans la carte affine $x_2 = 1$

$$\mathcal{O}(h_\varepsilon, (0, 0); N) = \{h_\varepsilon^n(0, 0) \mid n = 1..N\}$$

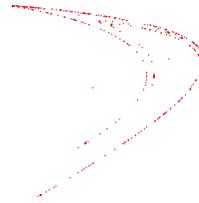
pour certaines valeurs de ε :



$\mathcal{O}(h_0, (0, 0); 30000)$



$\mathcal{O}(h_{0.07}, (0, 0); 30000)$



$\mathcal{O}(h_{0.72}, (0, 0); 30000)$

Nous traçons les ensembles $\mathcal{J}(h_\varepsilon, 30, 10, 100)$ pour deux valeurs distinctes de ε :



$\mathcal{J}(h_0; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(h_{0.72}; 30, 10, 100)$

Remarque 6.5. — L'orbite dynamique de l'ensemble des automorphismes de HÉNON est de dimension $8 + 2 = 10$; l'orbite dynamique d'un élément générique de Σ^3 est de dimension 8. Par suite les adhérences de ces orbites se coupent ; dit autrement pour tout élément générique f de Σ^3 il existe un conjugué dynamique de f aussi proche que l'on veut d'une transformation de HÉNON. On peut donc penser dans le cas réel que l'existence d'un attracteur étrange se propage à Σ^3 ce qui semble être corroboré par les figures précédentes.

6.7. Transformations ayant une droite de points fixes

On peut imaginer que la présence d'une courbe de points fixes rigidifie la nature des orbites et des \mathcal{J} -ensembles. Nous considérons la famille de transformations donnée par

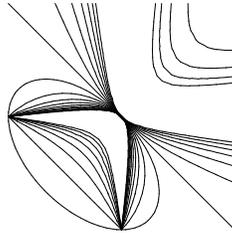
$$\mathfrak{v}_{\varepsilon,c} = ((x_0 + x_2)(x_0 + (1 - \varepsilon)x_2) : (x_0 + \varepsilon cx_2 + x_2)x_1 : x_1 x_2)$$

qui a pour droite de points fixes $x_2 = 0$. Si ε est non nul, $\mathfrak{v}_{\varepsilon,c}$ est dans Σ^3 , sinon $\mathfrak{v}_{0,c}$ est dans Σ^2 :

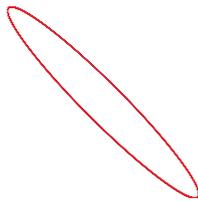
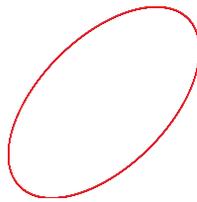
$$\text{Ind } \mathfrak{v}_{\varepsilon,c} = \{(1 : 0 : -1), (0 : 1 : 0), (\varepsilon - 1 : 0 : 1)\},$$

$$\text{Exc } \mathfrak{v}_{\varepsilon,c} = \{x_1 = 0, x_0 + x_2 = 0, x_0 + (1 - \varepsilon)x_2 = 0\}.$$

Plaçons-nous dans la carte affine $x_2 = 1$ carte dans laquelle la ligne de points fixes est à l'infini. Ce choix nous fait penser que la dynamique doit être modérément compliquée à l'infini. Notons que $\mathfrak{v}_{1,-1} = \left(\frac{x_0(x_0+1)}{x_1}, x_0\right)$ laisse la fibration en coniques $\frac{x_0^2+x_1^2+x_0+x_1}{x_0x_1} = \text{cte}$ invariante fibre à fibre. Les fibres de $\frac{x_0^2+x_1^2+x_0+x_1}{x_0x_1} = \alpha$ avec α entier compris entre -8 et 8 ont dans le plan réel l'allure suivante :

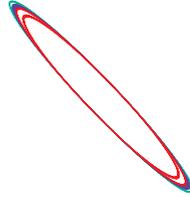


Nous allons tracer, lorsque (ε, c) est proche de $(1, -1)$, l'ensemble $\mathcal{O}(\mathfrak{v}_{\varepsilon,c}, (x_0, x_1); N)$ pour certaines valeurs de (x_0, x_1) dans \mathbb{R}^2 ; on prendra garde aux possibles changements d'échelles d'une figure à l'autre. Pour le paramètre $(1, -1)$ on constate que les orbites sont (probablement) denses dans les niveaux de la fonction invariante :

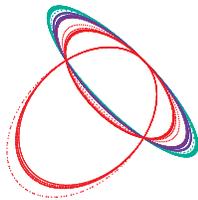

 $\mathcal{O}(\mathfrak{v}_{1,-1}, (1, -1.1); 9790)$

 $\mathcal{O}(\mathfrak{v}_{1,-1}, (-2.2, -2.21); 16165)$

 $\mathcal{O}(\mathfrak{v}_{1,-1}, (-10, -10.1); 34200)$

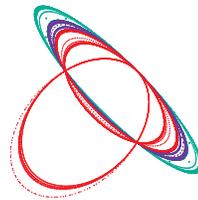
Pour $(\varepsilon, c) = (1.0001, -0.9999)$ on obtient les figures suivantes :



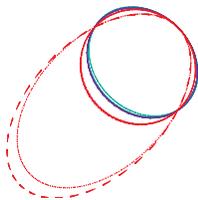
$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (1, -1.1); 9790)$



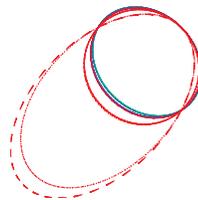
$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (-1.6, -1.601); 18000)$



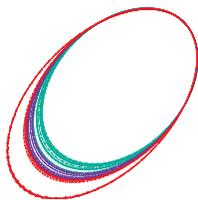
$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (-1.6, -1.601); 28000)$



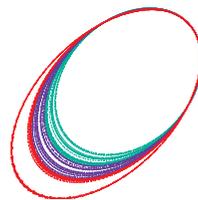
$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (-1.9, -1.901); 7000)$



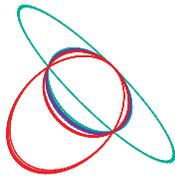
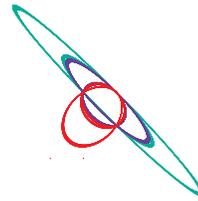
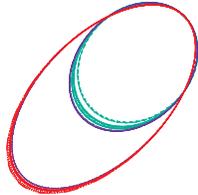
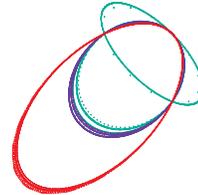
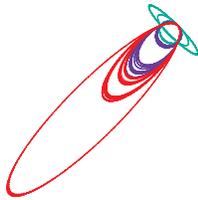
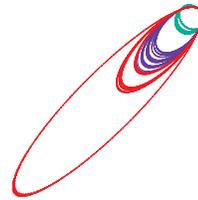
$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (-1.9, -1.901); 9685)$



$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (-1.95, -1.95001); 18000)$

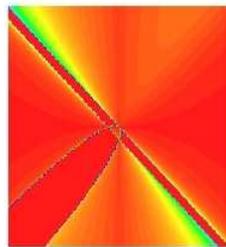


$\mathcal{O}(\mathbf{v}_{\varepsilon, c}, (-1.95, -1.95001); 24000)$

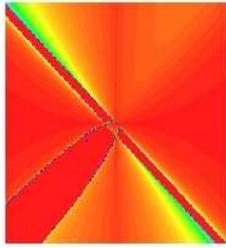

 $\mathcal{O}(v_{\varepsilon,c}, (-2, -2.001); 20000)$

 $\mathcal{O}(v_{\varepsilon,c}, (-2, -2.001); 32731)$

 $\mathcal{O}(v_{\varepsilon,c}, (-2.2, -2.21); 13000)$

 $\mathcal{O}(v_{\varepsilon,c}, (-2.2, -2.21); 16165)$

 $\mathcal{O}(v_{\varepsilon,c}, (-10, -10.1); 25000)$

 $\mathcal{O}(v_{\varepsilon,c}, (-10, -10.1); 34200)$

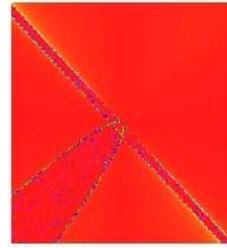
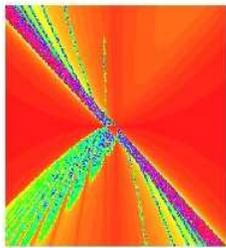
Les figures sont intéressantes et semblent révéler un phénomène semblable à ce que l'on observe pour les orbites d'une transformation de HÉNON. Lorsque l'on regarde les orbites se former elles commencent par remplir un « anneau d'âme une ellipse » puis brutalement remplissent un autre anneau etc, phénomènes que l'on distingue avec nos conventions de couleurs.

Voici quelques \mathcal{J} -ensembles dans la carte affine $x_2 = 1$.


 $\mathcal{J}(v_{1,-1}; 30, 10, 100)$

Dans cette première figure on voit apparaître au changement d'échelle près la configuration des niveaux de la fonction laissée invariante par la transformation.


 $\mathcal{J}(v_{1.0001, -0.9999}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(v_{1.0001, -0.9999}; 30, 10, 1000)$

 $\mathcal{J}(v_{1.0001, -0.9999}; 200, 10, 1000)$

 $\mathcal{J}(v_{1.001, -1}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(v_{1.001, -1}; 30, 10, 1000)$

 $\mathcal{J}(v_{1.001, -1}; 200, 10, 1000)$

6.8. Transformations ayant une conique invariante

La famille de transformations birationnelles g_θ donnée dans la carte $x_1 = 1$ par

$$g_\theta(x_0, x_2) = \left(\cos(\theta) x_0 + \sin(\theta) \frac{1 - x_0^2}{x_2}, -\sin(\theta) x_0 + \cos(\theta) \frac{1 - x_0^2}{x_2} \right)$$

laisse le cercle $x_0^2 + x_2^2 = 1$ invariant ; sur celui-ci c'est une rotation d'angle $-\theta$. Les transformations g_θ commutent à l'involution $(-x_0, -x_2)$.

Un calcul montre que

$$g_\theta^{-1}(x_0, x_2) = \left(\cos(\theta)x_0 - \sin(\theta)x_2, \frac{1 - (\cos(\theta)x_0 - \sin(\theta)x_2)^2}{\cos(\theta)x_2 + \sin(\theta)x_0} \right).$$

On remarque que les g_θ sont dans Σ^3 . Les ensembles $\text{Ind } g_\theta$ et $\text{Exc } g_\theta$ sont indépendants de θ mais il n'en est pas de même pour $\text{Ind } g_\theta^{-1}$ et $\text{Exc } g_\theta^{-1}$:

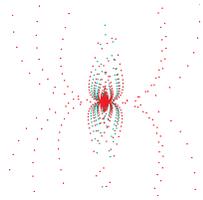
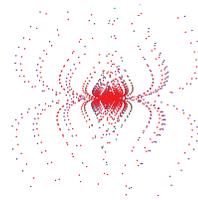
$$\text{Ind } g_\theta = \{(0 : 0 : 1), (1 : 1 : 0), (1 : -1 : 0)\},$$

$$\text{Exc } g_\theta = \{x_2 = 0, x_0 + x_1 = 0, x_0 - x_1 = 0\},$$

$$\text{Ind } g_\theta^{-1} = \{(\sin(\theta) : 0 : \cos(\theta)), (\cos(\theta) : -1 : -\sin(\theta)), (\cos(\theta) : 1 : -\sin(\theta))\},$$

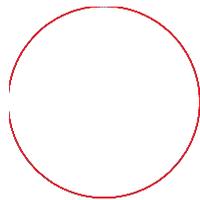
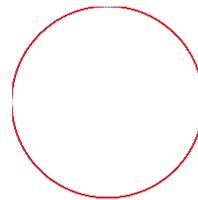
$$\text{Exc } g_\theta^{-1} = \{\sin(\theta)x_0 + \cos(\theta)x_2 = 0, \cos(\theta)x_0 + x_1 - \sin(\theta)x_2 = 0, \\ \cos(\theta)x_0 - x_1 - \sin(\theta)x_2 = 0\}.$$

Nous traçons les $\mathcal{O}(g_\theta; (x_0, x_1), N)$ (resp. $\mathcal{O}(g_\theta^{-1}; (x_0, x_1), N)$) pour certains θ et N , les points initiaux (x_0, x_1) étant choisis soit proches de l'origine qui est un point éclaté, soit voisins du cercle $x_0^2 + x_1^2 = 1$.

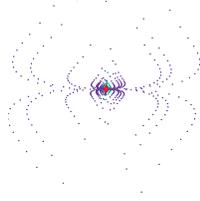

 $\mathcal{O}(g_{0.05}; (0.01, 0.01), 20000)$

 $\mathcal{O}(g_{0.05}^{-1}; (0.01, 0.01), 20000)$

Dans cette classe d'exemples on trouve le phénomène suivant : parfois quelques itérés se retrouvent très loin par rapport à la plupart qui restent « confinés dans des limites raisonnables ». Pour avoir un dessin « correct » on a enlevé 75 points de l'orbite pour lesquels une des deux composantes est en valeur absolue supérieure à 15000, manipulation qu'on fait à plusieurs reprises dans la suite pour limiter les problèmes d'échelle.

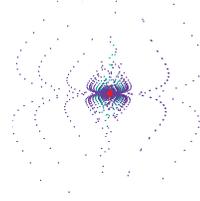
Sur le second dessin on a enlevé 47 itérés pour lesquels une des deux composantes est en valeur absolue supérieure à 70000.


 $\mathcal{O}(g_{0.05}; (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), 6000)$

 $\mathcal{O}(g_{0.05}^{-1}; (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), 6000)$

Le point itéré se trouve sur le cercle invariant.

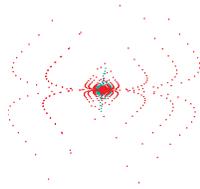


$$\mathcal{O}(g_{0.05}; \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.000032553\right), 20000)$$

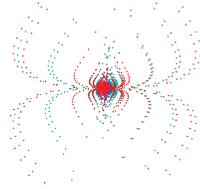


$$\mathcal{O}(g_{0.05}^{-1}; \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.000032553\right), 20000)$$

Le point initial (« point rouge central ») est proche du cercle invariant mais ses itérés s'échappent. Comme précédemment on a enlevé de l'orbite positive (resp. négative) 96 (resp. 13) itérés pour lesquels une des deux composantes est « très grande ». Bien que le point initial soit relativement près du cercle invariant son orbite est qualitativement et quantitativement ressemblante aux deux premières partant d'un point proche de l'origine.



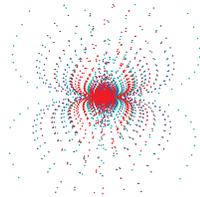
$$\mathcal{O}(g_{0.05}; (0, 10), 20000)$$



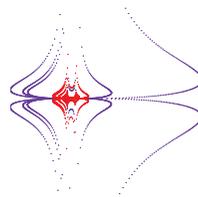
$$\mathcal{O}(g_{0.05}^{-1}; (0, 10), 20000)$$

Sur le premier (resp. second) dessin il manque les 27 (resp. 41) itérés de $(0, 10)$ pour lesquels une des deux composantes est en valeur absolue supérieure à 8000 (resp. 5000).

Dans les dessins qui suivent on fait varier l'angle θ ; les figures sont similaires.

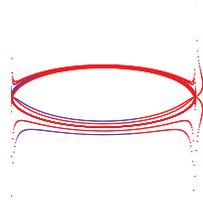


$$\mathcal{O}(g_{0.005}; (-2, 1), 12000)$$

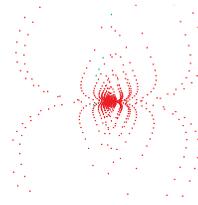


$$\mathcal{O}(g_{0.005}^{-1}; (-2, 1), 12000)$$

On a enlevé 94 (resp. 22) itérés de $(-2, 1)$ sous l'action de g_θ (resp. g_θ^{-1}) pour lesquels une des deux composantes est en valeur absolue supérieure à 1000000 (resp. 180).

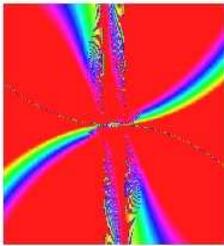


$$\mathcal{O}(g_{0.005}; (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.001537), 9000)$$

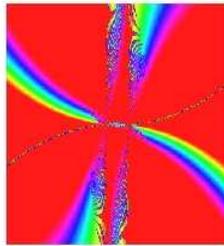


$$\mathcal{O}(g_{0.005}^{-1}; (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.001537), 7500)$$

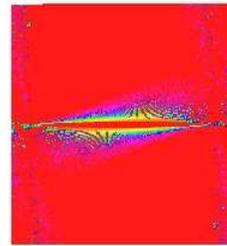
Les figures suivantes, centrées à l'origine de la carte affine $x_1 = 1$, représentent les ensembles $\mathcal{J}(g_\theta; 30, 10, 100)$, $\mathcal{J}(g_\theta^{-1}; 30, 10, 100)$ et $\mathcal{J}(g_\theta; 30, 1.2, 100)$ pour certaines valeurs de θ .



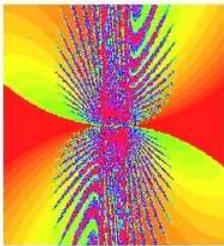
$$\mathcal{J}(g_{0.005}; 30, 10, 100)$$



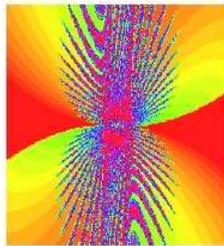
$$\mathcal{J}(g_{0.005}^{-1}; 30, 10, 100)$$



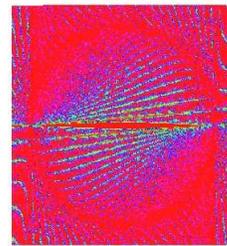
$$\mathcal{J}(g_{0.005}; 30, 1.2, 100)$$



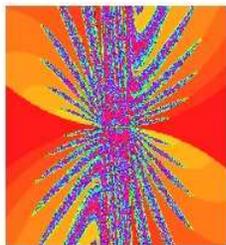
$$\mathcal{J}(g_{0.05}; 30, 10, 100)$$



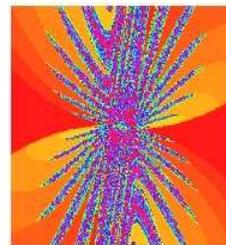
$$\mathcal{J}(g_{0.05}^{-1}; 30, 10, 100)$$



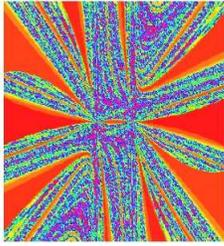
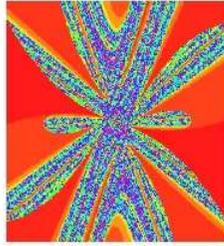
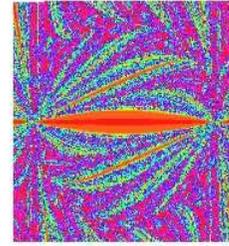
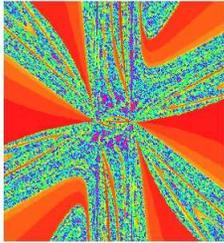
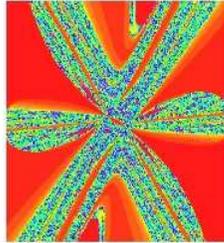
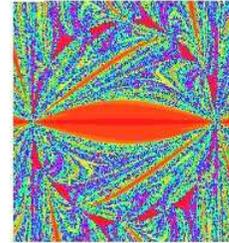
$$\mathcal{J}(g_{0.05}; 30, 1.2, 100)$$



$$\mathcal{J}(g_{0.1}; 30, 10, 100)$$



$$\mathcal{J}(g_{0.1}^{-1}; 30, 10, 100)$$

 $J(g_{0.3}; 30, 10, 100)$  $J(g_{0.3}^{-1}; 30, 10, 100)$  $J(g_{0.3}; 30, 1.2, 100)$  $J(g_{0.5}; 30, 10, 100)$  $J(g_{0.5}^{-1}; 30, 10, 100)$  $J(g_{0.5}; 30, 1.2, 100)$

Les paramètres présentés ne sont pas forcément ceux choisis pour les itérations mais nous avons privilégié l'esthétique.

6.9. Transformations ayant une fibration en cubiques cuspidales invariante

Dans la carte $x_2 = 1$ considérons la famille de transformations birationnelles quadratiques donnée par :

$$\phi_t = \left(\frac{x_1(x_0 + tx_1)}{x_1 + t(-2x_1^2 + x_0^2) + t^2x_0x_1 + \frac{t^3}{3}x_1^2}, \frac{x_1^2}{x_1 + t(-2x_1^2 + x_0^2) + t^2x_0x_1 + \frac{t^3}{3}x_1^2} \right),$$

famille qui laisse invariante la fibration en cubiques cuspidales donnée par :

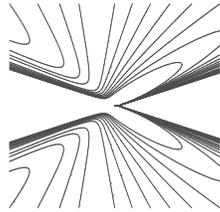
$$-6x_0x_1^2 + x_0^3 - 3x_1^3 = \text{cte } x_1^3.$$

Les ϕ_t préservent aussi la fibration $x_0/x_1 = \text{cte}$; bien entendu $\lambda(\phi_t) = 1$. On note que

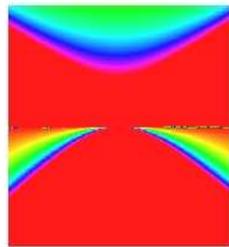
$$\text{Ind } \phi_t^{\pm 1} = \{(0 : 0 : 1)\}, \quad \text{Exc } \phi_t^{\pm 1} = \{x_1 = 0\}$$

et donc pour chaque t la transformation ϕ_t est dans Σ^1 . Cette famille de transformations est en fait un flot quadratique et provient de la classification du Chapitre 2.

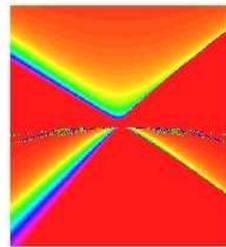
Représentons $-6x_0x_1^2 + x_0^3 - 3x_1^3 = \alpha x_1^3$ avec α entier compris entre -8 et 8 ; la figure est tracée dans le plan réel :



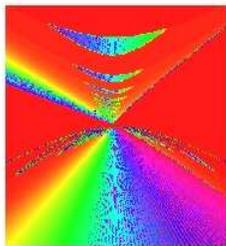
Dessignons quelques \mathcal{J} -ensembles pour différentes valeurs de t , les données de contrôle étant fixes.



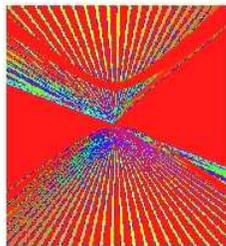
$\mathcal{J}(\phi_{0.001}; 30, 10, 100)$



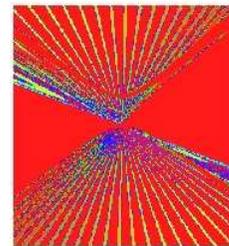
$\mathcal{J}(\phi_{0.01}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.05}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.15}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.2}; 30, 10, 100)$

Les deux dernières figures reflètent la fibration invariante $x_0/x_1 = \text{cte}$.

6.10. Transformations ayant une fibration en cubiques à point double invariante

Dans la carte $x_2 = 1$ considérons la famille de transformations birationnelles quadratiques à un paramètre définie par

$$\phi_t = \left(\frac{(x_0 + tx_1)^2}{x_0^2 t + t^2 x_0 x_1 + x_0 + \frac{t^3 x_1^2}{3}}, \frac{x_1(x_0 + tx_1)}{x_0^2 t + t^2 x_0 x_1 + x_0 + \frac{t^3 x_1^2}{3}} \right).$$

Elle laisse invariante fibre à fibre la fibration en cubiques à point double donnée par :

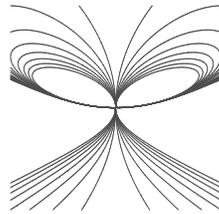
$$x_0^3 - 3x_0x_1 = \text{cte } x_1^3;$$

mais aussi la fibration $x_0/x_1 = \text{cte}$ qui voit ses fibres permutées.

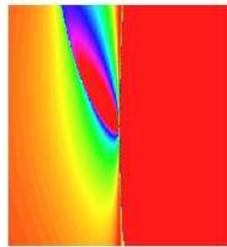
Les transformations ϕ_t sont de premier degré dynamique 1 et appartiennent à Σ^2 :

$$\begin{aligned} \text{Ind } \phi_t &= \{(0 : 0 : 1), (-t : 1 : t^2/3)\}, & \text{Exc } \phi_t &= \{x_0 = 0, x_0 + tx_1 = 0\}, \\ \text{Ind } \phi_t^{-1} &= \{(0 : 0 : 1), (t : 1 : t^2/3)\}, & \text{Exc } \phi_t^{-1} &= \{x_0 = 0, x_0 - tx_1 = 0\}. \end{aligned}$$

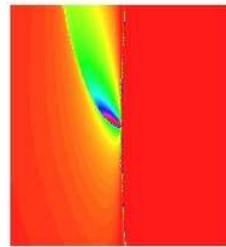
Représentons dans le plan réel $\{x_0^3 - 3x_0x_1 = \alpha x_1^3 \mid \alpha = -8..8\}$:



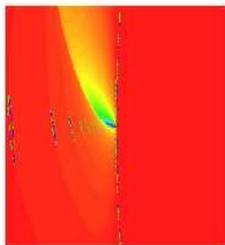
Traçons quelques \mathcal{J} -ensembles pour différentes valeurs de t .



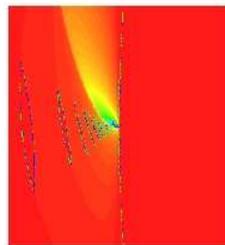
$\mathcal{J}(\phi_{0.01}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.03}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.07}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.08}; 30, 10, 100)$



$\mathcal{J}(\phi_{0.2}; 30, 10, 100)$

6.11. Exemples de BEDFORD et KIM

Dans [6] BEDFORD et KIM considèrent la famille de transformations de CREMONA définie par :

$$g_{a,b} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0(x_1 + bx_0) : x_2(x_1 + bx_0) : x_0(x_2 + ax_0)), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Dans la carte affine $x_0 = 1$ on a

$$g_{a,b}(x_1, x_2) = \left(x_2, \frac{x_2 + a}{x_1 + b} \right).$$

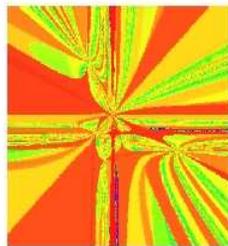
Les points d'indétermination de $g_{a,b}$ sont $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ et $(1 : -b : -a)$ de sorte que pour chaque valeur des paramètres $g_{a,b}$ est dans Σ^3 . Il ne s'agit pour autant pas d'une transformation générique de Σ^3 : d'une part les $g_{a,b}$ sont de carré quadratique, d'autre part ils ne possèdent que deux points fixes (pour $(a-1)^2 + 4b \neq 0$). Les auteurs caractérisent les paramètres (a, b) pour lesquels $g_{a,b}$ est birationnellement conjugué à un automorphisme d'une certaine surface $S_{a,b}$; celle-ci s'obtient en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en un nombre fini de points. Ils en déduisent l'existence de certains automorphismes ayant une dynamique compliquée. Ils étudient aussi le problème des courbes invariantes (qui s'avèrent être des cubiques lorsqu'il y en a) ; nous renvoyons le lecteur à l'article [6] pour plus de précisions.

Nous allons présenter quelques \mathcal{J} -ensembles pour des $g_{a,b}$ à coefficients réels dans des régions qui la plupart du temps contiennent un ou deux points fixes (s'ils sont réels). Pour chaque transformation considérée nous donnons la nature des points fixes. Pour des raisons pratiques nous n'allons pas toujours considérer le polydisque $\Delta(\rho)$ mais

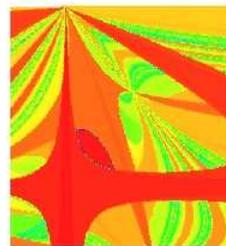
$$\Delta(\rho_1, \rho_2) = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_1 \leq y \leq \rho_2, \rho_1 \leq t \leq \rho_2\};$$

lorsque ceci nous arrivera nous noterons encore $\mathcal{J}(f; r, (\rho_1, \rho_2), M)$ l'ensemble obtenu en reprenant la construction des \mathcal{J} -ensembles. Dans cette série de figures nous observons les \mathcal{J} -ensembles pour les applications $g_{a,b}$ et leurs inverses en faisant varier les données de contrôle. Parfois nous mentionnons aussi les points fixes et le spectre de la différentielle en ces points.

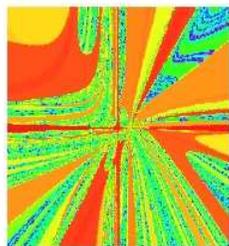
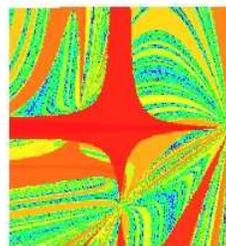
Lorsque $(a, b) = (-1, 0.5)$ les points fixes ne sont pas réels et on a :



$\mathcal{J}(g_{-1,0.5}; 30, 10, 100)$

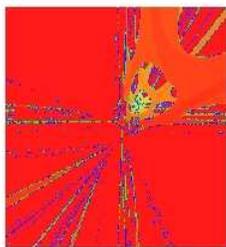
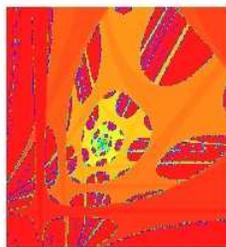


$\mathcal{J}(g_{-1,0.5}; 30, 1, 100)$


 $\mathcal{J}(g_{-1,0.5}^{-1}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{-1,0.5}^{-1}; 30, 1, 100)$

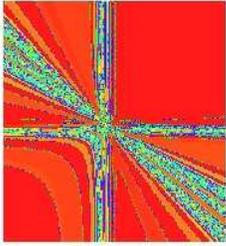
Les points fixes de $g_{1,-0.5}$ ainsi que les valeurs propres de sa différentielle en ces points sont donnés par :

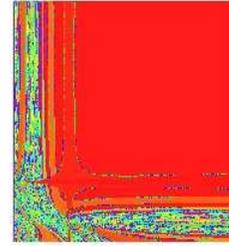
$p_1 = (2, 2)$	$\mu_1 = (0.33\dots + 1.1\dots i, 0.33\dots - 1.1\dots i)$	dilatant
$p_2 = (-0.5, -0.5)$	$\mu_2 = (-0.5 + 0.5i, -0.5 - 0.5i)$	contractant


 $\mathcal{J}(g_{1,-0.5}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,-0.5}; 30, (-0.3, 5), 100)$

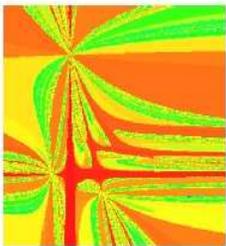
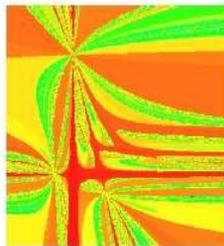
 $\mathcal{J}(g_{1,-0.5}; 30, (-1, 3), 100)$

Les deux points fixes se trouvent dans le carré de contrôle Δ . L'itéré quatrième est une homothétie réelle. Infinitésimalement, à conjugaison locale près, au voisinage de p_2 la transformation $g_{1,-0.5}^4$ préserve le pinceau de droites passant par p_2 . Il se trouve que l'on observe ce pinceau sur la première figure.


 $\mathcal{J}(g_{1,-0.5}^{-1}; 30, 10, 100)$

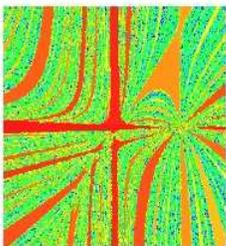
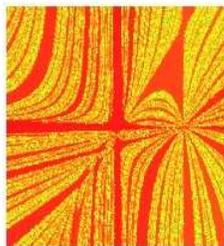
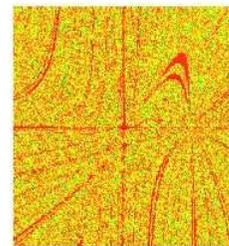
 $\mathcal{J}(g_{1,-0.5}^{-1}; 30, (-0.3, 5), 100)$

 $\mathcal{J}(g_{1,-0.5}^{-1}; 30, (-1, 3), 100)$

Si $(a, b) = (-6, 4)$ les points fixes ne sont pas réels ; on observe les \mathcal{J} -ensembles suivants :


 $\mathcal{J}(g_{-6,4}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,4}; 30, 10, 1000)$

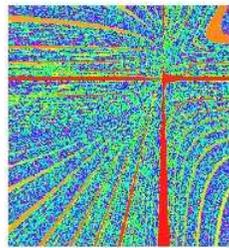
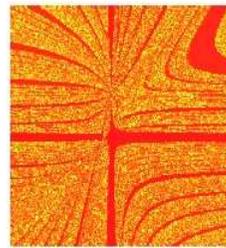
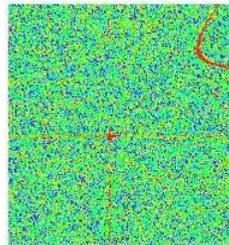
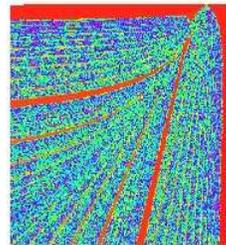
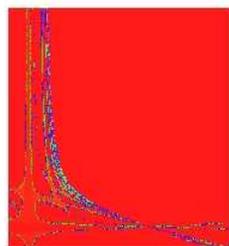
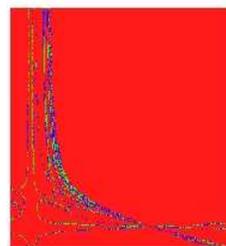
 $\mathcal{J}(g_{-6,4}; 200, 10, 1000)$

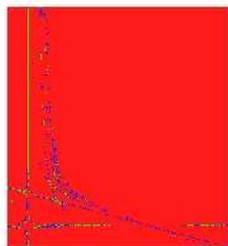
Notons que les première ($\mathcal{J}(g_{-6,4}; 30, 10, 100)$) et deuxième ($\mathcal{J}(g_{-6,4}; 30, 10, 1000)$) figures sont quasi-identiques alors qu'on est passé de 100 à 1000 itérations.


 $\mathcal{J}(g_{-6,4}^{-1}; 30, 10, 100)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,4}^{-1}; 30, 10, 1000)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,4}^{-1}; 200, 10, 1000)$

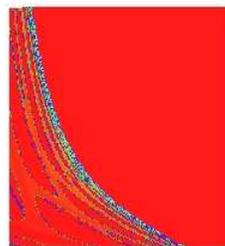
Lorsque $(a, b) = (-6, -4)$, les points fixes de $g_{a,b}$ et le spectre de la différentielle en ces points sont donnés par

$p_1 = (3, 3)$	$\mu_1 = (1.30\dots, -2.30\dots)$	dilatant
$p_2 = (2, 2)$	$\mu_2 = (0.78\dots, -1.28\dots)$	hyperbolique


 $\mathcal{J}(g_{-6,-4}; 30, (-1, 10), 100)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,-4}; 30, (-1, 10), 1000)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,-4}; 200, (-1, 10), 1000)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,-4}; 30, (1, 4), 100)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,-4}^{-1}; 30, (-1, 10), 100)$

 $\mathcal{J}(g_{-6,-4}^{-1}; 30, (-1, 10), 1000)$



$J(g_{-6,-4}^{-1}; 200, (-1, 10), 1000)$



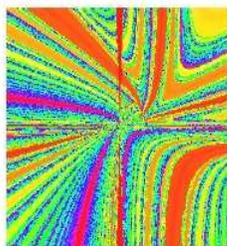
$J(g_{-6,-4}^{-1}; 30, (1, 4), 100)$

Supposons que $a = b = \operatorname{Re}(e^{2i\sqrt{5}})$; la transformation $g_{a,b}$ a un unique point fixe $(1, 1)$ et les valeurs propres en ce point sont données par

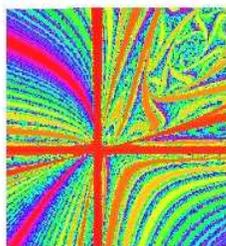
$0.65\dots + 0.93\dots i$

et

$0.65\dots - 0.93\dots i$



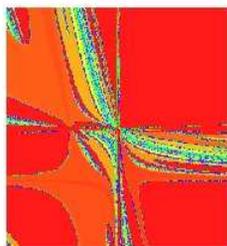
$J(g_{a,b}; 30, 10, 100)$



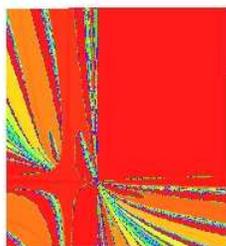
$J(g_{a,b}; 30, (-0.5, 1.3), 100)$



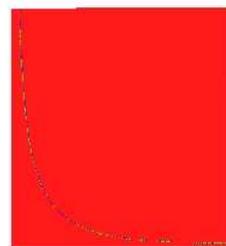
$J(g_{a,b}; 30, (0.25, 2), 100)$



$J(g_{a,b}^{-1}; 30, 10, 100)$



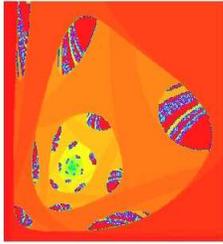
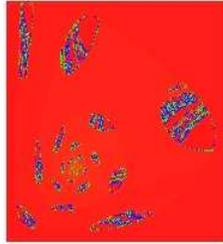
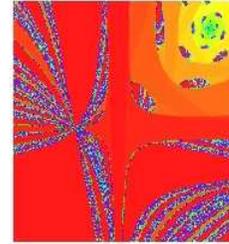
$J(g_{a,b}^{-1}; 30, (-0.5, 1.3), 100)$



$J(g_{a,b}^{-1}; 30, (0.25, 2), 100)$

Les points fixes de $g_{5,-5/6}$ et les valeurs propres en ces points sont

$p_1 = (3.33\dots, 3.33\dots)$	$\mu_1 = (0.2 + 1.1\dots i, 0.2 - 1.1i)$	dilatant
$p_2 = (-1.5, -1.5)$	$\mu_2 = (-0.2\dots + 0.7\dots i, -0.2\dots - 0.7\dots i)$	contractant


 $\mathcal{J}(g_{5,-5/6}; 30, (0.8, 9), 100)$

 $\mathcal{J}(g_{5,-5/6}; 30, (0.8, 9), 1000)$

 $\mathcal{J}(g_{5,-5/6}; 30, (-2, 4), 100)$

Ce type de figure apparaît souvent (pour les $g_{a,-a/N}$ avec N dans \mathbb{N}^*). Le point p_1 est dilatant, le point p_2 est contractant. Seul le dernier dessin montre ces deux points simultanément.

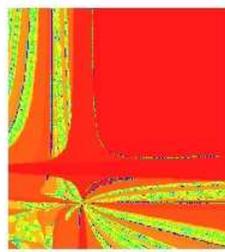
Les ensembles

$$\mathcal{J}(g_{5,-5/6}^{-1}; 30, (0.8, 9), 100)$$

et

$$\mathcal{J}(g_{5,-5/6}^{-1}; 200, (0.8, 9), 1000)$$

produisent des figures uniformément rouges ce qui est normal puisque p_1 est un point contractant pour $g_{5,-5/6}$; par contre on a :


 $\mathcal{J}(g_{5,-5/6}^{-1}; 30, (-2, 4), 100)$