

---

# EXPÉRIENCES SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES

par

Julie Déserti

---

**Abstract.** — We introduce and study a family  $(f_{\alpha,\beta})$  of birational maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , which exhibits interesting and puzzling dynamical phenomena. On the one hand, each element of the family has first dynamical degree 1 (hence topological entropy zero) and preserves a rational fibration. On the other hand its centralizer is generically trivial (it coincides with its iterates). We show that  $f_{\alpha,\beta}^2$  has two linearizable fixed points for generic  $(\alpha, \beta)$ . Near these points, the closure of all orbits are tori or circles. Finally we provide numerical experiments which show that chaos prevails outside these two domains of linearizability.

**Résumé.** — Nous présentons une famille de transformations birationnelles  $(f_{\alpha,\beta})$  au comportement curieux. D'une part chaque élément de la famille est de premier degré dynamique 1 (donc d'entropie topologique nulle) et préserve une fibration rationnelle; d'autre part le centralisateur d'un élément générique est trivial. On montre que, pour  $\alpha, \beta$  génériques,  $f_{\alpha,\beta}^2$  a deux points fixes linéarisables; au voisinage de ces points les adhérences des orbites sont des tores ou deux cercles. Des expériences numériques montrent qu'entre ces deux zones de linéarisation règne un certain chaos.

Le groupe des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  a fait l'objet de nombreux travaux. D'après FRIEDLAND et MILNOR ([10]), si  $f$  est un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$ , alors

- ou bien  $f$  est de type élémentaire, *i.e.*  $f$  est conjugué à un automorphisme qui préserve le feuilletage  $y = \text{cte}$ ;
- ou bien  $f$  est de type HÉNON, *i.e.*  $f$  est conjugué à un élément de la forme  $g_1 \circ \dots \circ g_m$  avec

$$g_i : (x, y) \mapsto (y, P_i(y) - \delta_i x), \quad \delta_i \in \mathbb{C}^*, P_i \in \mathbb{C}[y], \deg P_i \geq 2.$$

Les transformations de HÉNON doivent leur nom à l'astronome français HÉNON qui, en 1976, introduisit la famille d'applications suivantes :

$$g_{a,b} : (x, y) \mapsto (y + 1 - ax^2, bx).$$

Le paramètre  $b$  est le déterminant jacobien de  $g_{a,b}$ . Lorsque  $b$  est non nul, ces transformations sont des difféomorphismes ; quand  $b$  est nul,  $g_{a,b}$  se comporte essentiellement comme  $x \mapsto 1 - ax^2$ . Des expériences numériques ont montré que pour certaines valeurs des paramètres (par exemple  $a = 1, 4$  et  $b = 0, 3$ ) les orbites sous l'action de  $g_{a,b}$  convergent vers un « attracteur étrange » ; c'est la première famille pour laquelle l'existence d'un tel attracteur a été mise en évidence ([3]). Pour certaines valeurs des paramètres on observe des phénomènes différents : un comportement hyperbolique type fer à cheval de SMALE ([8]) ou un comportement non hyperbolique ([14]). L'entropie topologique permet de mesurer les comportements chaotiques ; en dimension 1, pour une fraction rationnelle elle coïncide avec le logarithme du degré. Mais pour les difféomorphismes de  $\mathbb{C}^2$  le degré algébrique, noté  $\deg$ , n'est plus un invariant dynamique ; on introduit donc le degré dynamique défini par

$$d(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} (\deg f^n)^{1/n}.$$

L'entropie topologique est le logarithme du degré dynamique ([1, 17]) ; ce dernier est donc très approprié pour estimer le comportement chaotique d'un difféomorphisme de  $\mathbb{C}^2$ . Si  $f = g_{a,b}$  est un difféomorphisme de HÉNON, le degré algébrique de  $f^n$  est  $2^n$  donc son degré dynamique est 2 ; de plus un difféomorphisme polynomial de degré dynamique 1 est conjugué à un automorphisme affine ou élémentaire ([10]). Une autre façon de mesurer le chaos est d'observer la taille des centralisateurs. Le groupe des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  possède une structure de produit amalgamé ([11]) ; d'après la théorie de BASS-SERRE ce groupe agit donc non trivialement sur un arbre ([15]). En étudiant cette action, LAMY a démontré qu'un automorphisme polynomial est de type HÉNON si et seulement si son centralisateur est dénombrable ([13]). Cette liste de propriétés des automorphismes de HÉNON est loin d'être exhaustive ([18]) ; néanmoins on observe la dichotomie suivante :

- ou bien  $f$  est de type élémentaire alors  $f$  préserve une fibration rationnelle, a un centralisateur non dénombrable et présente une dynamique pauvre (essentiellement affine à conjugaison près) ;
- ou bien  $f$  est de type HÉNON ;  $f$  ne préserve pas de fibration rationnelle, a un centralisateur dénombrable et « admet une dynamique sauvage ».

Les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  s'étendent naturellement en des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ; pour ces dernières on dispose de la même façon de la notion de premier degré dynamique  $\lambda$  et l'idée générale est que l'on dispose d'une dichotomie semblable à la précédente mesurée par le fait que  $\lambda$  soit égal ou non à 1. Toutefois la présence pour une transformation birationnelle « non polynomiale » de courbes contractées et de points éclatés rend difficile une application directe des techniques propres aux automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$ .

Nous présentons ici une famille de transformations birationnelles qui vont à l'encontre de la dichotomie présentée ci-dessus. En effet, nous verrons que ces transformations

préservent une fibration rationnelle, ont un centralisateur dénombrable, réduit à ses itérés (Proposition 1.6), et un premier degré dynamique égal à 1 (Proposition 1.4). Elles présentent deux zones de « linéarisation » dans lesquelles l'adhérence de l'orbite d'un point est un tore (Proposition 1.2), resp. deux cercles (Proposition 1.3); les expériences suggèrent qu'entre ces deux zones règne un certain chaos comme en témoignent les figures qui seront présentées ultérieurement. Dans tous les modèles que nous considérerons nous nous attacherons à exhiber une région de transition entre les deux domaines de linéarisation évoqués précédemment. Ainsi les invariants classiques caractérisant les automorphismes polynomiaux s'avèrent être, dans le cas des transformations birationnelles, de nature incomplète.

### 1. Une famille particulière de transformations

Une transformation birationnelle  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans lui-même est une transformation de la forme

$$f : (x : y : z) \mapsto (P_0(x, y, z) : P_1(x, y, z) : P_2(x, y, z)),$$

les  $P_i$  étant des polynômes homogènes de même degré, dont l'inverse est du même type. Nous notons  $\text{Ind}(f)$  le lieu d'indétermination de  $f$ ; c'est le lieu d'annulation des polynômes  $P_i$ . L'ensemble  $\text{Exc}(f)$  désignera l'ensemble des courbes contractées par  $f$ ; en un certain sens c'est « l'image » par  $f^{-1}$  de  $\text{Ind}(f^{-1})$ . L'involution de CREMONA  $\sigma$  définie par

$$\sigma : (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$$

est une transformation birationnelle et

$$\text{Ind}(\sigma) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}, \quad \text{Exc}(\sigma) = \{x = 0, y = 0, z = 0\}.$$

L'ensemble des transformations birationnelles du plan projectif complexe forme un groupe, appelé groupe de CREMONA. En 1871 NÆTHER énonça le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** — *Le groupe de CREMONA est engendré par  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $\sigma$ .*

Considérons la famille des transformations birationnelles  $f_{\alpha, \beta}$  définie par :

$$f_{\alpha, \beta} : (x : y : z) \mapsto ((\alpha x + y)z : \beta y(x + z) : z(x + z))$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux complexes non nuls; nous étudierons plus spécialement le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement du type  $\exp(i\eta)$  et  $\exp(i\mu)$  avec  $\eta, \mu$  deux réels « génériques ». Cette famille est très simple au sens où sa « décomposition de NÆTHER minimale » ne fait intervenir qu'une seule fois  $\sigma$ , *i.e.*

$$f_{\alpha, \beta} = (x + \alpha z : \beta(y + \alpha z) : z)\sigma(x + z : z : y - \alpha z).$$

Dans la carte affine  $z = 1$ , on constate que

$$f_{\alpha, \beta} = \left( \frac{\alpha x + y}{x + 1}, \beta y \right)$$

ce qui montre que  $f_{\alpha, \beta}$  laisse la fibration  $y = \text{cte}$  invariante.

Suivant le type de problème nous regarderons  $f_{\alpha,\beta}$  comme application birationnelle tantôt de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , tantôt de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

**1.1. Résultats de linéarisation.** — Vue sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  la transformation  $f_{\alpha,\beta}$  compte trois points d'indétermination :

$$\text{Ind}(f_{\alpha,\beta}) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (-1 : \alpha : 1)\};$$

son lieu exceptionnel est formé des trois droites suivantes :

$$\text{Exc}(f_{\alpha,\beta}) = \{(z = -x), (z = 0), (y = \alpha z)\}.$$

Si nous regardons maintenant l'application  $f_{\alpha,\beta}$  sur  $\mathbb{P}_x^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_y^1(\mathbb{C})$  elle contracte les deux droites  $y = \alpha$  et  $y = \infty$  ; ses points d'indétermination sont  $(-1, \alpha)$  et  $(\infty, \infty)$ . Remarquons que les itérés de la droite  $y = \alpha$  sont des courbes contractées par les  $f_{\alpha,\beta}$  ; ainsi lorsque  $\beta = \exp(i\mu)$  est générique, l'adhérence ordinaire  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Exc}(f_{\alpha,\beta}^n)$  contient la variété réelle de dimension 3 donnée par  $|y| = 1$ .

**Proposition 1.2.** — *Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont « génériques », il existe un réel  $\rho$  strictement positif tel que  $f_{\alpha,\beta}$  soit conjugué à  $(\alpha x, \beta y)$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$ , où  $\mathbb{D}(0, \rho)$  désigne un disque de centre 0 et de rayon  $\rho$ .*

**Remarques 1.** — 1. La condition de genericité est celle qui permet d'appliquer le théorème de SIEGEL ([16]) : non résonance pour la linéarisante formelle et conditions diophantiennes pour la linéarisante holomorphe.

2. Lorsque  $\beta$  est de module 1, le domaine  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$  est invariant par  $f_{\alpha,\beta}$ . Sur ce domaine et sous les hypothèses de la Proposition 1.2 la dynamique est globalement linéaire. En particulier si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de module 1 et génériques, les adhérences des orbites de  $f_{\alpha,\beta}$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$  sont des tores de dimension 2.

*Démonstration.* — Dans la carte affine  $z = 1$ , la transformation  $f_{\alpha,\beta}$  s'écrit  $\left(\frac{\alpha x + y}{x + 1}, \beta y\right)$  ; elle compte deux points fixes  $(0, 0)$  et  $(\alpha - 1, 0)$ .

Plaçons nous au voisinage de l'origine. La partie linéaire  $\ell$  de  $f_{\alpha,\beta}$  est  $(\alpha x + y, \beta y)$  ; à conjugaison près par  $(x + \frac{y}{\beta - \alpha}, y)$ , l'application  $\ell$  s'écrit  $(\alpha x, \beta y)$ . Ainsi  $f_{\alpha,\beta}$  est holomorphiquement linéarisable sur un voisinage  $U$  de l'origine ([16]).

Cherchons la conjugante sous la forme  $\left(\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + 1}, y\right)$  ; nous obtenons les trois égalités suivantes :

$$\alpha^2 a(y)c(\beta y) + \alpha a(y) - \alpha c(y)a(\beta y) - c(y)b(\beta y) = 0$$

$$\alpha a(y)c(\beta y)y + \alpha a(y) + \alpha^2 b(y)c(\beta y) + \alpha b(y) - c(y)a(\beta y)y - c(y)b(\beta y) - \alpha a(\beta y) - b(\beta y) = 0$$

$$\alpha b(y)c(\beta y)y + \alpha b(y) - a(\beta y)y - b(\beta y) = 0.$$

Écrivons  $a(y)$  (resp.  $b(y)$ , resp.  $c(y)$ ) sous la forme  $\sum_{i \geq 0} a_i y^i$  (resp.  $\sum_{i \geq 0} b_i y^i$ , resp.  $\sum_{i \geq 0} c_i y^i$ ). Notons que nous pouvons poser

$$a_0 := 1, \quad b_0 := 0 \quad \text{et} \quad c_0 := \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Supposons que nous ayons calculé  $a_0, b_0, c_0, \dots, a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$  et  $c_{\nu-1}$ . Les trois égalités précédentes conduisent à :

$$\begin{aligned} b_\nu(\alpha - \beta^\nu) + F_1(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) &= 0 \\ \alpha(1 - \beta^\nu)a_\nu + \frac{\alpha^2 - 2\beta^\nu + \alpha\beta^\nu}{1 - \alpha}b_\nu + F_2(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) &= 0 \\ \alpha \frac{2 - \alpha - \beta^\nu}{1 - \alpha}a_\nu - \frac{\beta^\nu}{1 - \alpha}b_\nu + \alpha(\beta^\nu - 1)c_\nu + F_3(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) &= 0 \end{aligned}$$

où les  $F_i$  désignent des polynômes universels du second degré en les  $a_i, b_i, c_i$ , à coefficients entiers, faisant intervenir certains  $a_i, b_i, c_i$  avec  $i < \nu$  ce qui permet de calculer  $b_\nu, a_\nu$  et  $c_\nu$ ; nous obtenons ainsi une conjugaison formelle. Le théorème de SIEGEL ([16]) assure que toute linéarisante est convergente sur un polydisque; ceci implique que  $a(y), b(y)$  et  $c(y)$  sont convergentes. À  $y$  fixé,  $\frac{a(y)x+b(y)}{c(y)x+1}$  est une homographie en  $x$  donc  $f_{\alpha,\beta}$  est conjuguée à  $(\alpha x, \beta y)$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$  où  $\rho$  désigne un réel strictement positif.  $\square$

Pour ce qui suit, il est préférable de se placer sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Notons que le point  $(0 : 1 : 0)$  est éclaté par  $f_{\alpha,\beta}$  sur la droite d'équation  $z = 0$  et que cette droite est contractée sur ce même point : l'application n'est pas algébriquement stable au sens de [9]; c'est pour éviter ce phénomène que nous étudions  $f_{\alpha,\beta}^2$  qui est encore quadratique (notons que pour une transformation birationnelle quadratique générique  $f$  on a  $\deg f^2 = 4$ ). La transformation  $f_{\alpha,\beta}^2$  s'écrit :

$$(x(\alpha^2 z + \beta y) + (\alpha + \beta)yz : \beta^2 y(z + (1 + \alpha)x + y) : z(z + (1 + \alpha)x + y)).$$

Nous avons

$$\text{Ind}(f_{\alpha,\beta}^2) = \{(1 : 0 : 0), (-1 : \alpha : 1), (-\alpha - \beta) : \alpha(1 + \alpha) : \beta(1 + \alpha)\}$$

et

$$\text{Exc}(f_{\alpha,\beta}^2) = \{(z = -y - (1 + \alpha)x), (y = \alpha z/\beta), (y = \alpha z)\}.$$

**Proposition 1.3.** — *Si  $\beta$  est du type  $\exp(2i\mu)$  avec  $\mu$  un réel « générique », il existe  $V$  un voisinage de  $(0 : 1 : 0)$  tel que la dynamique de  $f_{\alpha,\beta}^2$  soit localement linéaire dans  $V$ ; l'adhérence de l'orbite d'un point générique de  $V$  est un cercle.*

*Démonstration.* — Dans la carte affine  $y = 1$ , la transformation  $f_{\alpha,\beta}^2$  est de la forme :

$$\left( \frac{x(\alpha^2 z + \beta) + (\alpha + \beta)z}{\beta^2(z + (1 + \alpha)x + 1)}, \frac{z}{\beta^2} \right).$$

L'origine est un point fixe où la partie linéaire  $\ell$  de  $f_{\alpha,\beta}^2$  s'écrit  $\left( \frac{\beta x + (\alpha + \beta)z}{\beta^2}, \frac{z}{\beta^2} \right)$ . Puisque  $\beta \neq 1$ , l'application  $\ell$  est diagonalisable :

$$\ell \sim (x/\beta, z/\beta^2);$$

autrement dit  $f_{\alpha,\beta}$  est conjugué à  $(x/\beta + p(x, z), z/\beta^2 + q(x, z))$  où  $p$  et  $q$  sont deux applications holomorphes sans partie linéaire. Posons  $\eta_1 := 1/\beta$  et  $\eta_2 := 1/\beta^2$ ; comme  $\eta_2 = \eta_1^2$ , une variante (résonante) du théorème de SIEGEL assure que  $f_{\alpha,\beta}$  est conjugué

à  $(x/\beta, z/\beta^2 + \gamma x^2)$ . Mais comme la droite d'équation  $z = 0$  est invariante par  $f_{\alpha,\beta}$ , le coefficient  $\gamma$  est nécessairement nul et la transformation  $f_{\alpha,\beta}^2$  est linéarisable. Ainsi dans la carte affine  $y = 1$ , l'adhérence de l'orbite d'un point au voisinage de l'origine est un cercle.  $\square$

*Remarque.* — Nous pouvons voir l'application

$$\left( \frac{x(\alpha^2 z + \beta) + (\alpha + \beta)z}{\beta^2(z + (1 + \alpha)x + 1)}, \frac{z}{\beta^2} \right)$$

sur  $\mathbb{P}_x^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_z^1(\mathbb{C})$  ; il est alors possible de préciser le domaine  $V$  comme dans l'énoncé 1.2 : la conjugaison est holomorphe sur un produit  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$ .

**1.2. Quelques orbites.** — Soit  $g$  une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ; si on se place dans la carte affine  $z = 1$  on dispose de deux projections l'une sur la première composante, l'autre sur la seconde que l'on notera respectivement  $p_1$  et  $p_2$ . Lorsque  $|\beta| = 1$ , les transformations  $f_{\alpha,\beta}$  laissent invariantes les 3-variétés  $|y| = \text{cte}$  dans la carte affine  $(x, y)$  ; les orbites présentées sont bornées en particulier dans un  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . La dynamique se passant essentiellement en dimension 3, ceci rend plausible les projections. Nous allons considérer les ensembles suivants :

– d'une part

$$\Omega_1(m, f_{\alpha,\beta}) = \{(\text{Re } p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m)), \text{Im } p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m)), \text{Im } p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m))) \mid n = 1..30000\}$$

qui est le produit de  $\mathbb{R}^2$  par un intervalle, l'orbite est « comprimée » par le revêtement double  $e^{i\theta} \mapsto \sin \theta$  ;

– d'autre part

$$\Omega_2((x, y), f_{\alpha,\beta}) = \{(\text{Re } p_1(f_{\alpha,\beta}^n(m)), \text{Re } p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m)), \text{Im } p_2(f_{\alpha,\beta}^n(m))) \mid n = 1..30000\}$$

qui est un cylindre  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  contenu dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , cette projection montre comment « décompresser » la première pour avoir l'allure de l'orbite ;

qui sont des projections d'une partie de l'orbite du point  $m$  sous l'action de  $f_{\alpha,\beta}$ . Dans les figures les dessins de gauche correspondent à  $\Omega_1$ , ceux de droite à  $\Omega_2$ . Notons que les points de croisement ou les points cuspidaux que nous pouvons observer sont des artefacts de la projection. Pour bien comprendre ce que représentent  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  nous allons considérer l'application  $(x, y) \mapsto (\beta x, \beta^2 y)$ , avec  $\beta$  de module 1 générique, dont nous traçons une orbite :



1.2.1. Comportement de  $f_{\alpha,\beta}$  au voisinage de l'axe  $y = 0$ . —



$$\Omega_k((10^{-4}i, 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((0.1 + 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Ces deux dessins sont « conformes » à la Proposition 1.2 : l'adhérence de cette orbite est un tore réel de dimension 2.



$$\Omega_k((0.2 + 10^{-4}i, 0.2 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((-0.25 - 0.5i, 0.1i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((0.3 + 10^{-4}i, 0.3 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Nous sommes encore dans le domaine de linéarisation évoqué dans la Proposition 1.2. Les tores persistent mais commencent à se déformer. Si on change les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  on observe de nouveau des dessins en accord avec la Proposition 1.2.

1.2.2. *Comportement de  $f_{\alpha, \beta}$  « près » de  $(0 : 1 : 0)$ .* — Comme annoncé dans la Proposition 1.3 l'adhérence de l'orbite d'un point « près » de  $(0 : 1 : 0)$  sous l'action de  $f_{\alpha, \beta}^2$  est un cercle.



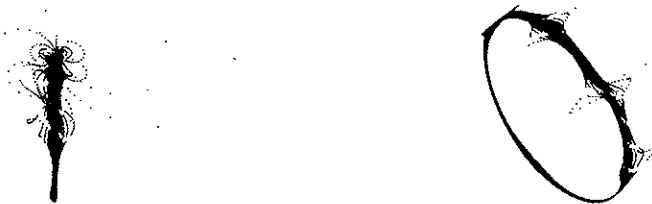
$$\Omega_k((10 + 10^{-4}i, 10 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}^2), k = 1, 2$$

Les expériences confirment donc la théorie; les adhérences d'orbites au voisinage de  $(0 : 1 : 0)$  sous l'action de  $f_{\alpha, \beta}$  sont constituées de deux cercles :



$$\Omega_k((10000 + 10^{-4}i, 10000 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

1.2.3. « Chaos » ? —





$$\Omega_k((0.4 + 10^{-4}i, 0.4 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Bien que l'orbite s'organise autour d'un « cercle », elle ne semble pas d'adhérence un tore. Rappelons que  $(-1 : \alpha : 1)$  est un point d'indétermination de  $f_{\alpha, \beta}$ ; ainsi lorsque  $|y| = |y_k|$  est très proche de 1 nous pouvons penser qu'il règne un certain chaos toutefois arrangé autour d'un « cercle ». Les figures qui suivent semblent conforter cette hypothèse.



$$\Omega_k((1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((1.08 + 10^{-4}i, 1.08 + 10^{-4}i), f_{\exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

La première projection de l'orbite du point  $(1 + 10^{-4}i, 1 + 10^{-4}i)$  semble être composée d'un reliquat de la première projection de l'orbite du point  $(0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i)$  auquel s'ajoutent deux cercles (approche du domaine de linéarisation du point  $(0 : 1 : 0)$ ).

**1.3. Premier degré dynamique ([9]).** — Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne  $S$  dans elle-même. À  $S$  on peut associer son groupe  $H^{(p,q)}(S, \mathbb{R})$  de cohomologie de DOLBEAULT. Notons  $\Gamma(f)$  le graphe de  $f$  et  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) la première (resp. seconde) projection de  $\Gamma(f)$  sur  $S$ . Si  $\{\omega\}$  est la classe de cohomologie de DOLBEAULT d'une certaine forme lisse  $\omega$ , on pose  $f^*\{\omega\} := \{\pi_{1*}\pi_2^*\omega\}$ .

Ceci définit une application linéaire  $f^*$  de  $H^{(p,q)}(S, \mathbb{R})$  dans lui-même. Le premier degré dynamique de  $f$  est défini par :

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)^*\|^{1/n}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne une norme sur  $\text{End}(H^{(1,1)}(S, \mathbb{R}))$ . Ce nombre est minoré par 1 et invariant par conjugaison birationnelle ([9]). Lorsque  $S = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , on a  $\lambda(f)^n \leq \deg f^n$  où  $\deg f$  désigne le degré algébrique de  $f$ , i.e. le degré des polynômes homogènes définissant  $f$ .

**Lemme 1.4.** — *Le premier degré dynamique de  $f_{\alpha,\beta}$  vaut 1.*

*Démonstration.* — On montre par induction que  $\deg f_{\alpha,\beta}^n \sim \frac{n}{2}$ ; les inégalités  $1 \leq \lambda(f_{\alpha,\beta})^n$  et  $\lambda(f_{\alpha,\beta})^n \leq \deg f_{\alpha,\beta}^n$  permettent de conclure.  $\square$

Signalons le résultat suivant qui décrit les transformations birationnelles de premier degré dynamique 1 :

**Théorème 1.5** ([9]). — *Soit  $f$  une transformation biméromorphe d'une surface de KÄHLER dans elle-même dont le premier degré dynamique vaut 1. Alors, à conjugaison biméromorphe près, nous sommes dans l'une des situations suivantes :*

- la suite  $(\|(f^n)^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et  $f^n$  est un automorphisme isotope à l'identité pour un certain  $n$  ;
- la suite  $(\|(f^n)^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  croît linéairement et  $f$  préserve une fibration rationnelle ; dans ce cas  $f$  ne peut être conjugué à un automorphisme ;
- la suite  $(\|(f^n)^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  croît quadratiquement et  $f$  est un automorphisme préservant une fibration elliptique.

*Dans les deux derniers cas, les fibrations invariantes sont uniques.*

**Remarque.** — Les spécialistes utilisent usuellement le concept d'exposant de LYAPUNOV pour s'assurer qu'une transformation présente une dynamique chaotique ou non ([2, 12]). Lorsque ces exposants sont nuls il est classiquement admis que la transformation ne présente pas de dynamique intéressante. Nous avons fait divers calculs d'exposants de LYAPUNOV pour des paramètres différents qui conduisent tous à des exposants nuls ou quasi-nuls malgré la dynamique apparemment compliquée que suggère les figures. Il semble donc que dans le cadre birationnel les coefficients de LYAPUNOV soient insuffisants pour statuer sur la complexité de la dynamique.

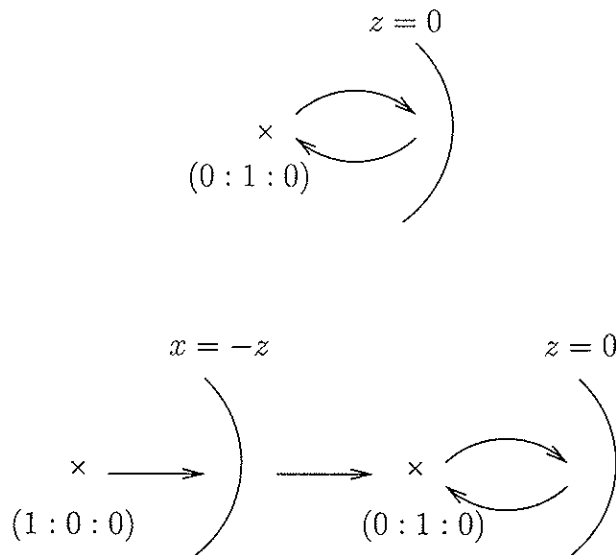
**1.4. Centralisateur.** — Une façon de mesurer le chaos (algébrique) est d'observer la « taille » des centralisateurs. Donnons deux exemples. Les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  qui admettent de la dynamique sont les automorphismes de HÉNON qui, contrairement aux élémentaires, ont un centralisateur dénombrable ([13, 4]). En ce qui concerne les transformations rationnelles de la sphère, nous constatons que si le centralisateur d'une transformation  $f$  n'est pas essentiellement réduit à  $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , alors l'ensemble de JULIA de  $f$  est « spécial » (monômes, polynômes de TCHEBYCHEV, exemples de LATTES...)

Introduisons le groupe  $J$  de JONQUIÈRES; c'est, à conjugaison birationnelle près, le groupe maximal des transformations birationnelles qui préservent la fibration  $y = cte$ . Évidemment  $f_{\alpha,\beta}$  appartient à  $J$ .

Dans [5] CANTAT montre que si  $f$  désigne une transformation birationnelle de premier degré dynamique  $\lambda(f) > 1$ , alors pour tout élément  $g$  qui commute à  $f$  il existe  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $f^n = g^m$ . En utilisant certains de ses arguments on obtient le :

**Théorème 1.6.** — Soit  $g$  une transformation birationnelle qui commute à  $f_{\alpha,\beta}$ ; alors  $g$  est une puissance de  $f_{\alpha,\beta}$ .

*Démonstration.* — Posons  $p := (-1 : \alpha : 1)$ . L'image de  $p$  par  $f_{\alpha,\beta}$  est la fibre  $y = \alpha\beta$ . Soit  $g$  un élément du groupe de CREMONA qui commute à  $f_{\alpha,\beta}$ . Puisque  $\text{Exc}(g)$  est fini il existe un entier  $k$  positif (que l'on choisit minimal) tel que  $f_{\alpha,\beta}^k(p)$  ne soit pas une branche de  $\text{Exc}(g)$ . Quitte à remplacer  $g$  par  $\tilde{g} := g f_{\alpha,\beta}^{k-1}$  on a :  $\tilde{g}(p) \in \text{Ind}(f_{\alpha,\beta})$ . Autrement dit  $\tilde{g}$  permute les points d'indétermination de  $f_{\alpha,\beta}$ . Observons les orbites des deux autres points d'indétermination de  $f_{\alpha,\beta}$  : le point  $(0 : 1 : 0)$  est éclaté sur la droite  $z = 0$ , cette droite est contractée sur  $(0 : 1 : 0)$  et le point  $(1 : 0 : 0)$  est éclaté sur la droite  $x = -z$  qui est contractée sur le point  $(0 : 1 : 0)$  :



Les orbites des deux autres points d'indétermination de  $f_{\alpha,\beta}$  ne peuvent donc pas être permutées avec celle de  $p$ ; on en déduit que  $p$  est un point fixe de  $\tilde{g}$ . Les paramètres  $\alpha, \beta$  étant génériques l'adhérence de l'orbite négative de  $p$  par  $f_{\alpha,\beta}$  est ZARISKI dense. Il en résulte que  $\tilde{g}$  coïncide avec l'identité; dit autrement il existe  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $g = f_{\alpha,\beta}^n$ .  $\square$

## 2. Première variante

**2.1. Un résultat de linéarisation.** — Considérons la sous-famille de  $f_{\alpha,\beta}$  définie par :

$$\begin{aligned} f_{1,\beta}: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) &\dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ (x : y : z) &\mapsto ((x+y)z : \beta y(x+z) : z(x+z)) \end{aligned}$$

qui correspond donc au cas où  $\alpha$  vaut 1.

*Remarque.* — Comme nous l'avons vu, indépendamment de  $\alpha$  il existe un voisinage de  $(0 : 1 : 0)$  sur lequel  $f_{1,\beta}^2$  est linéarisable et l'adhérence de l'orbite d'un point est un cercle (Proposition 1.3).

Dans la carte affine  $z = 1$ , la transformation  $f_{1,\beta}$  s'écrit  $(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{x+1}, \beta y\right)$ .

**Proposition 2.1.** — Pour  $\beta$  générique, il existe un réel  $\rho > 0$  tel que  $\left(\frac{x+y}{x+1}, \beta y\right)$  soit analytiquement conjugué à  $\left(\frac{x}{1+x}, \beta y\right)$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{D}(0, \rho)$ , où  $\mathbb{D}(0, \rho)$  désigne un disque centré en 0 et de rayon  $\rho$ .

*Démonstration.* — Elle est plus ou moins analogue à celle de la Proposition 1.2. Cherchons la conjuguante sous la forme  $\left(\frac{x+a(y)}{b(y)x+c(y)}, y\right)$  ; nous obtenons les trois égalités suivantes :

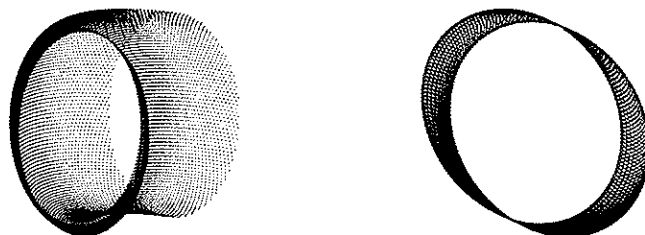
$$\begin{aligned} c(\beta y)a(y) + c(\beta y)c(y)y - a(\beta y)a(y) - a(\beta y)c(y) &= 0 \\ c(\beta y) + c(\beta y)b(y)y - a(\beta y) - a(\beta y)b(y) - a(y) - c(y) + b(\beta y)c(y)y - b(\beta y)a(y) &= 0 \\ 1 + b(y) - b(\beta y) - b(y)b(\beta y)y - a(y) - c(y) + b(\beta y)c(y)y + b(\beta y)a(y) &= 0. \end{aligned}$$

Écrivons  $a(y)$  (resp.  $b(y)$ , resp.  $c(y)$ ) sous la forme  $\sum_{i \geq 0} a_i y^i$  (resp.  $\sum_{i \geq 0} b_i y^i$ , resp.  $\sum_{i \geq 0} c_i y^i$ ). Notons que nous pouvons poser  $c_0 = 1$  et  $a_0 = b_0 = 0$ . Supposons que nous ayons calculé  $a_0, b_0, c_0, \dots, a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$  et  $c_{\nu-1}$ . Les trois égalités précédentes conduisent à :

$$\begin{aligned} a_\nu(1 - \beta^\nu) + F_1(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) &= 0 \\ c_\nu(1 - \beta^\nu) - a_\nu(1 + \beta^\nu) + F_2(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) &= 0 \\ b_\nu(1 - \beta^\nu) - a_\nu - c_\nu + F_3(a_i, b_i, c_i, \beta, i < \nu) &= 0 \end{aligned}$$

où les  $F_i$  désignent des polynômes universels du second degré en les  $a_i, b_i, c_i$ , à coefficients entiers, faisant intervenir certains  $a_i, b_i, c_i$  avec  $i < \nu$ . Nous pouvons donc déterminer  $a_\nu, c_\nu$  et  $b_\nu$  et l'algorithme de SIEGEL ([16]) assure que  $a(y), b(y)$  et  $c(y)$  sont convergentes. Puisqu'à  $y$  fixé,  $\frac{x+a(y)}{b(y)x+c(y)}$  est une homographie en  $x$  nous avons le résultat annoncé.  $\square$

**2.2. Quelques orbites.** — Nous présentons quelques simulations dans le contexte de la Proposition 2.1.

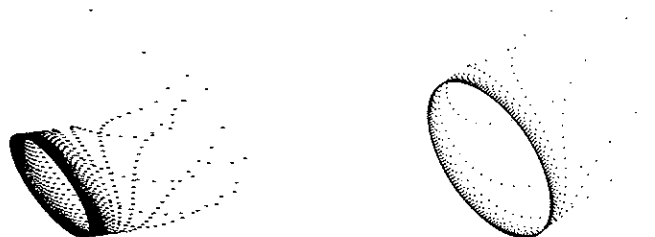


$$\Omega_k((10^{-4}i, 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

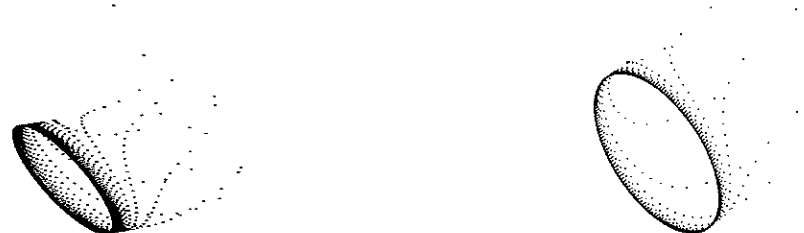


$$\Omega_k((0.1 + 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Sur le second dessin nous voyons clairement les orbites s'accumuler sur un « cercle » ; il en est de même pour le premier mais les itérés sont « plus denses ». Ces deux dessins sont conformes à l'énoncé 2.1 ; à cet effet considérons les orbites sous l'action du modèle  $\left(\frac{x}{1+x}, \beta y\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) f_{1, \beta}(x, \varepsilon y)$  dont on remarque qu'il est linéaire dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  :



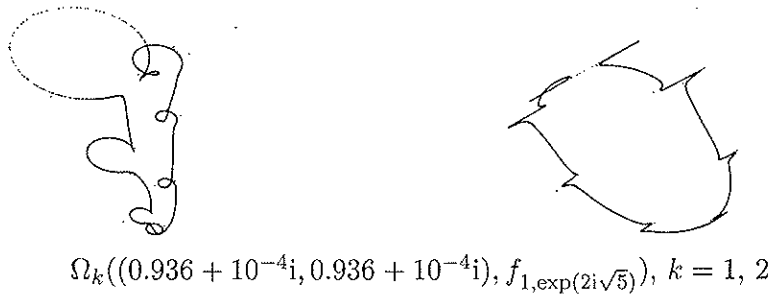
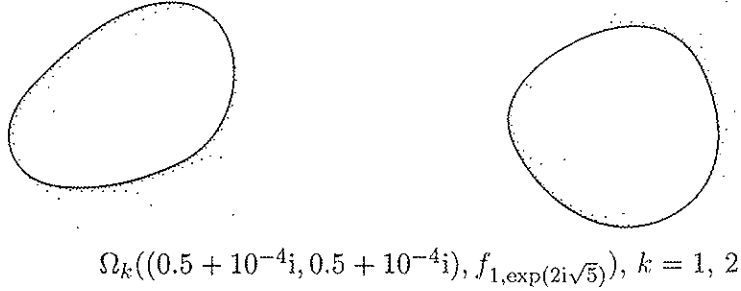
$$\Omega_k((0.1 + \times 10^{-4}i, 0.1 + 10^{-4}i), \left(\frac{x}{1+x}, \beta y\right)), k = 1, 2$$



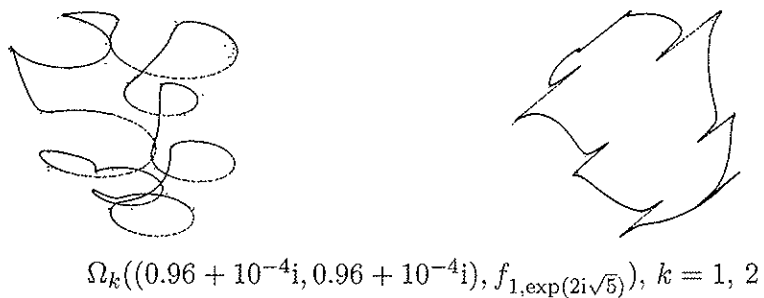
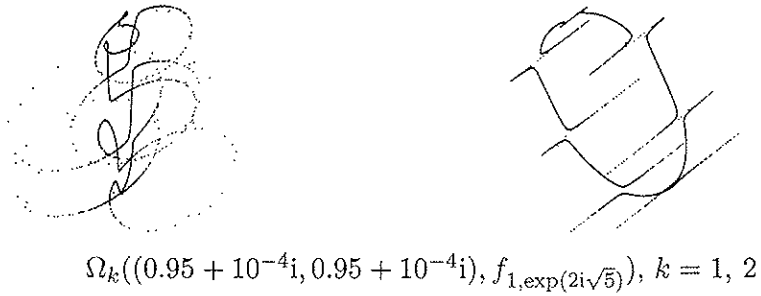
$$\Omega_k((0.15 + \times 10^{-4}i, 0.15 + 10^{-4}i), \left(\frac{x}{1+x}, \beta y\right)), k = 1, 2$$

On observe ainsi une certaine similarité entre les modèles linéaires et non linéaires.

Revenons aux orbites sous l'action de  $f_{1,\exp(2i\sqrt{5})}$  en nous éloignant de la zone de linéarisation.



Le premier dessin est prédit par l'énoncé 2.1 ; ensuite nous observons encore un « cercle limite » qui se déforme.

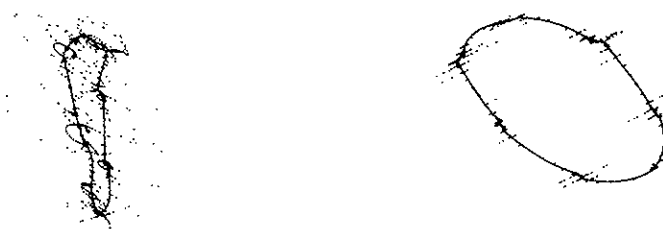


Est-ce la proximité du point d'indétermination qui explique la nature de ces figures ?



$$\Omega_k((0.98 + 10^{-4}i, 0.98 + 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Si cette figure est bien un cercle limite, que penser des suivantes ?



$$\Omega_k((1.03 + 10^{-4}i, 1.03 + 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((1.07 + 10^{-4}i, 1.07 + 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((1.1 + 10^{-4}i, 1.1 + 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

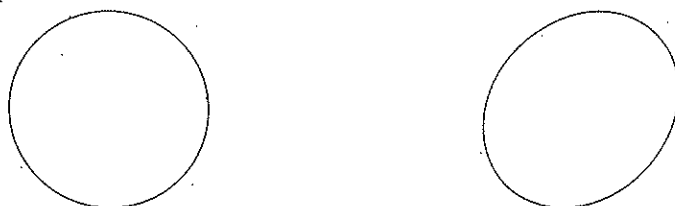


$$\Omega_k((10 + 10^{-4}i, 10 + 10^{-4}i), f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}^2), k = 1, 2$$

Comme prévu on constate que l'orbite du point considéré est un « cercle », celle du même point sous  $f_{1, \exp(2i\sqrt{5})}$  est constituée de deux « cercles ».

### 3. Seconde variante

**3.1. Quelques orbites.** — Dans cette partie, nous traçons l'orbite de quelques points sous l'action de  $f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}$ ; alors que  $\beta$  est toujours de module 1, le paramètre  $\alpha$  ne l'est plus.



$$\Omega_k((10^{-4}i, 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((0.5 + 10^{-4}i, 0.5 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Ces dessins sont prédits par le théorème de SIEGEL; d'après cet énoncé, près de l'origine,  $f_{\alpha, \beta}$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  génériques (on peut penser que  $0.5 \exp(2i\sqrt{7})$  et  $\exp(2i\sqrt{5})$  le sont), est conjuguée à la transformation linéaire  $(\alpha x, \beta y)$ . Comme  $|\alpha| < 1$ , les itérés positifs d'un point  $(x_0, y_0)$  proche de  $(0, 0)$  par  $(\alpha x, \beta y)$  s'accroissent sur le cercle  $\{(0, y) \mid |y| = 1\}$ ; nous retrouvons donc ce phénomène pour notre application. Puisque  $|\alpha| = \frac{1}{2}$ , l'approximation est très rapide ce qui explique que nous ne voyons qu'un très petit nombre de points « en dehors » du cercle.





$$\Omega_k((0.7 + 10^{-4}i, 0.7 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



$$\Omega_k((0.9 + 10^{-4}i, 0.9 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Nous observons la déformation des cercles limites pour aboutir à des orbites plus chaotiques dans les figures suivantes.

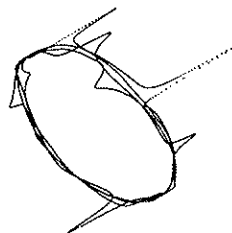
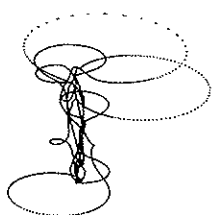


$$\Omega_k((0.98 + 10^{-4}i, 0.98 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$



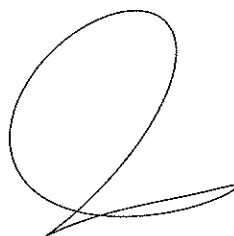
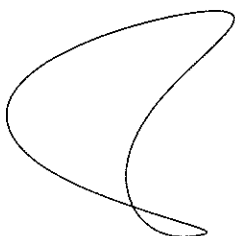
$$\Omega_k((1.05 + 10^{-4}i, 1.05 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Peut-on encore parler de cercles limites ?



$$\Omega_k((1.15 + 10^{-4}i, 1.15 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}), k = 1, 2$$

Sans doute les figures ci-dessus approchent la zone où les adhérences d'orbites sont une paire de cercles.



$$\Omega_k((10 + 10^{-4}i, 10 + 10^{-4}i), f_{0.5 \exp(2i\sqrt{7}), \exp(2i\sqrt{5})}^2), k = 1, 2$$

Ces deux dessins sont conformes à l'énoncé 1.3 : « près du point  $(0 : 1 : 0)$  » les adhérences d'orbites pour  $f_{\alpha, \beta}^2$  sont des cercles ; celles de  $f_{\alpha, \beta}$  sont donc des couples de cercles. Comme toujours les points de croisement ou points cuspidaux sont des artéfacts de projection.

**Conclusion.** — Il est communément admis par les dynamiciens que les transformations birationnelles de premier degré dynamique 1 ne présentent pas d'intérêt. Les expériences précédentes semblent prouver le contraire ; il serait intéressant d'obtenir une explication théorique de ces phénomènes.

**Remerciements.** — Je remercie Dominique CERVEAU pour les innombrables et précieuses discussions que nous avons eues. Merci aux rapporteurs, à Serge CANTAT et à Charles FAVRE pour leurs remarques et suggestions.

### Références

- [1] E. BEDFORD & J. SMILLIE. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann.*, 294(3) : 395–420, 1992.

- [2] M. BRIN & G. STUCK. Introduction to dynamical systems. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002.
- [3] M. BENEDICKS & L. CARLESON. The dynamics of the HÉNON map. *Ann. of Math. (2)*, 133(1) : 73–169, 1991.
- [4] C. BISI. On commuting polynomial automorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . *Publ. Mat.*, 48(1) :227–239, 2004.
- [5] S. CANTAT. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *preprint*, 2006.
- [6] J. DÉSERTEI. Sur les automorphismes du groupe de CREMONA. *Compos. Math.*, 142(6) :1459–1478, 2006.
- [7] J. DÉSERTEI. Thèse. *Université de Rennes 1*, 2006.
- [8] R. DEVANEY & Z. NITECKI. Shift automorphisms in the HÉNON mapping. *Comm. Math. Phys.*, 67(2) : 137–146, 1979.
- [9] J. DILLER & C. FAVRE. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [10] S. FRIEDLAND & J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.
- [11] H. W. E. JUNG. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.* 184 :161–174, 1942.
- [12] A. KATOK & B. HASSELBLATT. Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by KATOK and MENDOZA. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xviii+802 pp.
- [13] S. LAMY. L’alternative de TITS pour  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.
- [14] S. NEWHOUSE. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50 : 101–151, 1979.
- [15] J.-P. SERRE. *Arbres, amalgames,  $\text{SL}_2$* . Société mathématique de France, Paris, 1977. Rédigé avec la collaboration de Hyman BASS, Astérisque, No. 46.
- [16] C. L. SIEGEL. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 43 :607–612, 1942.
- [17] J. SMILLIE. The entropy of polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(4) :823–827, 1990.
- [18] J. SMILLIE. Dynamics in two complex dimensions. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, 373–382, 2002.

