SUR LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DU PLAN AFFINE.

par

Julie Déserti

Astract. Let $\mathbf{k}$ be an uncountable field of characteristic 0. We prove that an automorphism of the group of polynomial automorphisms of $\mathbf{k}^2$ is the composition of an interior automorphism and an automorphism of the field $\mathbf{k}$.

1. Introduction

De nombreux auteurs se sont intéressés aux propriétés algébriques des groupes des difféomorphismes des variétés. Parmi les énoncés frappants citons le théorème de Filipkiewicz (*voir* [**8**]). Si M est une variété de classe $\mathscr{C}^k$ on notera $\mathsf{Diff}^k(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe $\mathscr{C}^k$ sur M.

Théorème 1.1 **([8])**. — *Soient M, N deux variétés réelles connexes respectivement de classe $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^j$ et $\varphi : \mathsf{Diff}^k(M) \to \mathsf{Diff}^j(N)$ un isomorphisme de groupes. Alors $k = j$ et il existe un difféomorphisme ψ de M dans N de classe $\mathscr{C}^k$ tel que*

$$\forall\, f \in \mathsf{Diff}^k(M) \qquad \varphi(f) = \psi f \psi^{-1}.$$

Ce résultat possède des variantes pour le groupe des difféomorphismes des variétés qui préservent une forme volume, une forme de contact ou une forme symplectique (*voir* [**3**],[**4**]). Cet article concerne le cas des difféomorphismes qui préservent une structure complexe.

Si M est une variété complexe, on notera $\mathsf{Aut}\,(M)$ le groupe de ses difféomorphismes holomorphes. Lorsque M est compacte, $\mathsf{Aut}\,(M)$ est un groupe de Lie complexe (*voir* [**2**]). Quand M est algébrique, on note $\mathsf{Aut}\,[M]$ le groupe des difféomorphismes algébriques de M.

Si M est une surface de Riemann de genre supérieur ou égal à deux, alors le groupe des difféomorphismes qui préservent la structure complexe est fini. Il n'y a dans ce cadre aucun espoir d'obtenir une variante du théorème de Filipkiewicz : on peut trouver deux courbes compactes de genre 3 différentes dont le groupe d'automorphismes est trivial. Plus généralement si M est une variété complexe compacte de type général, alors $\mathsf{Aut}\,(M)$ est fini et souvent il est trivial. A l'opposé considérons deux exemples de variétés homogènes.

Exemple 1.2. — Pour l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$, le groupe d'automorphismes coïncide avec $\mathsf{PGL}(n+1,\mathbf{C})$. Les automorphismes de ce groupe sont engendrés par les automorphismes intérieurs, l'involution $u \mapsto {}^{\mathrm{t}}(u^{-1})$ et les conjugaisons par des automorphismes du corps $\mathbf{C}$ (*voir* [**7**]). La preuve présentée par Dieudonné repose sur le fait que tout automorphisme de $\mathsf{PGL}(n+1,\mathbf{C})$ provient par passage au quotient d'un automorphisme de $\mathsf{GL}(n+1,\mathbf{C})$ et sur l'étude de certains éléments de $\mathsf{GL}(n+1,\mathbf{C})$ d'ordre deux, les « involutions extrémales ». On peut retrouver ce résultat en étudiant les sous-groupes abéliens et résolubles maximaux de $\mathsf{GL}(n+1,\mathbf{C})$.

Exemple 1.3. — Le groupe d'automorphismes du tore $\mathbf{C}/\Gamma$ est, pour tout réseau Γ différent de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ et $\mathbf{Z}[\mathrm{j}]$, le produit semi-direct $\mathbf{C}/\Gamma \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ces groupes sont donc tous isomorphes à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, indépendamment de la structure complexe. Un résultat analogue est valable pour les tores $\mathbf{C}^n/\Gamma$ où Γ est un réseau générique de $\mathbf{C}^n$.

Dans cet article on considère le cas de l'espace affine complexe. En dimension un, le groupe d'automorphismes de $\mathbf{C}$ coïncide avec le groupe affine qui est un groupe de Lie complexe de dimension deux ; on a le résultat suivant sans doute bien connu :

Proposition 1.4. — *Soit φ un automorphisme du groupe des transformations affines de la droite complexe. Alors φ est la composée d'un automorphisme intérieur et de l'action d'un isomorphisme du corps $\mathbf{C}$.*

A partir de la dimension deux, le groupe d'automorphismes de $\mathbf{C}^n$ n'est plus de dimension finie, même si l'on ne considère que les automorphismes polynomiaux. L'étude de ces groupes, tant dynamique qu'algébrique, est pertinente (*voir* [**9**], [**13**] et [**6**]).

Ahern et Rudin montrent, dans [**1**], que le groupe d'automorphismes holomorphes de $\mathbf{C}^n$ est isomorphe à celui de $\mathbf{C}^l$ si et seulement si $l = n$. Leur preuve s'adapte textuellement au cas des groupes d'automorphismes polynomiaux. Dans l'esprit du théorème de Filipkiewicz il est naturel de décrire le groupe d'automorphismes de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^n]$ pour $n \geq 2$. Notre résultat principal répond à cette question pour $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^2]$. On dispose de deux types d'automorphismes évidents pour ce groupe :

- les automorphismes intérieurs,
- ceux associés aux automorphismes de corps : à f élément de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^2]$ on associe $\tau(f)$ obtenu en faisant agir l'automorphisme de corps τ sur les coefficients de f.

On montre que ces deux familles d'automorphismes engendrent le groupe d'automorphismes de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^2]$:

Théorème 1.5. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps non dénombrable de caractéristique nulle et* G *le groupe d'automorphismes polynomiaux du plan affine* $\mathbf{k}^2$*. Soit* φ *un automorphisme du groupe* G*. Il existe* ψ *dans* G *et* τ *un automorphisme du corps* $\mathbf{k}$ *tel que pour tout* f *dans* G*, on ait :*

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Si $\mathsf{Int}\,(\mathsf{G})$ *désigne l'ensemble des automorphismes intérieurs de* G*, le groupe* $\mathsf{Aut}\,(\mathsf{G})$ *coïncide donc avec le produit semi-direct :* $\mathsf{Int}\,(\mathsf{G}) \rtimes \mathsf{Aut}\,(\mathbf{k}, +, .)$ *où* $\mathsf{Aut}\,(\mathbf{k}, +, .)$ *est le groupe d'automorphismes du corps* $\mathbf{k}$*.*

L'hypothèse de non dénombrabilité est nécessaire pour appliquer les résultats de Lamy ([**10**]) et celle sur la caractéristique lorsqu'on utilise l'argument de linéarisation de Cartan-Bochner (lemme 5.1).

D'autres auteurs se sont intéressés au semi-groupe $\mathsf{End}\,(M)$ des endomorphismes d'une variété complexe M. En particulier Buzzard et Merenkov ont montré le résultat suivant. *Soit* M *une variété complexe ; si* $\varphi : \mathsf{End}\,(\mathbf{C}^n) \to \mathsf{End}\,(M)$ *est un morphisme de semi-groupes surjectif,* φ *est la conjugaison par un difféomorphisme holomorphe ou anti-holomorphe de* $\mathbf{C}^n$ *sur* M (voir la partie 6). En corollaire du théorème 1.5, on obtiendra le résultat suivant :

Corollaire 1.6. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps non dénombrable de caractéristique nulle et* $\mathsf{End}\,[\mathbf{k}^2]$ *le semi-groupe des endomorphismes polynomiaux du plan affine* $\mathbf{k}^2$*. Un isomorphisme du semi-groupe* $\mathsf{End}\,[\mathbf{k}^2]$ *dans lui-même est intérieur à composition près par un automorphisme du corps* $\mathbf{k}$*.*

La stratégie de preuve est la suivante. Le groupe $\mathsf{G} = \mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$ est un produit amalgamé (*voir* [**14**], [**11**]) :

$$\mathsf{G} = \mathsf{A} *_{\mathsf{S}} \mathsf{E}$$

où A désigne le groupe des automorphismes affines, E celui des automorphismes élémentaires et S l'intersection de A et E. Dans [**9**], Friedland et Milnor étudient G d'un point de vue dynamique ; en utilisant certaines propriétés des sous-groupes de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^2]$, Lamy établit l'alternative de Tits pour $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^2]$ (*voir* [**10**]). Dans la partie 4, à partir des travaux de Lamy, on dresse une liste exhaustive des sous-groupes abéliens maximaux de G et on établit un caractère de rigidité pour le groupe des automorphismes élémentaires. C'est cette rigidité qui permet de démontrer le théorème 1.5.

2. Définitions et rappels

Commençons par rappeler quelques définitions et notations. Un système de coordonnées étant fixé sur $\mathbf{k}^2$, si f est un élément de $\mathsf{G} = \mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$ on notera souvent f par ses deux composantes $(f_1(x,y), f_2(x,y))$; par exemple si $f(x,y) = (y,x)$, on dira que « f est l'automorphisme (y,x) ».

Si f_S est une famille d'éléments de G, on note $\langle f_S \rangle$ le groupe engendré par la famille f_S.

Un *automorphisme élémentaire* est un automorphisme de la forme :

$$(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$$

avec α, β deux éléments de $\mathbf{k}^*$, γ un élément de $\mathbf{k}$ et P un élément de $\mathbf{k}[y]$. L'ensemble de ces automorphismes forme le groupe E. On appelle *application de* HÉNON *généralisée* toute application qui s'écrit :

$$(y, P(y) - \delta x)$$

où δ est dans $\mathbf{k}^*$, P dans $\mathbf{k}[y]$ et $\mathsf{deg} P \geq 2$. On note H l'ensemble des applications du type :

$$\psi \circ g_m \circ \ldots \circ g_1 \circ \psi^{-1}$$

où les g_i sont des applications de HÉNON généralisées et ψ est un élément de G. Les éléments de H seront dits *de type* HÉNON.

On rappelle le résultat suivant (*voir* [**9**]) :

Proposition 2.1 **(**[**9**]**).** — *Soit f un automorphisme polynomial de $\mathbf{k}^2$. On a l'alternative :*

1. *f est conjugué à un élément de E ou de A ;*
2. *f est un élément de H.*

Comme le groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbf{k}^2$ a une structure de produit amalgamé, la théorie de BASS-SERRE assure qu'on peut faire agir $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$ de manière non triviale par translation à gauche sur un arbre. Cet arbre $\mathcal{T}$ est défini comme suit : l'ensemble des sommets est l'union disjointe des classes à gauche $(\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2])/\mathsf{A}$ et $(\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2])/\mathsf{E}$ et celui des arêtes l'union disjointe des classes à gauche $(\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2])/\mathsf{S}$. Pour tout élément f de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$, l'arête $f\mathsf{S}$ relie les sommets $f\mathsf{E}$ et $f\mathsf{A}$.

Le groupe $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$ agit par translation à gauche sur $\mathcal{T}$:

$$f.(g\mathsf{E}) = (f \circ g)\mathsf{E}.$$

On peut associer à f le sous-arbre $\mathsf{Fix}\,(f)$ de $\mathcal{T}$ constitué des sommets et des arêtes fixés par l'action de f. La proposition 2.1 correspond à l'alternative : $\mathsf{Fix}\,(f) \neq \emptyset$ ou $\mathsf{Fix}\,(f) = \emptyset$; en effet, le stablisateur du sommet $f\mathsf{E}$ (resp. du sommet $f\mathsf{A}$, resp. de l'arête $f\mathsf{S}$) est le groupe $f\mathsf{E}f^{-1}$ (resp. $f\mathsf{A}f^{-1}$, resp. $f\mathsf{S}f^{-1}$).

A partir de cette action sur l'arbre, LAMY décrit, dans [**10**], les propriétés de certains sous-groupes de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{C}^2]$, valables aussi pour $\mathsf{Aut}\,[\mathsf{l}^2]$ où l désigne un corps non dénombrable. On en utilisera certaines dans le texte ; précisons-les :

– *un groupe non abélien dont chaque élément est conjugué à un automorphisme élémentaire est conjugué à un sous-groupe de* E *ou de* A.
– *soit* g *un élément de* G, *on note* $\mathscr{C}(g)$ *le centralisateur de* g :

$$\mathscr{C}(g) = \{f \in \mathsf{G} \mid f \circ g = g \circ f\}.$$

Les automorphismes de type Hénon *sont caractérisés par la propriété algébrique suivante :* h *est de type* Hénon *si et seulement si* $\mathscr{C}(h)$ *est dénombrable* (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse de non dénombrabilité du corps).

3. Le groupe affine de la droite

Nous allons montrer la proposition 1.4 dans un cadre un peu plus général : pour un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique nulle. Les groupes abéliens maximaux du groupe des transformations affines de la droite sont de deux types. Il y a le groupe des translations :

$$B = \langle z + b \mid b \in \mathbf{k} \rangle$$

et les groupes de transformations affines qui fixent un point :

$$K_{z_0} = \langle a(z - z_0) + z_0 \mid a \in \mathbf{k}^* \rangle.$$

Les groupes K_{z_0} contiennent des éléments de torsion alors que le groupe B n'en contient pas. Comme φ envoie un groupe abélien maximal sur un autre, nécessairement $\varphi(B) = B$. Par suite il existe une bijection $\tau_2 :\ \mathbf{k} \to \mathbf{k}$ telle que pour tout b dans $\mathbf{k}$:

$$\varphi(z + b) = z + \tau_2(b).$$

Puisque φ est un morphisme de groupes, on note que τ_2 est additif. L'automorphisme φ envoie K_0 sur un autre sous-groupe abélien possédant des éléments de torsion donc sur un certain K_{z_0}. Soit τ_{z_0} la translation de vecteur z_0. Quitte à composer φ par la conjugaison par τ_{z_0} on peut supposer que $\varphi(K_0) = K_0$; il existe alors une bijection $\tau_1 :\ \mathbf{k}^* \to \mathbf{k}^*$, multiplicative, telle que :

$$\varphi(az) = \tau_1(a)z.$$

Comme :

$$\varphi(az + b) = \varphi(z + b) \circ \varphi(az) = \tau_1(a)z + \tau_2(b),$$

on a :

$$\varphi(az + ab) = \tau_1(a)z + \tau_2(ab).$$

De même, à partir de $\varphi(az + ab) = \varphi(az) \circ \varphi(z + b)$, on obtient :

$$\tau_1(a)\tau_2(b) = \tau_2(ab).$$

En particulier pour $b = 1$, on obtient $\tau_2(a) = \tau_1(a)\tau_2(1)$. Or $\tau_2(1) \neq 0$ donc τ_1 est additif. Finalement τ_1 est un isomorphisme de corps et :

$$\varphi(az + b) = \tau_1(a)z + \tau_2(1)\tau_1(b)$$

est le conjugué par l'homothétie de rapport $\tau_2(1)$ de l'automorphisme associé à τ_1. On en déduit en particulier la proposition 1.4.

4. Rigidité du groupe des automorphismes élémentaires

Dans le résultat qui suit interviennent la non dénombrabilité du corps $\mathbf{k}$ et la caractérisation algébrique des automorphismes de type HÉNON rappelée dans la partie 2 :

Lemme 4.1. — *Si φ est un automorphisme de G, alors $\varphi(\mathsf{H}) = \mathsf{H}$.*

Démonstration. — La proposition 2.1 assure que tout élément g de G est soit conjugué à un automorphisme élémentaire ou affine, soit conjugué à une composée d'applications de HÉNON généralisées. Dans le premier cas le centralisateur de g est non dénombrable, puisque que $\mathbf{k}$ ne l'est pas, tandis que dans le second $\mathscr{C}(g)$ est dénombrable. Ainsi l'image par φ d'un automorphisme de type HÉNON est lui-même de type HÉNON. $\square$

On note :

$$\mathsf{E}^{(1)} = [\mathsf{E}, \mathsf{E}] = \{(x + P(y), y + \gamma) \mid P \in \mathbf{k}[y],\ \gamma \in \mathbf{k}\}$$

le groupe dérivé de E et :

$$\mathsf{E}^{(2)} = \{(x + P(y), y) \mid P \in \mathbf{k}[y]\}$$

celui de $\mathsf{E}^{(1)}$.

On s'intéresse à l'image de E par φ. Nous allons montrer que E est rigide c'est-à-dire qu'à automorphisme intérieur près $\varphi(\mathsf{E}) = \mathsf{E}$. Commençons par caractériser le groupe $\mathsf{E}^{(2)}$:

Lemme 4.2. — *Le groupe $\mathsf{E}^{(2)}$ est un sous-groupe abélien maximal de E.*

Démonstration. — Soient $K \supset \mathsf{E}^{(2)}$ un groupe abélien et $g = (g_1, g_2)$ un élément de K. Pour tout polynôme P et tout élément t de $\mathbf{k}$, on note $f_{tP} := (x + tP(y), y)$. L'automorphisme g commute aux f_{tP} ; en particulier en considérant la dérivée de $f_{tP} \circ g = g \circ f_{tP}$ en $t = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} P(y) = P(g_2(x, y)) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x} P(y) = 0$$

donc g_2 ne dépend que de y. L'égalité :

$$P(y) \frac{\partial g_1}{\partial x} = P(g_2(y))$$

dit que $\frac{\partial g_1}{\partial x}$ est une fonction polynomiale de y ; comme g est inversible il existe Q dans $\mathbf{k}[y]$ et α dans $\mathbf{k}^*$ tel que :

$$g_1(x,y) = \alpha x + Q(y).$$

On constate que pour tout élément P de $\mathbf{k}[y]$:

$$P(y)\alpha = P(g_2(y)).$$

En particulier pour $P \equiv 1$, on obtient $\alpha = 1$. Ensuite, en choisissant $P(y) = y$, on constate que $g_2(y) = y$. Ceci montre que g appartient à $\mathsf{E}^{(2)}$ et termine la preuve. $\square$

Proposition 4.3. — *Le groupe* E *est maximal parmi les sous-groupes résolubles de longueur* 3 *de* G.

Démonstration. — Soit K un groupe résoluble de longueur de résolubilité 3 contenant E. Le groupe $K^{(2)}$ est abélien et contient $\mathsf{E}^{(2)}$; comme $\mathsf{E}^{(2)}$ est un groupe abélien maximal, on a $K^{(2)} = \mathsf{E}^{(2)}$. Le groupe $K^{(2)}$ est distingué dans K ; pour tout élément $f = (f_1, f_2)$ de K et tout élément $(x + P(y), y)$ de $\mathsf{E}^{(2)} = K^{(2)}$ on a :

$$f_1(x + P(y), y) = f_1(x,y) + \Theta(P)(f_2(x,y)) \tag{4.1}$$

$$f_2(x + P(y), y) = f_2(x,y) \tag{4.2}$$

où Θ est une application de $\mathbf{k}[y]$ dans lui-même qui dépend de f.

L'égalité 4.2 implique que $f_2(x,y) = f_2(y)$; par suite $f_2(y) = \beta y + \kappa$, avec β dans $\mathbf{k}^*$ et κ dans $\mathbf{k}$. En dérivant 4.1 par rapport à x, on obtient pour tout P dans $\mathbf{k}[y]$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x + P(y), y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$$

ce qui conduit à :

$$f_1(x,y) = R(y)x + Q(y)$$

où R, Q désignent deux éléments de $\mathbf{k}[y]$. Comme f est un automorphisme, f_1 s'écrit $\alpha x + Q(y)$, $\alpha \neq 0$. Par suite K et E coïncident. $\square$

Cette propriété algébrique de E nous permet d'établir la propriété de rigidité annoncée :

Proposition 4.4. — *Si* φ *est un automorphisme de* G, *il existe un élément* ψ *de* G *tel que :*

$$\varphi(\mathsf{E}) = \psi \mathsf{E} \psi^{-1}.$$

Démonstration. — L'ensemble H est préservé par l'automorphisme φ (lemme 4.1) ; donc chaque élément de $\varphi(\mathsf{E})$ est conjugué à un élément de E ou de A. D'après l'une des propriétés rappelée en fin de partie 2, l'image de E par φ est conjuguée à un sous-groupe de E ou de A.

Montrons que si $\varphi(\mathsf{E})$ est conjugué à un sous-groupe de A, il est conjugué à un sous-groupe de E. Quitte à faire une conjugaison, on peut supposer que $\varphi(\mathsf{E})$ est contenu dans A. Le groupe E étant résoluble, $\varphi(\mathsf{E})$ l'est et de même longueur ; ainsi l'image de $\varphi(\mathsf{E})$ par le morphisme « partie linéaire » de A dans $\mathsf{GL}(2,\mathbf{k})$ est un sous-groupe résoluble, non virtuellement abélien K de $\mathsf{GL}(2,\mathbf{k})$. La composante neutre $\overline{K}_0^Z$ de l'adhérence de Zariski de K est triangulable dans $\mathsf{GL}(2,\overline{\mathbf{k}})$; donc le groupe $K_0 = K \cap \overline{K}_0^Z$ aussi. Par suite $[K_0, K_0]$ est abélien et tous ses éléments sont du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe K_0 est non abélien ; en effet, s'il l'était $\overline{K}^Z$ serait virtuellement abélien et K aussi. Il s'ensuit que $[K_0, K_0]$ n'est pas trivial ; comme il est distingué dans K tout élément de K est triangulaire et K est conjugué à un sous-groupe de E.

Dans les deux cas, il existe un automorphisme ψ de $\mathbf{k}^2$ tel que :

$$\varphi(\mathsf{E}) \subset \psi \mathsf{E} \psi^{-1}.$$

Par maximalité de E comme sous-groupe résoluble de longueur 3 de G, on a l'égalité :

$$\varphi(\mathsf{E}) = \psi \mathsf{E} \psi^{-1}.$$

□

5. Démonstration du théorème 1.5

On vient de montrer que quitte à conjuguer φ par un élément de G, le groupe E est envoyé sur lui-même par φ. Dans la suite on supposera donc que $\varphi(\mathsf{E}) = \mathsf{E}$. Afin de comprendre l'action de φ sur le groupe élémentaire, on étudie l'image du groupe diagonal par φ, puis celle du groupe des translations.

5.1. Etude du groupe diagonal. — On note $d_{\alpha,\beta}$ l'automorphisme défini par : $d_{\alpha,\beta} = (\alpha x, \beta y)$. L'ensemble de ces automorphismes forme le groupe D des transformations diagonales.

Lemme 5.1. — *Tout sous-groupe de* E *isomorphe à* $F = \langle(-x, y),\ (x, -y)\rangle$ *est conjugué à* F *dans* E.

Démonstration. — Notons K un sous-groupe de E isomorphe à F. Considérons le morphisme :

$$\begin{array}{rccl}\rho : & K & \to & \mathsf{D} \\ & (\alpha x + P(y), \beta y + \delta) & \mapsto & (\alpha x, \beta y)\end{array}$$

Tout élément du noyau de ρ est périodique de période 2, donc $\ker \rho$ est trivial. Par suite, ρ réalise une bijection de K sur son image.

Comme tout élément $(\alpha x+P(y), \beta y+\delta)$ de K est périodique de période 2 nécessairement $\alpha^2 = \beta^2 = 1$. Ainsi $\rho(K) = F$.

En particulier dans K il existe un élément $f = (-x+P(y), -y+\delta)$; il admet un unique point fixe $\left(\frac{1}{2}P\left(\frac{\delta}{2}\right), \frac{\delta}{2}\right)$. Quitte à conjuguer f par une translation, on peut supposer que ce point fixe est $(0,0)$; ce choix étant fait, f est de la forme : $(-x+P(y), -y)$ avec $P(0) = 0$. Or tout élément qui commute à f admet l'origine pour point fixe ; donc tous les éléments de K fixent 0.

Par un argument classique de moyennisation (Cartan, Bochner), on peut alors linéariser K par un élément de E ; notons f_i les éléments de K. Soit g défini par :

$$g = \sum_{i=0}^{3} Df_i(0)^{-1} \circ f_i.$$

Puisque la caractéristique de $\mathbf{k}$ est nulle, l'automorphisme g est un élément de E et linéarise K :

$$g \circ f_l = Df_l(0) \sum_{i=0}^{3} D(f_i \circ f_l)^{-1}(f_i \circ f_l)^{-1}(0) = Df_l(0) \circ g.$$

Ainsi $K = gFg^{-1}$. □

En particulier, quitte à conjuguer φ par un élément de E, on supposera dans la suite que $\varphi(F) = F$.

Corollaire 5.2. — *Si φ est un automorphisme de G tel que $\varphi(\mathsf{E}) = \mathsf{E}$ et $\varphi(F) = F$, alors $\varphi(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$.*

Démonstration. — Le groupe F commute à tous les éléments du groupe diagonal D ; donc F commute aux éléments $(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$ de $\varphi(\mathsf{D})$. Comme $(x, -y)$ commute à $(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$, on a $\gamma = 0$; en écrivant que $(-x, y)$ commute à $(\alpha x + P(y), \beta y)$, on obtient $P \equiv 0$. Il s'ensuit que $\varphi(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$. □

5.2. Etude du groupe des translations. — Pour tout élément (α, β) de $\mathbf{k}^2$, on note $t_{\alpha,\beta}$ la translation $(x + \alpha, y + \beta)$. Le groupe de toutes les translations $t_{\alpha,\beta}$ est noté T. Un élément $t_{\alpha,\beta}$ de T s'écrit $t_{\alpha,0} \circ t_{0,\beta}$; pour déterminer l'image de T par φ, on va donc étudier les groupes $\mathsf{T}_1 = \{(x + \zeta, y) \mid \zeta \in \mathbf{k}\}$ et $\mathsf{T}_2 = \{(x, y + \upsilon) \mid \upsilon \in \mathbf{k}\}$.

Remarque 5.3. — Le groupe des translations T est un sous-groupe abélien maximal dans E. En effet soient $H \supset \mathsf{T}$ un groupe abélien et ϕ un élément de H ; comme ϕ commute à toute translation, sa différentielle est constante et ϕ est affine. Par suite ϕ est une translation.

Le groupe des translations T satisfait lui aussi une propriété de rigidité :

Lemme 5.4. — *Soit φ un automorphisme du groupe G. Si $\varphi(\mathsf{E}) = \mathsf{E}$ et $\varphi(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$, alors $\varphi(\mathsf{T}) = \mathsf{T}$. Plus précisément, nous avons $\varphi(\mathsf{T}_i) = \mathsf{T}_i$.*

Démonstration. — Le sous-groupe T_1 de $\mathsf{E}^{(2)}$ commute à $\{(x, sy) \mid s \in \mathbf{k}^*\}$. Comme $\varphi(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$, il existe deux applications λ et μ de $\mathbf{k}^*$ dans lui-même telles que le sous-groupe $\varphi(\mathsf{T}_1)$ de $\mathsf{E}^{(2)}$ commute à $\{(\lambda(s)x, \mu(s)y) \mid s \in \mathbf{k}^*\}$. La commutation d'un élément $(x + q(y), y)$ de $\varphi(\mathsf{T}_1)$ et d'un élément $(\lambda(s)x, \mu(s)y)$ se traduit par :

$$\lambda(s)q(\mu(s)^{-1}y) = q(y).$$

Un calcul élémentaire montre qu'il existe un entier i tel que tous les éléments de $\varphi(\mathsf{T}_1)$ soient de la forme $(x + ay^i, y)$ où a désigne un élément de $\mathbf{k}$.

En procédant comme ci-dessus avec les groupes T_2 et $\{(tx, y) \mid t \in \mathbf{k}^*\}$, on obtient que le sous-groupe $\varphi(\mathsf{T}_2)$ de $\mathsf{E}^{(1)}$ commute avec $\{(\alpha(t)x, \beta(t)y) \mid t \in \mathbf{k}^*\}$ où α, β désignent deux applications de $\mathbf{k}^*$ dans lui-même non constantes simultanément. Un élément $(x + P(y), y + \delta)$ de $\varphi(\mathsf{T}_2)$ et $(\alpha(t)x, \beta(t)y)$ commutent si et seulement si :

$$(x + \alpha(t)P(\beta(t)^{-1}y), y + \beta(t)\delta) = (x + P(y), y + \delta). \tag{5.1}$$

Si $\delta \equiv 0$, l'égalité précédente conduit à :

$$\alpha(t)P(\beta(t)^{-1}y) = P(y).$$

Donc P est un monôme et l'image du groupe T_2 par φ est contenue dans $\{(x + by^j, y) \mid b \in \mathbf{k}\}$. Alors $\varphi(\mathsf{T})$ est un sous-groupe du groupe abélien $\{(x + ay^i + by^j, y) \mid a,\ b \in \mathbf{k}\}$; ce groupe n'étant pas maximal, nous obtenons une contradiction. En particulier, le groupe $\varphi(\mathsf{T}_2)$ contient au moins un élément f avec δ non nul.

Dans ce cas, en reprenant 5.1, on a : $\beta(t) \equiv 1$ et $P \equiv 0$. Ainsi tous les éléments f de $\varphi(\mathsf{T}_2)$ sont de la forme $(x, y + c)$ et $\varphi(\mathsf{T}_2) \subset \mathsf{T}_2$.

Pour c et b non nuls, les éléments $(x, y + c)$ et $(x + by^j, y)$ commutent si et seulement si $j = 0$. Par suite $\varphi(\mathsf{T}_1)$ est inclu dans T_1 et $\varphi(\mathsf{T}) \subset \mathsf{T}$; par maximalité de T, on a $\varphi(\mathsf{T}) = \mathsf{T}$. Il s'ensuit que les groupes T_i sont laissés invariants par φ. $\square$

Le corollaire 5.2 et le lemme 5.4 impliquent qu'il existe des applications σ_1, σ_2, τ_1 et τ_2 telles que :

$$\varphi(x+r,y+s) = (x+\sigma_1(r,s), y+\sigma_2(r,s))$$
$$\varphi(\alpha x,\beta y) = (\tau_1(\alpha,\beta)x, \tau_2(\alpha,\beta)y).$$

Le groupe $\{(x+r,y) \mid r \in \mathbf{k}\}$ (resp. $\{(x,y+s) \mid s \in \mathbf{k}\}$) est envoyé sur lui-même par φ (lemme 5.4) ; l'écriture $t_{r,s} = t_{r,0} \circ t_{0,s}$ donne :

$$\varphi(x+r,y+s) = (x+\sigma_1(r), y+\sigma_2(s)).$$

Par suite on a :

$$\varphi(x+\alpha r,y+\beta s) = (x+\sigma_1(\alpha r), y+\sigma_2(\beta s));$$

mais $(x+\alpha r, y+\beta s)$ s'écrit aussi $d_{\alpha,\beta} \circ t_{r,s} \circ d_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}$, donc :

$$\varphi(x+\alpha r,y+\beta s) = (x+\tau_1(\alpha,\beta)\sigma_1(r), y+\tau_2(\alpha,\beta)\sigma_2(s)).$$

On obtient :

$$\tau_1(\alpha,\beta)\sigma_1(r) = \sigma_1(\alpha r) \qquad \text{et} \qquad \tau_2(\alpha,\beta)\sigma_2(s) = \sigma_2(\beta s).$$

Ainsi τ_1 ne dépend que de α et τ_2 de β :

$$\varphi(\alpha x+r,\beta y+s) = (\tau_1(\alpha)x+\sigma_1(r), \tau_2(\beta)y+\sigma_2(s)).$$

La proposition 1.4 assure alors qu'à translation près :

$$\varphi(\alpha x+r,\beta y+s) = (\tau_1(\alpha)x+\lambda\tau_1(r), \tau_2(\beta)y+\kappa\tau_2(s))$$

où τ_1, $\tau_2 \in \mathsf{Aut}\,(\mathbf{k},+,.)$, $\lambda = \sigma_1(1)$ et $\kappa = \sigma_2(1)$. Le groupe $\mathsf{E}^{(2)}$ est laissé invariant par φ ; en particulier $\varphi(x+y,y) = (x+\xi(y),y)$. Comme pour tout élément α de $\mathbf{k}^*$ l'élément $(x+y,y)$ commute à $d_{\alpha,\alpha}$, l'automorphisme $(x+\xi(y),y)$ commute à $d_{\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)}$, *i.e.* :

$$\tau_1(\alpha)\xi(\tau_2(\alpha)^{-1}y) = \xi(y).$$

Alors on a :

$$(\tau_1(\alpha)\tau_2(\alpha)^{-i}-1)a_i = 0$$

où $\xi(y) = \displaystyle\sum_{i\geq 0} a_i y^i$. Par ailleurs τ_1 étant additif, l'égalité $\tau_2(\alpha)^i = \tau_1(\alpha)$ implique que τ_2^i est additif ; ceci n'est possible que si i vaut 1. Ainsi on a :

$$\varphi(\alpha x+r,\beta y+s) = (\tau_1(\alpha)x+\lambda\tau_1(r), \tau_1(\beta)y+\kappa\tau_1(s))$$

soit quitte à conjuguer φ par $d_{\tau_1(\kappa),\tau_1(\lambda)}$ puis composer par l'action de l'automorphisme de corps τ_1 :

$$\varphi(\alpha x+r,\beta y+s) = (\alpha x+r, \beta y+s).$$

Autrement dit on a prouvé le :

Lemme 5.5. — *Soit φ un automorphisme de E préservant D et T ; alors à automorphisme intérieur et isomorphisme de corps près les groupes D et T sont laissés invariants point par point par φ.*

5.3. Conclusion et conséquences. — On suppose désormais que E est laissé fixe par φ (proposition 4.4) et que les groupes T et D sont laissés invariants point par point par φ (lemme 5.5).

Lemme 5.6. — *Si les groupes D et T sont laissés invariants point par point, il en est de même pour E.*

Démonstration. — Comme $\mathsf{E}^{(2)}$ est invariant par φ, nous avons :

$$\varphi(x + P(y), y) = (x + \Theta(P)(y), y) \tag{5.2}$$

où Θ est une application additive. De plus, pour tout élément α de $\mathbf{k}^*$ nous avons d'une part $\varphi(x + \alpha P(y), y) = \varphi(x + (\alpha P)(y), y) = (x + \Theta(\alpha P)(y), y)$ et d'autre part

$$\begin{aligned}\varphi(x + \alpha P(y), y) &= \varphi(d_{\alpha,1} \circ (x + P(y), y) \circ d_{\alpha^{-1},1}) \\ &= d_{\alpha,1} \circ (x + \Theta(P)(y), y) \circ d_{\alpha^{-1},1} \\ &= (x + \alpha\Theta(P)(y), y).\end{aligned}$$

Autrement dit Θ est un endomorphisme $\mathbf{k}$-linéaire du $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathbf{k}[y]$. Ecrivons $\Theta(y^N) = \sum_{i\geq 0} a_i y^i$; l'invariance de D implique pour tout β dans $\mathbf{k}^*$:

$$\varphi(x + \beta^{-N}y^N, y) = \varphi(d_{1,\beta} \circ (x + y^N, y) \circ d_{1,\beta^{-1}}) = (x + \sum_{i\geq 0} a_i\beta^{-i}y^i, y).$$

Mais l'égalité 5.2 donne pour $P = \beta^{-N}y^N$:

$$\varphi(x + \beta^{-N}y^N, y) = (x + \beta^{-N}\Theta(y^N), y);$$

ainsi, pour tout entier i et tout β dans $\mathbf{k}^*$, on a $a_i(\beta^{-N} - \beta^{-i}) = 0$. On obtient donc :

$$\Theta(y^N) = a_N y^N.$$

En conjuguant $(x + y^N, y)$ avec $t_{0,\kappa}$ et en appliquant φ, on a pour tout $l = 0, \ldots, N$:

$$a_{N-l} = a_N.$$

Or, par hypothèse, φ laisse le groupe des translations invariant point par point ; donc $(x + 1, y)$ est envoyé sur lui-même par φ et les a_N valent tous 1. Ainsi :

$$\varphi(x + y^N, y) = (x + y^N, y).$$

On en déduit, puisque D est invariant, que :

$$\varphi(x + ay^N, y) = (x + ay^N, y).$$

Comme Θ est additive, la restriction de φ à $\mathsf{E}^{(2)}$ est l'identité. Les groupes des homothéties et des translations étant invariants point par point, on a finalement $\varphi_{|\mathsf{E}} = \mathsf{id}$. □

Remarque 5.7. — Le groupe E et l'automorphisme $(x, x+y)$ engendrent le groupe G. En effet, d'une part les groupes E et A engendrent G ; d'autre part, les éléments de S et $(x, x+y)$ engendrent A. Il nous suffit donc de déterminer l'image de $(x, x+y)$ par φ pour connaître l'action de φ sur G.

Lemme 5.8. — *Si les groupes* E, D *et* T *sont laissés invariants point par point par* φ, *alors l'automorphisme* $(x, x+y)$ *est fixé par* φ.

Démonstration. — Notons $g = (x, x+y)$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2) = \varphi(g)$. On a :

$$g \circ t_{\alpha,\beta} \circ g^{-1} = t_{\alpha,\alpha+\beta}$$

donc :

$$\psi \circ t_{\alpha,\beta} = t_{\alpha,\alpha+\beta} \circ \psi$$

autrement dit :

$$(\psi_1(x+\alpha, y+\beta), \psi_2(x+\alpha, y+\beta)) = (\psi_1(x,y) + \alpha, \psi_2(x,y) + \alpha + \beta).$$

En particulier pour $y = -\beta$, on a l'égalité :

$$\psi_1(x+\alpha, 0) = \psi_1(x, -\beta) + \alpha;$$

ainsi ψ_1 ne dépend pas de y et pour $x = 0$ on obtient :

$$\psi_1(\alpha) = \alpha + \kappa.$$

Posons $\psi_2(x,y) = x + y + f(x,y)$; alors l'égalité :

$$\psi_2(x+\alpha, y+\beta) = \psi_2(x,y) + \alpha + \beta$$

entraîne :

$$f(x+\alpha, y+\beta) = f(x,y)$$

autrement dit, f est invariante par translation donc constante. Ainsi ψ s'écrit :

$$(x+\kappa, x+y+\gamma).$$

En conjuguant $(x, x+y)$ avec $d_{\alpha,\alpha}$ et en appliquant φ, on montre que $\kappa = \gamma = 0$. □

La démonstration de la partie principale du théorème est terminée : dans la partie 4, on a obtenu $\varphi(\mathsf{E}) = \mathsf{E}$, quitte à composer φ par la conjugaison par un élément de G. Ensuite on a montré que les groupes D et T étaient, à automorphisme intérieur et isomorphisme de corps près, laissés invariants points par points par φ (lemme 5.5) ; on en a déduit que E aussi (lemme 5.6). Finalement comme le groupe E et l'automorphisme $(x, x+y)$ engendrent G et que $(x, x+y)$ est envoyé sur lui-même par φ, on obtient le résultat annoncé. La deuxième partie du théorème correspond à la proposition 6.2.

6. Applications.

6.1. Compléments sur les automorphismes. — A posteriori on obtient le résultat suivant ; la contribution éventuelle d'un automorphisme de corps, obstruction à ce que l'automorphisme soit intérieur, se lit au niveau des déterminants jacobiens :

Corollaire 6.1. — *Un automorphisme φ du groupe* G *est intérieur si et seulement si pour tout f de* G *on a :*

$$\mathsf{jac}\,(\varphi(f)) = \mathsf{jac}\,(f)$$

où jac *désigne le déterminant de la matrice jacobienne de f.*

Démonstration. — L'élément $\varphi(f)$ s'écrit $\tau(\psi^{-1}f\psi)$ où τ est un morphisme du corps $\mathbf{k}$ et ψ un élément de G ; d'où :

$$\mathsf{jac}\,(\varphi(f)) = \mathsf{jac}\,(\tau f) = \tau(\mathsf{jac}\,(f)).$$

Ainsi :

$$\mathsf{jac}\,(\varphi(f)) = \mathsf{jac}\,(f)$$

pour tout f si et seulement si τ est trivial. □

Notons $\mathsf{Int}\,(\mathsf{G})$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. Notre résultat s'interprète comme suit :

Proposition 6.2. — *On a la suite exacte :*

$$1 \to \mathsf{Int}\,(\mathsf{G}) \to \mathsf{Aut}\,(\mathsf{G}) \to \mathsf{Aut}\,(\mathbf{k}, +, .) \to 1.$$

De plus, la suite est scindée, i.e. :

$$\mathsf{Aut}\,(\mathsf{G}) = \mathsf{Int}\,(\mathsf{G}) \rtimes \mathsf{Aut}\,(\mathbf{k}, +, .).$$

6.2. Le semi-groupe des endomorphismes polynomiaux. — Buzzard et Merenkov répondent à la même question que Filipkiewicz dans un cadre un peu différent : sous quelles conditions une variété complexe est-elle déterminée par son semi-groupe d'endomorphismes ?

Théorème 6.3 **([5])**. — *Soit M une variété complexe.*

(i) *Si φ :* $\mathsf{End}\,(\mathbf{C}^n) \to \mathsf{End}\,(M)$ *est un morphisme de semi-groupes surjectif, φ est la conjugaison par un difféomorphisme holomorphe ou anti-holomorphe de $\mathbf{C}^n$ sur M.*

(ii) *Soit φ :* $\mathsf{End}\,(M) \to \mathsf{End}\,(\mathbf{C}^n)$ *un morphisme de semi-groupes surjectif. Supposons que* $\mathsf{End}\,(M)$ *agisse doublement transitivement sur M. Alors φ est la conjugaison par un difféomorphisme holomorphe ou anti-holomorphe de M sur $\mathbf{C}^n$.*

Reprenant certaines idées développées dans [**5**] et appliquant le théorème 1.5, on obtient :

Corollaire 6.4. — *Un isomorphisme du semi-groupe* $\mathsf{End}\,[\mathbf{k}^2]$ *dans lui-même est intérieur à composition près par un automorphisme du corps* $\mathbf{k}$.

Démonstration. — Soit φ un isomorphisme du semi-groupe $\mathsf{End}\,[\mathbf{k}^2]$ dans lui-même ; φ induit un automorphisme de $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$. Ainsi le théorème 1.5 assure que quitte à composer φ par un automorphisme de corps puis à conjuguer par un automorphisme de $\mathbf{k}^2$, on peut supposer que la restriction de φ au groupe $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$ est l'identité.

Pour tout α dans $\mathbf{k}^2$, on note f_α l'endomorphisme constant de $\mathbf{k}^2$ qui vaut α. Pour tout élément g de $\mathsf{End}\,[\mathbf{k}^2]$, on a $f_\alpha \circ g = f_\alpha$. Cette égalité implique que φ envoie l'endomorphisme f_α sur un endomorphisme constant f_κ ; ceci définit une application inversible h de $\mathbf{k}^2$ dans lui-même telle que $\varphi(f_\alpha) = f_{h(\alpha)}$. A partir de l'égalité $g \circ f_\alpha = f_{g(\alpha)}$ valable pour tout g dans $\mathsf{End}\,[\mathbf{k}^2]$ et tout α dans $\mathbf{k}^2$, on vérifie que :

$$\varphi(g) = hgh^{-1}.$$

La restriction de φ au groupe $\mathsf{Aut}\,[\mathbf{k}^2]$ étant l'identité, on en déduit que $h = \mathsf{id}$. □

Remerciements.

Je tiens à remercier S. Cantat et D. Cerveau pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Merci à S. Lamy et au rapporteur pour leurs remarques et suggestions.

Références

[1] P. Ahern and W. Rudin. Periodic automorphisms of $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(1):287–303, 1995.

[2] D. N. Akhiezer. *Lie group actions in complex analysis*. Aspects of Mathematics, E27. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995.

[3] A. Banyaga. On isomorphic classical diffeomorphism groups. I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(1):113–118, 1986.

[4] A. Banyaga. *The structure of classical diffeomorphism groups*, volume 400 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[5] G. T. Buzzard and S. Merenkov. Maps conjugating holomorphic maps in $\mathbb{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(5):1135–1146, 2003.

[6] D. Cerveau, É. Ghys, N. Sibony, and J.-C. Yoccoz. *Dynamique et géométrie complexes*, volume 8 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1999.

[7] J. A. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Seconde édition, revue et corrigée. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[8] R. P. Filipkiewicz. Isomorphisms between diffeomorphism groups. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2(2):159–171, 1982.

[9] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1):67–99, 1989.

[10] S. Lamy. L'alternative de Tits pour Aut[$\mathbb{C}^2$]. *J. Algebra*, 239(2):413–437, 2001.

[11] S. Lamy. Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, 48(3-4):291–315, 2002.

[12] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[13] J. Smillie. Dynamics in two complex dimensions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, pages 373–382, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[14] W. van der Kulk. On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wiskunde (3)*, 1:33–41, 1953.

May 4, 2006

Julie Déserti, IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France
E-mail : julie.deserti@univ-rennes1.fr