CENTRALISATEURS DANS LE GROUPE DE JONQUIÈRES

par

Dominique CERVEAU & Julie DÉSERTI

Abstract. — We give a criterion to determine when the degree growth of a birational map of the complex projective plane which fixes (the action on the basis of the fibration is trivial) a rational fibration is linear up to conjugacy. We also compute the centraliser of such maps. It allows us to describe the centraliser of the birational maps of the complex projective plane which preserve a rational fibration (the action on the basis of the fibration being not necessarily trivial); this question is related to some classical problems of difference equations.
2010 *Mathematics Subject Classification.* — 14*E*05, 14*E*07

1. Introduction

La description des centralisateurs des systèmes dynamiques discrets est considérée comme un problème important tant en dynamique réelle que complexe. Ainsi Julia ([20, 19]) puis Ritt ([27]) montrent que l'ensemble $\mathrm{C}(f)=\left\{g\colon \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1 \,\middle|\, fg=gf\right\}$ des fonctions rationnelles commutant à une fonction rationnelle fixée f se réduit en général aux itérés $f_0^{\mathbb{N}}=\left\{f_0^n\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ de l'un de ses éléments sauf dans quelques cas spéciaux (à conjugaison près les monômes z^k, les polynômes de Tchebychev, les exemples de Lattès...) Plus tard, dans les années 60, Smale demande si un difféomorphisme générique $f\colon M\to M$ d'une variété compacte a son centralisateur trivial, c.-à.d. si

$$\mathrm{C}(f)=\left\{g\in\mathrm{Diff}^\infty(M)\,|\,fg=gf\right\}$$

est réduit à $f^{\mathbb{Z}}=\left\{f^n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$. De nombreux mathématiciens ont apporté leur contribution parmi lesquels Bonatti, Crovisier, Fisher, Palis, Wilkinson, Yoccoz ([5, 14, 15, 23, 24, 25]). De même dans le cadre local, plus précisément dans l'étude des éléments de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$, le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}$, la description des centralisateurs joue un rôle crucial. Ainsi Ecalle montre que si $f\in\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ est tangent à l'identité alors, sauf cas exceptionnel, son centralisateur se réduit encore à un $f_0^{\mathbb{Z}}$ (*voir* [12, 13]) ; ceci permet en particulier de décrire les sous-groupes résolubles non abéliens de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ (*voir* [9]). À l'inverse Perez-Marco montre qu'il existe des sous-groupes abéliens non linéarisables et non dénombrables de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ en liaison avec des questions difficiles de « mauvais petits diviseurs » ([26]).

Nous nous proposons de terminer (à indice fini près) le calcul des centralisateurs des éléments du groupe de Cremona $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Comme on peut le voir entre autres dans [3, 7] ces calculs de centralisateurs apparaissent

Le second auteur est soutenu par le Swiss National Science Foundation grant no PP00P2_128422 /1.

naturellement dans les problèmes de représentations de groupes abstraits dans les groupes de transformations. Le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ des transformations birationnelles du plan projectif complexe est constitué des applications rationnelles

$$\phi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad\qquad (x:y:z) \dashrightarrow (\phi_0(x,y,z):\phi_1(x,y,z):\phi_2(x,y,z)),$$

les ϕ_i désignant des polynômes homogènes de même degré et sans facteur commun, qui admettent (sur un ouvert de Zariski) un inverse du même type. Rappelons que le premier degré dynamique de ϕ est donné par $\lambda(\phi) = \lim\limits_n (\deg\phi^n)^{1/n}$.

Par « homogénéisation » chaque automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ produit un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$, ainsi le *groupe* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$; c'est le produit amalgamé du groupe A des automorphismes affines et du *groupe élémentaire* défini par

$$\mathrm{E} = \big\{(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)\,\big|\,\alpha,\,\beta,\,\gamma\in\mathbb{C},\,\alpha\beta\neq 0,\,P\in\mathbb{C}[y]\big\}$$

le long de leur intersection ([**21**]). En s'appuyant sur cette structure très particulière Friedland et Milnor ont montré l'alternative suivante ([**16**]) : soit ϕ dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ alors

- ou bien ϕ est conjugué à un élément de E ;
- ou bien ϕ est de *type Hénon*, c.-à.d. conjugué à $g_1\dots g_n$ où $g_i = (y, P_i(y) - \delta_i x)$, $P_i\in\mathbb{C}[y]$, $\deg P_i \geq 2$, $\delta_i\in\mathbb{C}^*$.

Si ϕ est dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, on a $\lambda(\phi) = 1$ (resp. $\lambda(\phi) > 1$) si et seulement si ϕ est un automorphisme élémentaire (resp. un automorphisme de type Hénon). Étant donné un automorphisme polynomial ϕ de $\mathbb{C}^2$, on appelle centralisateur de ϕ le groupe des automorphismes polynomiaux qui commutent à ϕ. Mis à part les automorphismes résonants du type

$$(\beta^d x + \beta^d y^d q(y^r), \beta y), \qquad\qquad \beta^r = 1,\, d\geq 1, q\in\mathbb{C}[y]\setminus\mathbb{C}$$

tout élément de E se plonge dans un flot. En particulier le centralisateur d'un élément de E non résonant est non dénombrable ; quant aux éléments résonants ils commutent aux automorphismes de la forme $(x + ay^d, y)$, $a\in\mathbb{C}$, leur centralisateur est donc aussi non dénombrable. Par contre le centralisateur d'un élément de type Hénon est dénombrable ; plus précisément si ϕ est type Hénon, son centralisateur est isomorphe à $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain p et génériquement $p = 1$ (*voir* [**22**]). On a donc pour tout ϕ dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ l'équivalence suivante : ϕ est de type Hénon si et seulement si son centralisateur est dénombrable. Le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ présente donc une dichotomie : d'un côté les automorphismes de type Hénon, célèbres pour leur dynamique compliquée, et de l'autre les automorphismes conjugués à des éléments de E. Cette dichotomie peut se caractériser via le degré dynamique, ou via le caractère dénombrable ou non du centralisateur, ou encore via la présence d'une fibration rationnelle invariante. Comme nous allons le voir cette dichotomie ne persiste pas dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Toutefois il y a un analogue à l'énoncé de Friedland et Milnor ([**11, 17**]) ; une transformation birationnelle ϕ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ satisfait une et une seule des propriétés suivantes :

- La suite $(\deg\phi^n)_n$ est bornée, ϕ est birationnellement conjugué à un automorphisme d'une surface rationnelle et un itéré de ϕ est isotope à l'identité.
  Dans ce cas ϕ préserve une infinité de fibrations rationnelles.
- $\deg\phi^n \sim n$ alors ϕ n'est pas conjugué à un automorphisme d'une surface rationnelle et ϕ préserve une unique fibration qui est rationnelle.
- $\deg\phi^n \sim n^2$ auquel cas ϕ est conjugué à un automorphisme d'une surface rationnelle préservant une unique fibration qui est elliptique.
- $\deg\phi^n \sim \alpha^n$, $\alpha > 1$.

Dans les trois premières éventualités on a $\lambda(\phi)=1$, dans la dernière $\alpha=\lambda(\phi)>1$.
À l'inverse du cas polynomial il n'y a pas d'équivalence entre le fait d'avoir un centralisateur dénombrable et d'avoir un premier degré dynamique strictement supérieur à 1. Dans la suite si ϕ est un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ on note $\mathrm{C}(\phi)$ le centralisateur de ϕ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$:

$$\mathrm{C}(\phi)=\left\{\psi\in\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)\,|\,\psi\phi=\phi\psi\right\}.$$

La description des centralisateurs des éléments du groupe de Cremona d'ordre infini et à croissance bornée figure dans [**3**]. Elle découle du fait suivant ([**3**, Proposition 2.3]) : soit ϕ une transformation birationnelle d'ordre infini et telle que $(\deg\phi^n)_n$ soit bornée. Alors ϕ est conjugué :

- soit à $(\alpha x,\beta y)$, avec $\alpha,\,\beta\in\mathbb{C}^*$, le noyau du morphisme $\mathbb{Z}^2\to\mathbb{C}^*$, $(i,j)\mapsto\alpha^i\beta^j$ étant engendré par $(k,0)$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$;
- soit à $(\alpha x,y+1)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$.

Ensuite on montre, dans la première éventualité, que ([**3**])

$$\mathrm{C}(\phi)=\left\{(\eta(x),yR(x^k))\;\middle|\;R\in\mathbb{C}(x),\eta\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),\eta(\alpha x)=\alpha\eta(x)\right\};$$

dans le cas générique ($k=0$), on a $\mathrm{C}(\phi)=\left\{(\gamma x,\delta y)\,\middle|\,\gamma,\,\delta\in\mathbb{C}^*\right\}$. Enfin dans le second on obtient ([**3**])

$$\mathrm{C}(\phi)=\left\{(\eta(x),y+R(x))\,\middle|\,\eta\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),\eta(\alpha x)=\alpha\eta(x),R\in\mathbb{C}(x),R(\alpha x)=R(x)\right\}.$$

Notons que dans ce dernier cas pour α générique, $\mathrm{C}(\phi)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$.
Dans le cas des transformations birationnelles d'ordre fini, la situation est très différente du cas linéaire. Alors que le centralisateur d'une involution linéaire (par exemple $(-x,y)$) est infini non dénombrable celui d'une involution de Bertini, resp. Geiser, est fini ([**4**]). Pour des involutions de Bertini et Geiser génériques $\mathcal{I}$ le centralisateur se réduit à $\left\{\mathrm{id},\,\mathcal{I}\right\}$ mais il existe de telles involutions avec un centralisateur plus gros. En effet dans [**8**, Proposition 3.12] on construit à partir d'un feuilletage $\mathcal{F}_J$, dit de Jouanolou, de degré 2 sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une involution birationnelle $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_J}$; on montre que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_J}$ est une involution de Geiser. On constate que le groupe engendré par $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_J}$ et le groupe d'isotropie de $\mathcal{F}_J$ est un groupe fini d'ordre 42 qui est contenu dans $\mathrm{C}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}_J})$.
Notons que lorsque $\deg\phi^n\sim n^2$ la description des automorphismes des courbes elliptiques permet d'affirmer que $\mathrm{C}(\phi)$ est virtuellement abélien tout du moins dans le cas générique. En utilisant la classification des pinceaux de courbes elliptiques (pinceaux d'Halphen) on peut préciser dans tous les cas ces $\mathrm{C}(\phi)$ (*voir* [**6**])
Dans [**6**] Cantat donne une description du centralisateur des éléments de premier degré dynamique strictement supérieur à 1 : soit ϕ une transformation birationnelle du plan projectif complexe dont le premier degré dynamique $\lambda(\phi)$ est strictement plus grand que 1. Si ψ est un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ qui commute avec ϕ, il existe deux entiers m dans $\mathbb{N}^*$ et n dans $\mathbb{Z}$ tels que $\psi^m=\phi^n$.
Dans [**10**] on étudie une famille de transformations birationnelles $(f_{\alpha,\beta})$ ayant les propriétés suivantes : $f_{\alpha,\beta}$ est à croissance linéaire, en particulier $\lambda(f_{\alpha,\beta})=1$, et possède un centralisateur dénombrable : $\mathrm{C}(f_{\alpha,\beta})=\langle f^n_{\alpha,\beta}\,|\,n\in\mathbb{Z}\rangle$.
Dans cet article on s'attache en particulier à compléter le cas manquant, celui des transformations birationnelles à croissance linéaire. Ceci termine tout du moins du point de vue qualitatif l'étude des centralisateurs des transformations birationnelles qui ne sont pas de torsion.

Dans un premier temps on établit un critère élémentaire permettant d'affirmer qu'une transformation birationnelle qui préserve une fibration rationnelle fibre à fibre est à croissance linéaire (§3) ; ce critère met en jeu un invariant matriciel projectif classique de type « Baum-Bott ».

Theorème A. — *Soit ϕ un élément du groupe de Cremona qui préserve une fibration rationnelle fibre à fibre. La transformation ϕ est à croissance linéaire si et seulement si l'indice de Baum-Bott de ϕ appartient à $\mathbb{C}(y)\setminus\mathbb{C}$.*

Une conséquence de [11, Theorem 0.2] et du Théorème A est le fait suivant : *soit ϕ un élément du groupe de Cremona qui préserve une fibration rationnelle fibre à fibre. La transformation ϕ est à croissance bornée si et seulement si l'indice de Baum-Bott de ϕ appartient à $\mathbb{C}$.*

Au §4 on commence par établir la propriété suivante : *soit ϕ une transformation birationnelle qui préserve une fibration rationnelle $\mathcal{F}$ fibre à fibre. Alors ou bien ϕ est périodique, ou bien tous les éléments qui commutent à ϕ laissent $\mathcal{F}$ invariante (pas nécessairement fibre à fibre).*
Soit ϕ une transformation birationnelle qui préserve une fibration rationnelle $\mathcal{F}$ fibre à fibre ; ϕ est contenu dans un sous-groupe abélien maximal, noté $\mathrm{Ab}(\phi)$, préservant $\mathcal{F}$ fibre à fibre. La nature de ces sous-groupes abéliens maximaux est bien connue, nous la rappelons au §2.3. On décrit les centralisateurs $\mathrm{C}(\phi)$ des éléments non périodiques ϕ de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ qui préservent une fibration rationnelle fibre à fibre (§4) ; cette description conduit à l'énoncé suivant.

Theorème B. — *Soit ϕ une transformation birationnelle qui préserve une fibration rationnelle fibre à fibre. Si ϕ est à croissance linéaire, le centralisateur $\mathrm{C}(\phi)$ de ϕ est une extension finie de $\mathrm{Ab}(\phi)$.*

Ces résultats nous permettent de décrire, à indice fini près, les centralisateurs des éléments ϕ qui préservent une unique fibration rationnelle, pas nécessairement fibre à fibre, question en liaison avec des problèmes classiques d'équations aux différences (§5). Nous verrons que génériquement ces transformations ont un centralisateur trivial, c.-à.d. réduit aux itérés de ϕ. Ceci est résumé dans un tableau récapitulatif au §6. Un corollaire immédiat de cette description est l'énoncé suivant :

Corollaire C. — *Soit ϕ une transformation birationnelle du plan projectif complexe qui préserve une unique fibration rationnelle. Le centralisateur de ϕ est virtuellement résoluble.*

Remerciements. — Merci à J.-J. Loeb pour sa participation sympathique et au rapporteur pour ses remarques et propos judicieux.

2. Groupe de Jonquières

2.1. Quelques rappels sur le groupe de Cremona. — Soit ϕ un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. L'ensemble des *points d'indétermination* de ϕ est par définition l'ensemble

$$\mathrm{Ind}\,\phi = \big\{m \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,|\, \phi_0(m) = \phi_1(m) = \phi_2(m) = 0\big\};$$

quant à l'*ensemble exceptionnel* de ϕ, ou encore l'ensemble des courbes contractées par ϕ, il est donné par

$$\mathrm{Exc}\,\phi = \big\{m \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,|\, \det \mathrm{jac}\phi_{(m)} = 0\big\}.$$

On note que la transformation birationnelle ϕ induit un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Ind}\,\phi = \mathrm{Exc}\,\phi = \emptyset$. Pour les transformations $f_{\alpha,\beta}$ évoquées dans l'introduction et données par

$$f_{\alpha,\beta} = (z(\alpha x + y) : \beta y(x+z) : z(x+z)), \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$

on a

$$\mathrm{Ind}\, f_{\alpha,\beta} = \big\{(1:0:0), (0:1:0), (-1:\alpha:1)\big\}, \qquad \mathrm{Exc}\, f_{\alpha,\beta} = \big\{z = -x\big\} \cup \big\{z = 0\big\} \cup \big\{y = \alpha z\big\}.$$

2.2. Groupe de Jonquières. — Le *groupe de Jonquières* est le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe préservant un pinceau de courbes rationnelles ; on le note J. Comme deux pinceaux de courbes rationnelles sont birationnellement conjugués, J ne dépend pas, à conjugaison près, du pinceau choisi. Dit autrement on peut supposer à conjugaison birationnelle près que J est, dans une carte affine (x,y) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, le groupe maximal des transformations birationnelles laissant la fibration $y =$ cte invariante. Une transformation ϕ de J permutant les fibres de la fibration, ϕ induit un automorphisme de la base $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, soit un élément de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; lorsque ϕ préserve les fibres, ϕ agit comme une homographie dans les fibres génériques. Le groupe de Jonquières s'identifie donc au produit semi-direct $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; plus précisément tout ϕ dans J s'écrit

$$\phi = \left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)}, \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}\right), \qquad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}[y]), \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

On remarque que pour un tel ϕ l'ensemble exceptionnel se réduit à un nombre fini de fibres $y =$ cte et éventuellement la « droite » à l'infini. On désigne par π_2 le morphisme de J dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, c.-à.d. $\pi_2(\phi)$ est la seconde composante de ϕ. Les éléments de J qui préservent la fibration fibre à fibre forment un sous-groupe distingué (noyau du morphisme π_2) que nous noterons $\mathrm{J}_0 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$. Si ϕ appartient à J_0, il s'écrit $\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)}, y\right)$ et on note M_ϕ la matrice associée $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. L'*indice de Baum-Bott* (par analogie avec l'indice de Baum-Bott d'un feuilletage, [**1, 18**]) de ϕ est par définition $\frac{(\mathrm{tr}\,\mathrm{M}_\phi)^2}{\det \mathrm{M}_\phi}$, on le notera $\mathrm{BB}(\phi)$. Le groupe J contient bien évidemment des transformations à croissance bornée ; on va donner un critère permettant de déterminer les éléments de J_0 qui sont à croissance linéaire (§3).

2.3. Formes normales dans J_0. — Soit ϕ une transformation birationnelle appartenant à J_0 ; elle est, à conjugaison birationnelle près, de l'un des types suivants (*voir* par exemple [**10**])

$$\mathfrak{a} \;\; (x+a(y),y), \qquad \mathfrak{b} \;\; (b(y)x,y), \qquad \mathfrak{c} \;\; \left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)}, y\right),$$

avec a dans $\mathbb{C}(y)$, b dans $\mathbb{C}(y)^*$ et c, F dans $\mathbb{C}[y]$, F n'étant pas un carré (si F est un carré alors ϕ est conjugué à un élément de type $\mathfrak{b}$). En effet, soient $\mathrm{M}_\phi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ un élément de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}[y])$ et

$$P_{\mathrm{M}_\phi}(X) = X^2 - (\mathrm{tr}\,\mathrm{M}_\phi)X + \det \mathrm{M}_\phi$$

son polynôme caractéristique. Ou bien P_{M_ϕ} a deux racines distinctes (cas $\mathfrak{b}$), ou bien P_{M_ϕ} a une racine double (cas $\mathfrak{a}$), ou bien P_{M_ϕ} n'a pas de racine dans $\mathbb{C}[y]$. Dans ce dernier cas ceci signifie que $\mathrm{tr}^2\mathrm{M}_\phi - 4\det \mathrm{M}_\phi$ n'est pas un carré dans $\mathbb{C}[y]$; on en déduit que $BC \neq 0$ et que $B(y)$ s'écrit $G(y) - \frac{(A(y)-D(y))^2}{4}$ où G désigne un élément de $\mathbb{C}[y]$ qui n'est pas un carré. Quitte à conjuguer ϕ par $(C(y)x,y)$, on peut supposer que $C = 1$ et que A, B, D appartiennent à $\mathbb{C}[y]$. Ensuite en conjuguant ϕ par $\left(x + \frac{D(y)-A(y)}{2}, y\right)$ on se ramène à $A = D$ et B n'est pas un carré ; autrement dit $\mathrm{M}_\phi = \begin{bmatrix} A & B \\ 1 & A \end{bmatrix}$ avec A, B dans $\mathbb{C}[y]$ et B n'est pas un carré.

Les sous-groupes abéliens maximaux non finis de J_0 sont de trois types

$$\mathrm{J}_a = \left\{(x+a(y),y) \,\middle|\, a \in \mathbb{C}(y)\right\}, \qquad \mathrm{J}_m = \left\{(b(y)x,y) \,\middle|\, b \in \mathbb{C}(y)^*\right\}$$

et les groupes

$$\mathrm{J}_F = \left\{(x,y), \left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)}, y\right) \,\middle|\, c \in \mathbb{C}(y)\right\}$$

où F désigne un élément de $\mathbb{C}[y]$ qui n'est pas un carré ([10]). En fait en conjuguant par une transformation $(a(y)x,y)$ ad-hoc on peut supposer que F est un polynôme ayant toutes ses racines simples, ce que nous faisons dans la suite.

Remarque 2.1. — Un élément de type $\mathfrak{a}$ non trivial est conjugué (via une transformation de type $\mathfrak{b}$) à $(x+1,y)$. Les trois types de groupes précédents se distinguent par la nature des points fixes de leurs éléments ; avec des notations évidentes $\mathrm{Fix}\,\mathrm{J}_a=\{(x=\infty,y)\}$, $\mathrm{Fix}\,\mathrm{J}_m=\{(x=\infty,y)\}\cup\{(x=0,y)\}$, $\mathrm{Fix}\,\mathrm{J}_F=\{(x,y)\,|\,x^2=F(y)\}$, ces égalités étant écrites dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$.

Par suite si ϕ est un élément de J_0 et si $\mathrm{Ab}(\phi)$ désigne le sous-groupe abélien maximal non fini de J_0 contenant ϕ alors, à conjugaison près, $\mathrm{Ab}(\phi)$ est J_a, J_m ou J_F. Plus précisément si ϕ est de type $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$, resp. $\mathfrak{c}$), alors $\mathrm{Ab}(\phi)=\mathrm{J}_a$ (resp. $\mathrm{Ab}(\phi)=\mathrm{J}_m$, resp. $\mathrm{Ab}(\phi)=\mathrm{J}_F$).

3. Croissance des degrés dans J_0

Nous allons dans ce paragraphe donner un critère permettant d'affirmer qu'un élément ϕ de J_0 est à croissance linéaire.

Comme on l'a rappelé précédemment ϕ est, à conjugaison birationnelle près, de l'un des types $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{c}$.

Remarque 3.1. — La transformation ϕ est une involution si et seulement si l'indice de Baum-Bott de ϕ est nul.

Remarque 3.2. — Posons
$$\Xi=\Big\{\alpha+\frac{1}{\alpha}+2\,|\,\alpha\in\mathbb{C}(y)^*\Big\}.$$
Soient $\phi\in\mathrm{J}_0$ et $\mathrm{BB}(\phi)$ son indice de Baum-Bott. Si ϕ n'est pas une involution, c.-à.d. $\mathrm{BB}(\phi)\neq 0$, on a
- ϕ est du type $\mathfrak{a}$ si et seulement si $\mathrm{BB}(\phi)=4$;
- $\phi\neq\mathrm{id}$ est du type $\mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathrm{BB}(\phi)$ appartient à Ξ ;
- ϕ est du type $\mathfrak{c}$ si et seulement si $\mathrm{BB}(\phi)$ n'est pas dans Ξ.

Si ϕ est de type $\mathfrak{a}$, on a $\deg\phi^n=\deg\phi$. Lorsque $\phi=(a(y)x,y)$ est de type $\mathfrak{b}$, alors
$$\mathrm{BB}(\phi)=\frac{(a(y)+1)^2}{a(y)},\qquad\qquad \phi^n=(a(y)^nx,y)$$
et on a l'alternative suivante :
- ou bien a est une constante auquel cas l'indice de Baum-Bott de ϕ est une constante et $\deg\phi^n=\deg\phi=1$;
- ou bien a appartient à $\mathbb{C}(y)\setminus\mathbb{C}$ et $\mathrm{BB}(\phi)$ appartient à $\mathbb{C}(y)\setminus\mathbb{C}$, alors $\deg\phi^n=n\deg\phi-n+1$.

Toute transformation $\phi=\left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)},y\right)$ de type $\mathfrak{c}$, c.-à.d. appartenant à un J_F, est conjuguée dans $\mathrm{PGL}_2\big(\mathbb{C}(y)+\sqrt{F}\mathbb{C}(y)\big)$ à $\psi=\left(\frac{c(y)+\sqrt{F(y)}}{c(y)-\sqrt{F(y)}}x,y\right)$. Puisque $\mathbb{C}(y)+\sqrt{F}\mathbb{C}(y)$ s'identifie au corps des fonctions méromorphes sur la courbe $\mathcal{C}=\{x^2=F(y)\}$, il y a sur ce corps une notion de degré (nombre de points dans la fibre générique). Par exemple le degré de F (c.-à.d. le degré de $x_{|\mathcal{C}}$) est le degré ordinaire de F, celui de y est 2. On vérifie que la croissance des degrés de ϕ et ψ sont identiques. La transformation ψ étant du type $\mathfrak{b}$ sur $\mathcal{C}$, elle est à croissance bornée si et seulement si $\frac{c(y)+\sqrt{F(y)}}{c(y)-\sqrt{F(y)}}$ est une constante autrement dit si et seulement si c est nul (puisque F n'est pas un carré). Par ailleurs $\mathrm{BB}(\phi)=\frac{4c(y)^2}{c(y)^2-F(y)}$; il appartient à $\mathbb{C}(y)\setminus\mathbb{C}$ si et seulement si c est non nul (toujours parce que F n'est pas un carré).

Ce qui précède nous permet d'énoncer le :

Théorème 3.3. — *Soit* ϕ *un élément de* J_0. *La transformation* ϕ *est à croissance linéaire si et seulement si l'indice de Baum-Bott de* ϕ *appartient à* $\mathbb{C}(y)\setminus\mathbb{C}$.

Remarque 3.4. — Ceci permet d'obtenir un critère pour les éléments ϕ tels que $\pi_2(\phi)$ soit périodique de période k : un tel ϕ est à croissance linéaire (resp. bornée) si et seulement si $\mathrm{BB}(\phi^k)$ appartient à $\mathbb{C}(y)\setminus\mathbb{C}$ (resp. $\mathrm{BB}(\phi^k)$ appartient à $\mathbb{C}$).

Corollaire 3.5. — *Soit* ϕ *un élément de* J_0. *La transformation* ϕ *est à croissance bornée si et seulement si l'indice de Baum-Bott de* ϕ *appartient à* $\mathbb{C}$ *; dans ce cas* ϕ *est soit de type* $\mathfrak{a}$, *soit de type* $\mathfrak{b}$ *linéaire* ((bx,y) *avec* b *dans* $\mathbb{C}^*$), *soit une involution* $\left(\frac{F(y)}{x},y\right)$ *de type* $\mathfrak{c}$.

4. Centralisateurs des éléments de J_0

Si ϕ est un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ on désigne par $\mathrm{C}(\phi)$ son centralisateur : $\mathrm{C}(\phi)=\left\{\varphi\in\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)\,|\,\phi\varphi=\varphi\phi\right\}$.

4.1. Le centralisateur d'une transformation non périodique de J_0 est contenu dans J. —

Proposition 4.1. — *Soit* ϕ *un élément de* J_0. *Alors*
- *ou bien* $\mathrm{C}(\phi)$ *est contenu dans* J;
- *ou bien* ϕ *est périodique.*

Démonstration. — Soit $\phi=(\psi(x,y),y)$ une transformation du groupe de Jonquières qui préserve la fibration $y=$ cte fibre à fibre, $\psi\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$.
Soit $\varphi=(P(x,y),Q(x,y))$ une transformation rationnelle qui commute à ϕ. Si φ n'est pas dans J, alors $Q=$ cte est une fibration invariante fibre à fibre par ϕ différente de $y=$cte. Ainsi ϕ possède deux fibrations distinctes invariantes fibre à fibre et est donc périodique. En effet les intersections des fibres $y=$ cte et $Q=$ cte génériques sont de cardinal fini, uniformément borné ; or ces intersections sont invariantes par ϕ d'où le résultat. □

Dans la suite de cette section nous démontrons le Théorème B qui affirme que le centralisateur $\mathrm{C}(\phi)$ d'un élément ϕ de J_0 à croissance linéaire est une extension finie de $\mathrm{Ab}(\phi)$.

4.2. Cas des transformations de J_a. — Soit $\phi=(x+a(y),y)$ un élément non trivial de J_a, c.-à.d. $a\neq 0$; à conjugaison près par $(a(y)x,y)$ on peut supposer que $\phi=(x+1,y)$. Le groupe $\mathrm{C}(\phi)$ se déduit alors de l'énoncé suivant ([3]).

Proposition 4.2. — *Le centralisateur de* $\phi=(x+1,y)$ *est*
$$\left\{(x+b(y),\nu(y))\;\middle|\;b\in\mathbb{C}(y),\,\nu\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\right\}\simeq\mathrm{J}_a\rtimes\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

Démonstration. — Comme ϕ est non périodique, la Proposition 4.1 assure que toute transformation ψ qui commute à ϕ est de la forme $(\psi_1(x,y),\nu(y))$ avec ν dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. En écrivant $\phi\psi=\psi\phi$ on obtient : $\psi_1(x+1,y)=\psi_1(x,y)+1$. Ceci conduit à $\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(x+1,y)=\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(x,y)$; on en déduit que $\frac{\partial\psi_1}{\partial x}$ est une fonction de y, c.-à.d. $\psi_1(x,y)=A(y)x+B(y)$. En réécrivant $\psi_1(x+1,y)=\psi_1(x,y)+1$ on obtient $A=1$. Ainsi ψ est du type $(x+B(y),\nu(y))$ avec B dans $\mathbb{C}(y)$ et ν dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. □

Remarque 4.3. — Le centralisateur d'un élément non trivial $(x+b(y),y)$ est donc birationnellement conjugué à $\mathrm{J}_a\rtimes\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, la conjugaison ayant lieu dans le groupe de Jonquières.

4.3. Cas des transformations de J_m. — On s'intéresse maintenant aux éléments du groupe J_m. Si $a \in \mathbb{C}(y)$ est non constant, on note $\mathrm{stab}(a)$ le sous-groupe fini de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ constitué des éléments laissant a invariant :

$$\mathrm{stab}(a) = \big\{\nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \,|\, a(\nu(y)) = a(y)\big\}.$$

La finitude de $\mathrm{stab}(a)$ provient du fait suivant : les fibres de a qui sont finies, de cardinal inférieur ou égal au degré de a, sont invariantes par les éléments de $\mathrm{stab}(a)$. On introduit le sous-groupe

$$\mathrm{Stab}(a) = \big\{\nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \,|\, a(\nu(y)) = a(y)^{\pm 1}\big\}.$$

On remarque que $\mathrm{stab}(a)$ est distingué dans $\mathrm{Stab}(a)$.

Exemple 4.4. — Si k est un entier et $a(y) = y^k$, alors $\mathrm{stab}(a) = \big\{\omega^k y \,|\, \omega^k = 1\big\}$ et $\mathrm{Stab}(a)$ est le groupe $\big\langle \frac{1}{y}, \omega^k y \,|\, \omega^k = 1\big\rangle$.

On note $\overline{\mathrm{stab}(a)}$ le groupe linéaire

$$\overline{\mathrm{stab}(a)} = \big\{(x, \nu(y)) \,|\, \nu \in \mathrm{stab}(a)\big\}.$$

Enfin par définition le groupe $\overline{\mathrm{Stab}(a)}$ est engendré par $\overline{\mathrm{stab}(a)}$ et les éléments du type $\big(\frac{1}{x}, \nu(y)\big)$, ν appartenant à $\mathrm{Stab}(a) \setminus \mathrm{stab}(a)$.

Proposition 4.5. — *Soit $\phi = (a(y)x, y)$ un élément non périodique de J_m.*
Si ϕ est à croissance bornée, c.-à.d. si a est une constante, le centralisateur de ϕ est

$$\big\{\big(b(y)x, \nu(y)\big) \,\big|\, b \in \mathbb{C}(y)^*,\, \nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\big\}.$$

Si ϕ est à croissance linéaire, alors $\mathrm{C}(\phi) = \mathrm{J}_m \rtimes \overline{\mathrm{Stab}(a)}$.

Remarques 4.6. —
- En général le groupe $\overline{\mathrm{Stab}(a)}$ se réduit à l'identité ; plus précisément dans l'ensemble des fractions rationnelles de degré donné d la propriété $\overline{\mathrm{Stab}(a)} = \{\mathrm{id}\}$ est générique. Par suite, « génériquement » pour ϕ dans J_m, le groupe $\mathrm{C}(\phi)$ se réduit à $\mathrm{J}_m = \mathrm{Ab}(\phi)$.
- Si $\phi = (a(y)x, y)$ avec a non constant, alors $\mathrm{C}(\phi)$ est une extension finie de $\mathrm{J}_m = \mathrm{Ab}(\phi)$.
- Si $\phi = (ax, y)$, avec a dans $\mathbb{C}^*$, on a encore $\mathrm{C}(\phi) = \mathrm{J}_m \rtimes \overline{\mathrm{Stab}(a)}$ puisqu'ici on peut définir $\mathrm{Stab(a)} = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. — Dans un premier temps supposons que $\phi = (\alpha x, y)$ avec α dans $\mathbb{C}^*$ (non racine de l'unité). Soit ψ une transformation birationnelle qui commute à ϕ; on peut, d'après la Proposition 4.1, écrire ψ sous la forme $(P(x,y), Q(y))$. Étant donné un point (x_0, y_0) fixé on obtient en écrivant la commutation de ϕ^n et ψ l'égalité $P(\alpha^n x_0, y_0) = \alpha^n P(x_0, y_0)$ d'où $\frac{\partial P}{\partial x}(\alpha^n x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)$. Autrement dit $\frac{\partial P}{\partial x}$ est constante sur l'adhérence de Zariski de $\big\{(\alpha^n x_0, y_0) \,|\, n \in \mathbb{Z}\big\}$. Il en résulte que $\frac{\partial P}{\partial x}$ est une fonction de y; ainsi $P(x,y)$ est du type $a(y)x + b(y)$. En réécrivant la commutation de ϕ^n et ψ on obtient $b(y) = \alpha^n b(y)$ ce qui conduit nécessairement à $b = 0$, c.-à.d. ψ s'écrit $(a(y)x, \nu(y))$.

Supposons que ϕ s'écrive $(a(y)x, y)$ avec a dans $\mathbb{C}(y) \setminus \mathbb{C}^*$. Tout élément ψ de $\mathrm{C}(\phi)$ préserve la fibration $y = \mathrm{cte}$ (Proposition 4.1) :

$$\psi = \left(\frac{A(y)x + B(y)}{C(y)x + D(y)}, \nu(y)\right), \qquad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}[y]),\, \nu \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

En écrivant explicitement la commutation de ψ et ϕ on obtient :

$$A(y)C(y) = A(y)C(y)a(\nu(y)) \qquad \text{et} \qquad B(y)D(y) = B(y)D(y)a(\nu(y));$$

on en déduit que AC et BD sont nuls. Par suite $A=D=0$ ou $B=C=0$. Supposons dans un premier temps que $B=C=0$ c'est-à-dire au changement de notation près $\psi=(A(y)x,\nu(y))$. La commutation de ϕ et ψ entraîne $a(\nu(y))=a(y)$. Comme $\overline{\mathrm{stab}(a)}\subset \mathrm{C}(\phi)$, il en résulte que ψ est dans le produit semi-direct $\mathrm{J}_m\rtimes\overline{\mathrm{stab}(a)}$. Si maintenant $A=D=0$, la transformation ψ est du type $\left(\frac{B(y)}{x},\nu(y)\right)$ et cette fois la commutation entraîne $a(\nu(y))=a(y)^{-1}$. Puisque $\overline{\mathrm{Stab}(a)}$ est contenu dans $\mathrm{C}(\phi)$, ici encore ψ est dans $\mathrm{J}_m\rtimes\overline{\mathrm{Stab}(a)}$. □

4.4. Cas des transformations ϕ de J_F. — Dans ce qui suit on présente le calcul de $\mathrm{C}(\phi)$ pour les éléments de J_F tels que F soit à racines simples (comme on l'a dit on s'y ramène via conjugaison par un élément de la forme $(a(y)x,y)$). On écrit donc ϕ sous la forme $\phi=\left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)},y\right)$ où $c\in\mathbb{C}(y)$; la courbe de points fixes $\mathcal{C}$ de ϕ est donnée par $x^2=F(y)$. Puisque les valeurs propres de $\mathrm{M}_\phi=\begin{bmatrix} c(y) & F(y)\\ 1 & c(y)\end{bmatrix}$ sont $c(y)\pm\sqrt{F(y)}$ on constate que ϕ est périodique si et seulement si c est identiquement nul et dans ce cas ϕ est de période 2. Dans la suite on suppose ϕ non périodique. Comme F est à racines simples le genre de $\mathcal{C}$ est supérieur ou égal à 2 pour $\deg F\geq 5$, vaut 1 pour $\deg F\in\{3,4\}$; enfin $\mathcal{C}$ est rationnelle lorsque $\deg F\in\{1,2\}$.

4.4.1. Cas où $\mathcal{C}$ est de genre strictement positif. — Puisque ϕ est à croissance linéaire, ϕ n'est pas périodique. Sur une fibre générale ϕ a deux points fixes qui correspondent aux deux points sur la courbe $x^2=F(y)$. Les courbes $x^2=F(y)$ et les fibres $y=$ cte sont invariantes par ϕ et il n'y a aucune autre courbe invariante même de genre 0 ou 1. En effet une courbe invariante différente de $y=$ cte intersecte une fibre générale en un nombre fini de points forcément invariants par ϕ ; comme ϕ est d'ordre infini c'est impossible car une transformation de Moebius qui laisse invariant un ensemble à plus de trois éléments est périodique.

Proposition 4.7. — *Soit ϕ l'élément de J_F donné par $\left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)},y\right)$. Supposons que ϕ soit non périodique (c.-à.d. $c\neq 0$) et que F soit un polynôme à racines simples de degré supérieur ou égal à 3 (c.-à.d. le genre de $\mathcal{C}$ est supérieur ou égal à 1). Alors $\mathrm{C}(\phi)$ est une extension finie de $\mathrm{J}_F=\mathrm{Ab}(\phi)$, qui est triviale pour la plupart des F.*

Démonstration. — Sur chaque fibre générique ($y=y_0$ avec $F(y_0)\neq 0$) la restriction $\phi_{|y=y_0}$ de ϕ a deux points fixes $(\pm\sqrt{F(y_0)},y_0)$. La Proposition 4.1 assure que $\mathrm{C}(\phi)\subset\mathrm{J}$. Nous allons nous intéresser au noyau de

$$\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}\colon \mathrm{C}(\phi)\to\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),$$

c.-à.d. aux éléments ψ de $\mathrm{C}(\phi)$ qui préservent la fibration $y=$ cte fibre à fibre. Notons que ψ préserve $\mathcal{C}$ et que l'automorphisme $\psi_{|\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ respecte les points fixes précédents. Par conséquent ou bien $\psi_{|\mathcal{C}}$ est l'identité de $\mathcal{C}$, ce qui revient à dire que ψ est dans J_F, ou bien $\psi_{|\mathcal{C}}$ est l'involution $(-x,y)$ de $\mathcal{C}$. On remarque que $(-x,y)$ est réalisée par l'involution globale $\tau=\left(-\frac{F(y)}{x},y\right)$; ainsi toute transformation birationnelle préservant $\mathcal{C}$ et la fibration $y=$ cte fibre à fibre est ou bien dans J_F, ou bien dans $\tau\mathrm{J}_F$.
Un calcul élémentaire montre que $\tau\phi\tau^{-1}=\tau\phi\tau=\phi^{-1}$ si bien que τ n'est pas dans $\mathrm{C}(\phi)$. Il en résulte que $\ker\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}=\mathrm{J}_F$.
Considérons un élément φ de $\mathrm{C}(\phi)$. Comme φ doit préserver $\mathcal{C}$ et la fibration $y=$ cte la restriction $\varphi_{|\mathcal{C}}$ de φ à $\mathcal{C}$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$ qui commute à l'involution $\tau_{|\mathcal{C}}$. En général sur F le groupe $\mathrm{Aut}_\tau(\mathcal{C})$ de tels automorphismes se réduit à l'identité et $\tau_{|\mathcal{C}}$. Dans tous les cas $\mathrm{Aut}_\tau(\mathcal{C})$ est un groupe fini. C'est bien sûr évident lorsque le genre de $\mathcal{C}$ est supérieur ou égal à 2 puisque le groupe des automorphismes de $\mathcal{C}$ est fini ; dans le cas elliptique, on conclut en utilisant le fait que les $\psi_{|\mathcal{C}}$ laissent invariants les points de ramification. □

Remarques 4.8. — – Supposons que $F(y)=\displaystyle\prod_{i=1}^{s}(y^k-y_i)$ où k désigne un entier positif et y_i des complexes distincts non nuls. Si $\phi=\left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)},y\right)$, avec $c\neq 0$, alors $\mathrm{C}(\phi)$ contient $\mathrm{G}=\left\{(x,\omega y)\,|\,\omega^k=1\right\}$ dès que G est contenu dans $\overline{\mathrm{stab}(c)}$ autrement dit dès que c est invariant par les ωy, $\omega^k=1$.

– Plus généralement considérons une transformation $\phi=\left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)},y\right)$. Supposons que $\mathrm{stab}(c)$ et $\mathrm{stab}(F)$ contiennent le groupe $\langle\frac{1}{y},\,\omega y\,|\,\omega^k=1\rangle$; c'est par exemple le cas lorsque c et F se factorisent dans $y^k+\frac{1}{y^k}$. Alors $\mathrm{C}(\phi)$ contient le groupe diédral $\langle\left(x,\frac{1}{y}\right),\,(x,\omega y)\,|\,\omega^k=1\rangle$. Notons qu'ici, par commodité, nous avons choisi une écriture non polynomiale de F.

4.4.2. Cas où $\mathcal{C}$ est rationnelle. — Soit ϕ un élément de J_F à croissance linéaire. Comme on l'a vu la courbe de points fixes $\mathcal{C}$ de ϕ est donnée par $x^2=F(y)$. Soit ψ un élément de $\mathrm{C}(\phi)$. Alors ou bien ψ contracte $\mathcal{C}$, ou bien ψ préserve $\mathcal{C}$. Or la Proposition 4.1 assure que ψ préserve la fibration $y=\mathrm{cte}$; la courbe $\mathcal{C}$ étant transverse à la fibration, ψ ne peut pas contracter $\mathcal{C}$ donc ψ est un élément du groupe de Jonquières qui préserve $\mathcal{C}$. Dès que F est de degré supérieur ou égal à 3 les hypothèses de la Proposition 4.7 sont satisfaites ; supposons donc que $\deg F\leq 2$. Le cas $\deg F=2$ se ramène à $\deg F=1$. En effet, soit ϕ un élément du type $\left(\frac{c(y)x+y}{x+c(y)},y\right)$; posons $\varphi=\left(\frac{x}{cy+d},\frac{ay+b}{cy+d}\right)$. On peut vérifier que $\varphi^{-1}\phi\varphi$ est du type $\left(\frac{\widetilde{c}(y)x+(ay+b)(cy+d)}{x+\widetilde{c}(y)},y\right)$, ce qui permet d'atteindre tous les polynômes quadratiques F à racines simples. Si $\deg F=1$, c.-à.d. de la forme $ay+b$, on se ramène, quitte à conjuguer ϕ par $\left(x,\frac{y-b}{a}\right)$, à $F(y)=y$.

Lemme 4.9. — *Soit ϕ une transformation du type $\left(\frac{c(y)x+y}{x+c(y)},y\right)$ avec c dans $\mathbb{C}(y)^*$. Si ψ est un élément de $\mathrm{C}(\phi)$, alors $\pi_2(\psi)$ est ou bien du type $\frac{\alpha}{y}$, $\alpha\in\mathbb{C}^*$, ou bien du type ξy, ξ racine de l'unité ; de plus, $\pi_2(\psi)$ est contenu dans le groupe fini* $\mathrm{stab}\left(\frac{4c(y)^2}{c(y)^2-y}\right)$.

Démonstration. — Écrivons ψ sous la forme $\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)},\pi_2(\psi)\right)$.
La conique $\mathcal{C}$ décrite par $y=x^2$ est munie de l'involution $\iota\colon(x,y)\mapsto(-x,y)$ qui a ses points fixes en $(0,0)$ et $(0,\infty)\in\mathcal{C}$. On remarque que la restriction $\psi_{|\mathcal{C}}\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$ qui commute à $\iota_{|\mathcal{C}}$. En particulier les points fixes de ι sont préservés par $\psi_{|\mathcal{C}}$ dans leur ensemble. Il en résulte que $\pi_2(\psi)$ laisse invariant l'ensemble $\{0,\infty\}$, c.-à.d. ou bien $\pi_2(\psi)=\alpha y$, ou bien $\pi_2(\psi)=\frac{\alpha}{y}$.
La commutation de ϕ et ψ se traduit par l'égalité suivante dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$:

$$\begin{bmatrix} c(\pi_2(\psi)) & \pi_2(\psi)\\ 1 & c(\pi_2(\psi))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A(y) & B(y)\\ C(y) & D(y)\end{bmatrix}\mathrm{M}_\phi\begin{bmatrix} A(y) & B(y)\\ C(y) & D(y)\end{bmatrix}^{-1}.$$

Ceci implique que les matrices $\mathrm{M}_\phi=\begin{bmatrix} c(y) & y\\ 1 & c(y)\end{bmatrix}$ et $\mathrm{M}_\phi(\pi_2(\psi))=\begin{bmatrix} c(\pi_2(\psi)) & \pi_2(\psi)\\ 1 & c(\pi_2(\psi))\end{bmatrix}$ sont conjuguées dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$. En particulier on a l'égalité

$$\mathrm{BB}(\phi)\big(\pi_2(\psi)\big)=\mathrm{BB}(\phi)(y)=\frac{4c(y)^2}{c(y)^2-y}.$$

$\square$

Pour α non nul on note $\mathrm{D}_\infty(\alpha)$ le groupe diédral infini

$$\mathrm{D}_\infty(\alpha)=\left\langle\frac{\alpha}{y},\,\omega y\,\middle|\,\omega\text{ racine de l'unité}\right\rangle;$$

remarquons que les $\mathrm{D}_\infty(\alpha)$ sont conjugués à $\mathrm{D}_\infty(1)$.
Si c est un élément non constant de $\mathbb{C}(y)^*$ on désigne par $\mathrm{S}(c;\alpha)$ le sous-groupe fini de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ donné par

$$\mathrm{S}(c;\alpha)=\mathrm{stab}\left(\frac{4c(y)^2}{c(y)^2-y}\right)\cap\mathrm{D}_\infty(\alpha).$$

La description des $\mathrm{C}(\phi)$ avec ϕ dans J_F et $\mathcal{C}=\mathrm{Fix}\,\phi$ rationnelle se ramène à l'énoncé suivant.

Proposition 4.10. — *Soit* $\phi=\left(\frac{c(y)x+y}{x+c(y)},y\right)$ *avec c dans $\mathbb{C}(y)^*$, c non constant. Il existe α dans $\mathbb{C}^*$ tel que*

$$\mathrm{C}(\phi)=\mathrm{J}_y\rtimes\mathrm{S}(c;\alpha).$$

Démonstration. — Supposons que $\mathrm{S}(c;\alpha)$ soit réduit à l'identité pour tout α, autrement dit $\pi_2(\mathrm{C}(\phi))=\{\mathrm{id}\}$ d'après le Lemme 4.9. En écrivant que les éléments ψ de $\mathrm{C}(\phi)$ préservent la courbe $\mathcal{C}$ on obtient $A=D$ et $B(y)=C(y)y$, ce qui signifie que $\mathrm{C}(\phi)=\mathrm{J}_y$ et prouve l'énoncé dans ce cas.
Si maintenant $\pi_2(\psi)$ est non trivial pour un certain ψ dans $\mathrm{C}(\phi)$, on sait que $\pi_2(\psi)$ est ou bien du type $\frac{\alpha}{y}$, ou bien du type ωy avec ω racine de l'unité (Lemme 4.9). Supposons que $\pi_2(\psi)=\omega y$ avec ω racine de l'unité. De l'invariance de $\frac{4c^2}{c^2-y}$ par ωy on tire

$$c(\omega y)^2=\omega c(y)^2.$$

Par suite il existe une racine carrée υ de ω, $\upsilon^2=\omega$, telle que $c(\upsilon^2y)=\upsilon c(y)$. On constate alors que la transformation linéaire $\varphi=(\upsilon x,\upsilon^2y)$ est dans $\mathrm{C}(\phi)$. On peut appliquer à $\psi\varphi^{-1}$, qui vérifie $\pi_2(\psi\varphi^{-1})=\mathrm{id}$, le premier argument, de sorte que $\psi\varphi^{-1}$ est dans J_y. Enfin si $\pi_2(\psi)=\frac{\alpha}{y}$ pour un certain α on procède comme ci-dessus. On a $c\left(\frac{\alpha}{y}\right)^2=\frac{\alpha}{y^2}c(y)^2$ et il existe une racine carrée β de α, $\beta^2=\alpha$, telle que $c\left(\frac{\beta^2}{y}\right)=\frac{\beta}{y}c(y)$. On remarque cette fois que la transformation $\varphi=\left(\frac{\beta x}{y},\frac{\beta^2}{y}\right)$ commute à ϕ ; de plus $\psi\varphi^{-1}$ est dans $\mathrm{C}(\phi)$ et vérifie $\pi_2(\psi\varphi^{-1})=\mathrm{id}$. Par suite $\psi\varphi^{-1}$ est dans J_y. □

Remarque 4.11. — Si l'inclusion $\mathrm{J}_y\subset\mathrm{C}(\phi)$ est stricte on peut évidemment affiner les formes normales de $\left(\frac{c(y)x+y}{x+c(y)},y\right)$ suivant la nature de $\mathrm{S}(c;\alpha)$.

5. Centralisateurs des éléments de J et équations aux différences

Soit ϕ un élément de $\mathrm{J}\setminus\mathrm{J}_0$ qui préserve une unique fibration rationnelle. Considérons le morphisme

$$\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}:\mathrm{C}(\phi)\to\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

qui à une transformation ψ de $\mathrm{C}(\phi)$ associe la seconde composante $\pi_2(\psi)$ de ψ ; soit H le noyau de π_2. Remarquons que si H est trivial alors $\mathrm{C}(\phi)$ est isomorphe à $\pi_2(\mathrm{C}(\phi))$. On peut se ramener par conjugaison à $\pi_2(\phi)=y+1$, ou $\pi_2(\phi)=\alpha y$. Notons que $\pi_2(\mathrm{C}(\phi))$ est contenu dans le centralisateur (dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$) de $\pi_2(\phi)$; ce groupe est abélien, isomorphe à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$, sauf dans le cas $\pi_2(\phi)=-y$ où il est isomorphe à $\mathbb{C}^*\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous faisons une description au cas par cas dans §5.1 et §5.2.

5.1. Cas où H n'est pas de torsion. —

5.1.1. Étude du cas $\pi_2(\phi)=y+1$. — Soit ψ un élément d'ordre infini dans H. Puisque ϕ appartient à $\mathrm{C}(\psi)$ on peut utiliser la classification établie au §4. Le fait que $\pi_2(\phi)$ soit une translation implique que $\mathrm{im}\,\pi_2$ est non fini et donc ψ est nécessairement, à conjugaison près, de l'un des deux types suivants

$$\psi=(x+1,y), \qquad\qquad \psi=(\alpha x,y)$$

α n'étant pas une racine de l'unité. Dans ces deux éventualités les calculs de $\mathrm{C}(\psi)$ nous indique que ϕ est du type suivant (respectivement) :

$$(x+a(y),y+1), \qquad\qquad (b(y)x,y+1).$$

Nous allons étudier le centralisateur de ϕ dans ces deux cas. Rappelons que $\mathrm{C}(\phi)$ est contenu dans J puisque ϕ préserve une seule fibration rationnelle.

Dans un premier temps considérons la possibilité $\phi=(x+a(y),y+1)$.
Commençons par remarquer que si l'équation aux différences $f(y)-f(y+1)=a(y)$ possède une solution rationnelle, alors ϕ est conjuguée à $(x,y+1)$ qui préserve plus d'une fibration.
Notons que si $\mathrm{C}(\phi)$ contient un élément du type $(x+b(y),y)$ alors $b(y+1)=b(y)$, *i.e.* b est constant ; d'ailleurs tous les $(x+\alpha,y)$ avec α dans $\mathbb{C}$ commutent à ϕ. Décrivons plus généralement les éléments $\varphi=\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)},y\right)$ de $\ker\pi_2$. Si $C=0$, la commutation de φ et ϕ conduit à

$$A(y)=A(y+1) \quad (\star) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad (A(y)-1)a(y)=B(y)-B(y+1) \quad (\diamond).$$

L'égalité $(\star)$ implique que A est constant : $A(y)=\alpha\in\mathbb{C}^*$. Alors $(\diamond)$ se réécrit $(\alpha-1)a(y)=B(y)-B(y+1)$. Nécessairement $\alpha=1$ (comme on l'a vu l'équation aux différences $f(y)-f(y+1)=a(y)$ n'a pas de solution rationnelle sous l'hypothèse ϕ préserve une unique fibration) ; par suite B est constante, *i.e.* $\varphi=(x+\beta,y)$ avec β dans $\mathbb{C}$. Supposons maintenant que C soit non nul ; on peut alors se ramener à $C=1$. On peut vérifier que $\phi\varphi=\varphi\phi$ implique $A(y+1)-A(y)=a(y)$; il n'y a donc pas d'élément de la forme $\left(\frac{A(y)x+B(y)}{x+D(y)},y\right)$ dans $\ker\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}$. Ainsi $\ker\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}=\left\{(x+\beta,y)\,|\,\beta\in\mathbb{C}\right\}$ et on obtient une description de $\mathrm{C}(\phi)$ via la suite exacte

$$0\longrightarrow\ker\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}\simeq\mathbb{C}\longrightarrow\mathrm{C}(\phi)\longrightarrow\mathrm{im}\,\pi_{2|_{\mathrm{C}(\phi)}}\longrightarrow 0.$$

Comme $\mathrm{im}\,\pi_2\subset\mathbb{C}$, on constate que $[\mathrm{C}(\phi),\mathrm{C}(\phi)]$ est abélien et donc $\mathrm{C}(\phi)$ résoluble.

Proposition 5.1. — *Si* $\phi=(x+a(y),y+1)$ *préserve une seule fibration, alors* $\mathrm{C}(\phi)$ *est résoluble métabélien.*

Considérons maintenant l'éventualité $\phi=(b(y)x,y+1)$. Remarquons que l'équation aux différences $\frac{f(y+1)}{f(y)}=b(y)$ n'a pas de solution sinon ϕ serait conjugué à $(x,y+1)$ et possèderait plus d'une fibration invariante. Soit φ un élément de $\ker\pi_2$, il est du type $\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)},y\right)$. Si $C=0$, on peut supposer que $D=1$; en écrivant que φ et ϕ commutent on obtient

$$A(y+1)=A(y) \quad (\star) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad B(y+1)=B(y)b(y) \quad (\star\star)$$

L'égalité $(\star)$ implique que A est une constante. Puisque l'équation aux différences $\frac{f(y+1)}{f(y)}=b(y)$ n'a pas de solution, $(\star\star)$ entraîne que $B=0$. Autrement dit φ s'écrit $(\alpha x,y)$. Si C est non nul, on peut se ramener à $C=1$. La commutation de φ et ϕ entraîne les égalités

$$A(y+1)=A(y)b(y) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad B(y+1)D(y)=b(y)B(y)D(y+1)$$

d'où $A=D=0$. La dernière condition imposée par $\varphi\phi=\phi\varphi$ est

$$B(y+1)=b(y)^2B(y) \quad (\diamond)$$

Il se peut que $(\diamond)$ ait une solution par exemple pour $b(y) = -\frac{y+1}{y}$; dans ce cas précis $(\deg \phi^n)_n$ n'est pas à croissance bornée. On constate que deux solutions de $(\diamond)$ diffèrent d'une constante multiplicative. Ainsi génériquement $\ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} = \{(\beta x, y) \,|\, \beta \in \mathbb{C}^*\}$ et dans le cas où $(\diamond)$ a une solution

$$\ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} = \left\langle (\beta x, y), \left(\frac{B(y)}{x}, y\right) \,|\, \beta \in \mathbb{C}^* \right\rangle.$$

On obtient encore une description de $\mathrm{C}(\phi)$ via la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow \mathrm{C}(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}\, \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow 0.$$

5.1.2. Étude du cas $\pi_2(\phi) = \beta y$, β d'ordre infini. — Soit ψ un élément d'ordre infini dans H. Puisque ϕ appartient à $\mathrm{C}(\psi)$ on peut utiliser la classification établie au §4. Comme précédemment on se ramène aux deux éventualités :

$$(x + a(y), \beta y), \qquad\qquad (b(y)x, \beta y).$$

Dans le cas où $\phi = (x + a(y), \beta y)$, on obtient en utilisant le même raisonnement que

$$\ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} = \{(x + \alpha, y) \,|\, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

et on a une description de $\mathrm{C}(\phi)$ via

$$0 \longrightarrow \ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} \simeq \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{C}(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}\, \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow 0.$$

Lorsque $\phi = (b(y)x, \beta y)$ alors $\ker \pi_{2|\mathrm{C}(\phi)} = \{(\alpha x, y) \,|\, \alpha \in \mathbb{C}^*\}$ d'où une description de $\mathrm{C}(\phi)$ via la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} \simeq \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{C}(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}\, \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow 0.$$

En effet, pour des raisons analogues à celles évoquées précédemment, l'équation aux différences $\frac{f(\beta y)}{f(y)} = b(y)$ n'a pas de solution. Soit φ un élément de $\ker \pi_2$, il est du type $\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)}, y\right)$. Si $C = 0$, alors φ s'écrit $(\alpha x, y)$. Si C est non nul, on peut se ramener à $C = 1$. La commutation de φ et ϕ entraîne $A = D = 0$. La dernière condition imposée par $\varphi\phi = \phi\varphi$ est $B(\beta y) = b(y)^2 B(y)$ mais celle-ci n'est pas compatible avec le fait que ϕ soit à croissance linéaire. En effet, ϕ est à croissance linéaire si et seulement si $\psi = (b(y)^2 x, \beta y)$ l'est puisque

$$\psi^n(x,y) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} b(\beta^j y)^2 x, \beta^n y\right) = \left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} b(\beta^j y)\right)^2 x, \beta^n y\right);$$

mais $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} b(\beta^j y)^2 = \frac{B(\beta^{n-1} y)}{B(y)}$ est à croissance bornée.

Proposition 5.2. — *Si $\phi = (x + a(y), \beta y)$ (resp. $(b(y)x, \beta y)$) avec β d'ordre infini préserve une seule fibration, alors $\mathrm{C}(\phi)$ est résoluble métabélien.*

5.2. Cas où $\mathrm{H} = \ker \pi_{2_{|\mathrm{C}(\phi)}}$ de torsion. — Donnons une description des sous-groupes de torsion infinis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$, elle découle de [2, Théorème 2].

Lemme 5.3. — *Les sous-groupes de torsion infinis de $\mathrm{J}_0 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$ sont à conjugaison près de la forme*

$$\mathrm{G}_a = \left\langle \left(\frac{a(y)}{x}, y\right), (\omega x, y) \,|\, \omega \in \Lambda \right\rangle \tag{5.1}$$

où a désigne un élément de $\mathbb{C}(y)$ (éventuellement nul) et Λ un sous-groupe infini de racines de l'unité.

Proposition 5.4. — *Soit ϕ une transformation de* $\mathrm{J}\setminus\mathrm{J}_0$ *qui préserve une unique fibration rationnelle. Supposons que le noyau de* $\pi_2{}_{|_{\mathrm{C}(\phi)}}\colon \mathrm{C}(\phi)\to\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *soit de torsion. Alors* $\ker\pi_2$ *est fini et, à indice fini près,* $\mathrm{C}(\phi)$ *est isomorphe à* $\pi_2(\mathrm{C}(\phi))$ *qui est un sous-groupe abélien de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : supposons que $\mathrm{H}=\ker\pi_2$ soit infini de torsion c'est-à-dire du type (5.1). En passant à l'adhérence de Zariski on constate que ϕ commute aussi aux éléments du type $(\alpha x,y)$ où α désigne un élément quelconque de $\mathbb{C}^*$: contradiction avec l'hypothèse selon laquelle H de torsion. ☐

5.3. Exemples. — Considérons la transformation θ_1 donnée par $\theta_1=\left(x+\frac{1}{y},y+1\right)$. On remarque que

$$\theta_1^n=\left(x+\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\ldots+\frac{1}{y+n-1},y+n\right)$$

de sorte que la suite $(\deg\theta_1^n)_n$ n'est pas bornée. Il en résulte que l'équation aux différences $f(y+1)-f(y)=\frac{1}{y}$ n'a pas de solution rationnelle. Comme on l'a vu l'image de π_2 est dans le groupe des translations $y+\tau$ et son noyau se réduit à $\left\{(x+\alpha,y)\,|\,\alpha\in\mathbb{C}\right\}$ (*voir* §5.1.1).

Considérons maintenant un élément général $\psi=\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)},y+\tau\right)$ de $\mathrm{C}(\theta_1)$; on est ramené à étudier les deux possibilités suivantes

$$(A(y)x+B(y),y+\tau)\quad(\star),\qquad\qquad \left(\frac{A(y)x+B(y)}{x+D(y)},y+\tau\right)\quad(\diamond).$$

On commence par l'éventualité $(\star)$; la commutation s'écrit alors

$$A(y+1)\left(x+\frac{1}{y}\right)+B(y+1)=A(y)x+B(y)+\frac{1}{y+\tau}$$

d'où $A(y+1)=A(y)$ qui implique que A est une constante $a\in\mathbb{C}$ et

$$B(y+1)-B(y)=\frac{1}{y+\tau}-\frac{a}{y}\quad(\star\star).$$

Notons que la somme des résidus de $B(y+1)-B(y)$ est nulle de sorte que a vaut 1. Supposons que τ ne soit pas entier. Alors la transformation $F=\left(x+\frac{1}{y+\tau}-\frac{1}{y},y+1\right)$ vérifie

$$F^n=\left(x+\frac{1}{y+\tau}+\frac{1}{y+\tau+1}+\ldots+\frac{1}{y+n-1+\tau}-\left(\frac{1}{y}+\ldots+\frac{1}{y+n-1}\right),y+n\right);$$

ainsi la suite $(\deg F^n)_n$ est non bornée. Ceci implique qu'il n'y a pas de solution à l'équation aux différences $(\star\star)$. En effet si B est solution de $(\star\star)$ la transformation $(x+B(y),y)$ conjugue F à $(x,y+1)$ dont la suite des degrés des itérés est à croissance bornée. Il en résulte que τ appartient à $\mathbb{Z}$. En composant ψ par un itéré convenable de θ_1 on se ramène à un élément de $\ker\pi_2$ ce qui termine le cas $(\star)$.

Pour $(\diamond)$ la commutation se traduit par

$$\frac{A(y+1)\left(x+\frac{1}{y}\right)+B(y+1)}{x+\frac{1}{y}+D(y+a)}=\frac{A(y)x+B(y)}{x+D(y)}+\frac{1}{y+\tau}$$

soit encore par

$$\left(A(y+1)\left(x+\frac{1}{y}\right)+B(y+1)\right)(x+D(y))(y+\tau)=\Big((A(y)x+B(y))(y+\tau)+x+D(y)\Big)\left(x+\frac{1}{y}+D(y+1)\right).$$

En particulier $A(y+1)-A(y)=\frac{1}{y+\tau}$; comme précédemment cette équation aux différences n'a pas de solution : un argument de croissance des degrés assure que $\left(x+\frac{1}{y+\tau},\frac{1}{y+1}\right)$ n'est pas conjugué à $\left(x,\frac{1}{y+1}\right)$.
Ceci montre que $\mathrm{C}(\theta_1)$ est engendré par les $(x+\alpha,y)$ et les itérés de θ_1.
L'exemple que l'on vient d'étudier fait partie d'une famille de transformations birationnelles pour lesquelles on peut décrire les centralisateurs.

Proposition 5.5. — *Considérons la famille* $(\theta_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}^*}$ *de transformations birationnelles donnée par* $\theta_\alpha=\left(\alpha x+\frac{1}{y},y+1\right)$.
Le centralisateur $\mathrm{C}(\theta_1)$ *de* θ_1 *est le groupe engendré par* $(x+a,y)$, *a appartenant à* $\mathbb{C}$, *et les itérés de* θ_1 *; c'est un groupe abélien isomorphe à* $\mathbb{C}\times\mathbb{Z}$.
Lorsque α *est différent de* 1, *on a* $\mathrm{C}(\theta_\alpha)=\langle\theta_\alpha^n\,|\,n\in\mathbb{Z}\rangle\simeq\mathbb{Z}$.

Démonstration. — L'éventualité $\alpha=1$ ayant déjà été traitée nous allons supposer que $\alpha\neq 1$. On vérifie, comme on l'a fait pour $\alpha=1$, que la croissance des degrés de θ_α n'est pas bornée. Soit $\psi=\left(\frac{A(y)x+B(y)}{C(y)x+D(y)},y+\tau\right)$ un élément de $\mathrm{C}(\theta_\alpha)$. Comme d'habitude on peut supposer que C vaut 0 ou 1.
Commençons par examiner la possibilité $C=1$; les conditions de commutation impliquent que

$$A(y+1)-\alpha A(y)=\frac{\alpha}{y+\tau}.$$

En examinant les pôles de la différence $A(y+1)-\alpha A(y)$ on constate que τ est un entier $n\in\mathbb{Z}$. Quitte à composer ψ par θ_α^{-n} on se ramène au cas $n=0$. Mais si

$$A(y+1)-\alpha A(y)=\frac{\alpha}{y}$$

possède une solution alors θ_α est conjugué à $(\alpha x,y+1)$ dont la croissance des degrés est bornée.
Reste à examiner la possibilité $\psi=(A(y)x+B(y),y+\tau)$ que l'on rencontre bien sûr au travers des itérés de θ_α. La commutation de ψ et θ_α indique que $A(y+1)=A(y)$, d'où $A(y)=a\in\mathbb{C}^*$, et produit l'équation aux différences

$$B(y+1)-\alpha B(y)=\frac{1}{y+\tau}-\frac{a}{y}.$$

En examinant les pôles des membres de cette égalité on constate que τ est un entier. Par suite en composant par un itéré ad-hoc de θ_α on se ramène à $\psi=(ax+B(y),y)$, $a\in\mathbb{C}^*$, et B vérifie

$$B(y+1)-\alpha B(y)=\frac{1-a}{y}\quad(\star).$$

Si $a=1$ on constate que la seule solution rationnelle de $(\star)$ est la solution nulle ce qui conduit à $\psi=\mathrm{id}$; enfin si $a\neq 1$ l'équation $(\star)$ ne possède pas de solution rationnelle, ceci résulte là encore d'un examen des pôles (ou encore d'un argument déjà rencontré de croissance des degrés). □

Reprenons l'exemple suivant évoqué dans l'introduction. Soit $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ la famille de transformations birationnelles donnée dans la carte affine $z=1$ par

$$\left(\frac{\alpha x+y}{x+1},\beta y\right),\qquad\qquad \alpha,\,\beta\in\mathbb{C}^*.$$

Proposition 5.6 **([10], Lemme 1.4, Théorème 1.6)**. — *Pour* α, β *génériques, la transformation* $f_{\alpha,\beta}$ *est à croissance linéaire et possède un centralisateur dénombrable ; plus précisément* $\mathrm{C}(f_{\alpha,\beta})$ *est constitué des puissances de* $f_{\alpha,\beta}$.

L'idée de la démonstration est la suivante : le point $p=(-1:\alpha:1)$ est « envoyé » par $f_{\alpha,\beta}$ sur une fibre de la fibration $y=$ cte et l'orbite positive de p est constituée de fibres de cette fibration. Soit ψ une transformation birationnelle qui commute à $f_{\alpha,\beta}$; puisque ψ contracte un nombre fini de courbes il existe un entier k positif (que l'on choisit minimal) tel que $f_{\alpha,\beta}^k(p)$ ne soit pas contractée par ψ. Quitte à remplacer ψ par $\widetilde{\psi}:=\psi f_{\alpha,\beta}^{k-1}$ on constate que $\widetilde{\psi}(p)$ est un point d'indétermination de $f_{\alpha,\beta}$; autrement dit $\widetilde{\psi}$ permute les points d'indétermination de $f_{\alpha,\beta}$. Une étude plus précise permet de montrer que p est fixé par $\widetilde{\psi}$. Les paramètres α et β étant génériques, l'adhérence de l'orbite négative de p par $f_{\alpha,\beta}$ est Zariski dense ; puisque $\widetilde{\psi}$ fixe chaque élément de l'orbite de p, $\widetilde{\psi}$ coïncide avec l'identité.

6. Récapitulatif

Le tableau qui suit résume les différents cas rencontrés à conjugaison birationnelle près. La colonne « $\mathrm{C}(\phi)$ » précise la suite exacte de π_2 en fonction des propriétés de H et $\mathrm{im}\,\pi_2$.

type ϕ	type $\pi_2(\phi)$	$\mathrm{H} = \ker \pi_{2}{}_{\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}$	$\mathrm{im}\, \pi_{2}{}_{\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}$	croissance des degrés	$\mathrm{C}(\phi)$	
$(x+1, y)$	y	J_a	$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$	bornée	$\mathrm{J}_a \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$	(ℓ_1)
(ax, y), $a \in \mathbb{C}$ a non racine de l'unité	y	J_m	$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$	bornée	$\mathrm{J}_m \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$	(ℓ_2)
$(a(y)x, y)$, $a \in \mathbb{C}(y) \setminus \mathbb{C}$	y	J_m	$\mathrm{Stab}(a)$ fini	linéaire	$\mathrm{J}_m \rtimes \overline{\mathrm{Stab}(a)}$, extension finie de $\mathrm{Ab}(\phi) = \mathrm{J}_m$	(ℓ_3)
$\left(\frac{c(y)x+F(y)}{x+c(y)}, y\right)$, $\deg F \geq 3$	y	J_F	fini	linéaire	extension finie de $\mathrm{Ab}(\phi) = \mathrm{J}_F$	(ℓ_4)
$\left(\frac{c(y)x+y}{x+c(y)}, y\right)$	y	J_y	$S(c;\alpha)$	linéaire	$\mathrm{J}_y \rtimes S(c;\alpha)$, extension finie de $\mathrm{Ab}(\phi) = \mathrm{J}_y$	(ℓ_5)
ϕ^k décrit par (ℓ_1)–(ℓ_5)	βy, β d'ordre fini k			celle de ϕ^k	$\mathrm{C}(\phi) \subset \mathrm{C}(\phi^k)$ décrit en (ℓ_1)–(ℓ_5)	(ℓ_6)
$(x + a(y), \beta y)$	βy, β d'ordre infini	$\{(x+\alpha, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$	$\subset \mathbb{C}^*$	linéaire	$0 \longrightarrow \mathrm{H} \simeq \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{C}(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}\, \pi_{2}{}_{\vert_{\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow 1$	(ℓ_7)
$(a(y)x, \beta y)$	βy, β d'ordre infini	$\{(\alpha x, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$	$\subset \mathbb{C}^*$	linéaire	$0 \longrightarrow \mathrm{H} \simeq \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{C}(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}\, \pi_{2}{}_{\vert_{\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow 1$	(ℓ_8)
« général multiplicatif »	βy, β d'ordre infini	de torsion, fini	$\subset \mathbb{C}^*$	linéaire	$0 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{C}(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}\, \pi_{2}{}_{\vert_{\mathrm{C}(\phi)}} \longrightarrow 1$ H fini	(ℓ_9)

type ϕ	type $\pi_2(\phi)$	$\mathrm{H}=\ker\pi_{2\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}$	$\mathrm{im}\,\pi_{2\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}$	croissance des degrés	$\mathrm{C}(\phi)$	
$(x+a(y),y+1)$ $\not\sim(x,y+1)$	$y+1$	$\big\{(x+\beta,y)\mid\beta\in\mathbb{C}\big\}$	$\subset\mathbb{C}$	linéaire	métabélien $0\longrightarrow\mathrm{H}\simeq\mathbb{C}\longrightarrow\mathrm{C}(\phi)\longrightarrow\mathrm{im}\,\pi_{2\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}\longrightarrow 1$	(ℓ_{10})
$(b(y)x,y+1)$ $\not\sim(x,y+1)$	$y+1$	$\big\{(\alpha x,y)\mid\alpha\in\mathbb{C}^*\big\}$	$\subset\mathbb{C}$	linéaire	$0\longrightarrow\mathrm{H}\simeq\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathrm{C}(\phi)\longrightarrow\mathrm{im}\,\pi_{2\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}\longrightarrow 1$	(ℓ_{11})
$(b(y)x,y+1)$ $\not\sim(x,y+1)$	$y+1$	$\langle(\beta x,y),\,\left(\frac{B(y)}{x},y\right)\mid\beta\in\mathbb{C}^*\rangle$	$\subset\mathbb{C}$	linéaire	$0\longrightarrow\mathrm{H}\simeq\mathbb{C}^*\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\longrightarrow\mathrm{C}(\phi)\longrightarrow\mathrm{im}\,\pi_{2\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}\longrightarrow 1$	(ℓ_{12})
« général additif »	$y+1$	de torsion, fini			$0\longrightarrow\mathrm{H}\longrightarrow\mathrm{C}(\phi)\longrightarrow\mathrm{im}\,\pi_{2\vert_{\mathrm{C}(\phi)}}\longrightarrow 1$ H fini	(ℓ_{13})

La ligne (ℓ_5) traite les cas $\deg F \leq 2$ (§4.4.2).
Notons que l'on peut présenter des formes normales lorsque le groupe H est suffisamment gros. Ainsi en (ℓ_9) et (ℓ_{13}) il n'y a pas de forme normale, tout du moins raisonnable. On constate aussi qu'à la ligne (ℓ_9) on retrouve la famille $(f_{\alpha,\beta})$ à centralisateur isomorphe à $\mathbb{Z}$ alors que les θ_α, $\alpha \not\in \{0, 1\}$, dont le centralisateur est aussi $\mathbb{Z}$, sont en (ℓ_{13}). Ces deux familles d'exemples montrent que génériquement à degré fixé le centralisateur d'une transformation birationnelle de J est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Références

[1] P. F. Baum and R. Bott. On the zeros of meromorphic vector-fields. In *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, pages 29–47. Springer, New York, 1970.

[2] J. Blanc. Elements and cyclic subgroups of finite order of the Cremona group. *Comment. Math. Helv.*, 86(2) :469–497, 2011.

[3] J. Blanc and J. Déserti. Degree growth of birational maps of the plane, `arxiv:1109.6810`, 2011.

[4] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust. On birational transformations of pairs in the complex plane. *Geom. Dedicata*, 139 :57–73, 2009.

[5] C. Bonatti, S. Crovisier, and A. Wilkinson. The C^1 generic diffeomorphism has trivial centralizer. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (109) :185–244, 2009.

[6] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 174(1) :299–340, 2011.

[7] S. Cantat and D. Cerveau. Analytic actions of mapping class groups on surfaces. *J. Topol.*, 1(4) :910–922, 2008.

[8] D. Cerveau and J. Déserti. Feuilletages et transformations périodiques. *Experiment. Math.*, 19(4) :447–464, 2010.

[9] D. Cerveau and R. Moussu. Groupes d'automorphismes de $(\mathbf{C},0)$ et équations différentielles $ydy+\cdots=0$. *Bull. Soc. Math. France*, 116(4) :459–488 (1989), 1988.

[10] J. Déserti. Expériences sur certaines transformations birationnelles quadratiques. *Nonlinearity*, 21(6) :1367–1383, 2008.

[11] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.

[12] J. Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome II*, volume 6 of *Publications Mathématiques d'Orsay 81 [Mathematical Publications of Orsay 81]*. Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1981. Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération. [Resurgent functions applied to iteration].

[13] J. Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome III*, volume 85 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. L'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects].

[14] T. Fisher. Trivial centralizers for axiom A diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 21(11) :2505–2517, 2008.

[15] T. Fisher. Trivial centralizers for codimension-one attractors. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(1) :51–56, 2009.

[16] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.

[17] M. H. Gizatullin. Rational G-surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1) :110–144, 239, 1980.

[18] X. Gómez-Mont and I. Luengo. The Bott Polynomial of a Holomorphic Foliation by Curves. *Ecuaciones Diferenciales y Singularidades (Colloque Medina 1995)*, Universidad de Valladolid (1997).

[19] G. Julia. Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 39 :131–215, 1922.

[20] G. Julia. *Œuvres de Gaston Julia. Vol. I*. Gauthier-Villars, Paris, 1968. Edited by Michel Hervé.

[21] H. W. E. Jung. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184 :161–174, 1942.

[22] S. Lamy. L'alternative de Tits pour Aut$[\mathbb{C}^2]$. *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.

[23] J. Palis. Rigidity of the centralizers of diffeomorphisms and structural stability of suspended foliations. In *Differential topology, foliations and Gelfand-Fuks cohomology (Proc. Sympos., Pontifícia Univ. Católica, Rio de Janeiro, 1976)*, volume 652 of *Lecture Notes in Math.*, pages 114–121. Springer, Berlin, 1978.

[24] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(1) :99–108, 1989.

[25] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(1) :81–98, 1989.

[26] R. Pérez Marco. Nonlinearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries. *Invent. Math.*, 119(1) :67–127, 1995.

[27] J. F. Ritt. Permutable rational functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 25(3) :399–448, 1923.

DOMINIQUE CERVEAU, Membre de l'Institut Universitaire de France. IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France. • *E-mail :* `dominique.cerveau@univ-rennes1.fr`

JULIE DÉSERTI, Universität Basel, Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel, Switzerland. *E-mail :* `julie.deserti@unibas.ch` • On leave from Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Projet Géométrie et Dynamique, Site Chevaleret, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France. *E-mail :* `deserti@math.jussieu.fr`