# LE GROUPE DE CREMONA EST HOPFIEN

*par*

Julie Déserti

***Résumé.*** — On décrit les endomorphismes du groupe de CREMONA et on en déduit son caractère hopfien.

Une transformation rationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même s'écrit

$$(x : y : z) \mapsto (P_0(x,y,z) : P_1(x,y,z) : P_2(x,y,z))$$

où les $P_i$ désignent des polynômes homogènes de même degré. Lorsqu'elle est inversible, on dit qu'elle est birationnelle ; par exemple l'involution de CREMONA $\sigma = (yz : xz : xy)$ est birationnelle. Le groupe des transformations birationnelles, noté $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, est aussi appelé groupe de CREMONA.

***Théorème 1* (Nœther, [1, 3]).** — *Le groupe de* CREMONA *est engendré par* $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ *et l'involution* $\sigma = (yz : xz : xy)$.

Un automorphisme $\tau$ du corps $\mathbb{C}$ induit un isomorphisme $\tau(.)$ de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ : à un élément $f$ de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ nous associons l'élément $\tau(f)$ obtenu en faisant agir $\tau$ sur les coefficients de $f$ exprimé en coordonnées homogènes. *Tout automorphisme du groupe de* CREMONA *s'obtient à partir de l'action d'un automorphisme de corps et d'une conjugaison intérieure* (**[5]**).
Ici nous nous intéressons aux endomorphismes du groupe de CREMONA :

***Théorème 2.*** — *Soit $\varphi$ un endomorphisme non trivial de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Il existe une immersion de corps $\lambda$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même et une transformation birationnelle $\psi$ telles que pour tout $f$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ on ait*

$$\varphi(f) = \lambda(\psi f \psi^{-1}).$$

*En particulier $\varphi$ est injectif.*

Une conséquence directe est la suivante :

***Corollaire 3.*** — *Le groupe de* CREMONA *est hopfien, i.e. tout endomorphisme surjectif de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est un automorphisme.*

La preuve du Théorème 2 repose en partie sur le résultat suivant que nous appliquons à $\Gamma = \mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ :

***Théorème 4*** **([4]).** — *Soient* $\Gamma$ *un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ *et* $\rho$ *un morphisme injectif de* $\Gamma$ *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. *Alors* $\rho$ *coïncide, à conjugaison birationnelle près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution* $u \mapsto {}^t u^{-1}$.

On travaille dans une carte affine $(x, y)$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Introduisons le groupe des translations :

$$\mathsf{T} = \{(x+\alpha, y+\beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}\}.$$

*Démonstration du Théorème 2.* — Puisque $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ est simple, $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est ou bien triviale, ou bien injective.

*1.* Supposons $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ triviale. Posons $h := (x, x-y, x-z)$ ; comme l'a remarqué Gizatullin ([6]), on a $(h\sigma)^3 = \mathsf{id}$. Ainsi $\varphi((h\sigma)^3) = \varphi(\sigma) = \mathsf{id}$, *i.e.* $\varphi$ est trivial d'après le Théorème 1.

*2.* Si $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est injective, alors $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}$ est, à conjugaison birationnelle près, le plongement canonique ou la contragrédiente.
*2.a.* Supposons que $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})} = \mathsf{id}$. Notons $\mathsf{H}$ le groupe des matrices $3\times 3$ triangulaires supérieures unipotentes. Posons :

$$f_\beta(x,y) := \varphi(x+\beta, y), \quad g_\alpha(x,y) := \varphi(x+\alpha y, y) \quad \text{et} \quad h_\gamma(x,y) := \varphi(x, y+\gamma).$$

Les transformations birationnelles $f_\beta$ et $h_\gamma$ commutent à $(x+1, y)$ et $(x, y+1)$ donc

$$f_\beta = (x+\lambda(\beta), y+\zeta(\beta)) \qquad \text{et} \qquad h_\gamma = (x+\eta(\gamma), y+\mu(\gamma))$$

où $\eta$, $\zeta$, $\mu$ et $\lambda$ sont des morphismes additifs de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ; puisque $g_\alpha$ commute à $(x+y, y)$ et $(x+1, y)$ il est de la forme $(x + A_\alpha(y), y)$. La relation

$$(x+\alpha y, y)(x, y+\gamma)(x+\alpha y, y)^{-1}(x, y+\gamma)^{-1} = (x+\alpha\gamma, y)$$

implique que, pour tous nombres complexes $\alpha$ et $\gamma$, nous avons $g_\alpha h_\gamma = f_{\alpha\gamma} h_{\alpha}$. Nous en déduisons que :

$$f_\beta = (x+\lambda(\beta), y), \qquad g_\alpha = (x+\Theta(\alpha)y+\varsigma(\alpha), y) \qquad \text{et} \qquad \Theta(\alpha)\mu(\gamma) = \lambda(\alpha\gamma).$$

En utilisant l'égalité

$$(x+\alpha)(x, \beta x + y)(x-\alpha, y)(x, y-\beta x) = (x, y-\alpha\beta)$$

on établit que $h_\gamma = (x, y+\mu(\gamma))$. Autrement dit

$$\varphi(x+\alpha, y+\beta) = (x+\lambda(\alpha), y+\mu(\beta)) \qquad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Ainsi $\varphi(\mathsf{T}) \subset \mathsf{T}$ et $\varphi(\mathsf{H}) \subset \mathsf{H}$ ; puisque $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ est engendré par $\mathsf{H}$ et $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$, l'image de $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ par $\varphi$ est contenue dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$. Le Théorème de classification de Borel et Tits ([2]) assure qu'à conjugaison intérieure près l'action de $\varphi$ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ provient d'une immersion de corps de $\mathbb{C}$ dans lui-même.
*2.b.* Supposons que la restriction de $\varphi$ à $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ coïncide avec la contragrédiente. En étudiant les images de $\mathsf{T}$ et $\mathsf{H}$ par $\varphi$, on montre que $\varphi(\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})) \subset \mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$. Toujours d'après [2] à conjugaison intérieure près, l'action de $\varphi$ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ provient ici d'une immersion de corps de $\mathbb{C}$ dans lui-même composée avec la contragrédiente.

*3.* Supposons donc que l'action de $\varphi$ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ coïncide avec celle d'une immersion de corps $\lambda$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même ou avec la composée d'une telle action et de la contragrédiente.

Posons $(\tau_1, \tau_2) = \varphi(x, 1/y)$. À partir de
$$(x, 1/y)(\alpha x, \beta y)(x, 1/y) = (\alpha x, y/\beta)$$
on obtient
$$\tau_1(\lambda(\alpha^{-1})x, \lambda(\beta^{-1})y) = \lambda(\alpha^{-1})\tau_1(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_2(\lambda(\alpha^{-1})x, \lambda(\beta^{-1})y) = \lambda(\beta)\tau_2(x,y)$$
ou
$$\tau_1(\lambda(\alpha)x, \lambda(\beta)y) = \lambda(\alpha)\tau_1(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_2(\lambda(\alpha)x, \lambda(\beta)y) = \frac{\tau_2(x,y)}{\lambda(\beta)}$$
suivant que la contragrédiente intervient ou non. Par suite $\varphi(x, 1/y) = (\pm x, \pm 1/y)$.
L'égalité $((y,x)(x,1/y))^2 = \sigma$ assure que $\varphi(\sigma) = \pm\sigma$. Notons $h := \left(\frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)$ ; la transformation $(h\sigma)^3$ est triviale (*voir* [**6**]) donc $(\varphi(h)\varphi(\sigma))^3$ doit aussi l'être. Puisque $h$ appartient à $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$, on a $\varphi(h) = h$ ou $\varphi(h) = (-x-y-1, y)$ suivant que $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}$ est l'identité ou la contragrédiente. Si $\varphi(h) = h$, alors $\varphi(\sigma) = \sigma$ et on conclut avec le Théorème 1. Lorsque $\varphi(h) = (-x-y-1, y)$, la seconde composante de $(\varphi(h)\varphi(\sigma))^3$ vaut $\pm 1/y$ ce qui est exclu. □

**Remerciements.** Le résultat précédent répond à une question d'E. Ghys que je remercie. Merci à D. Cerveau pour nos discussions animées et fructueuses.

## Références

[1] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] A. Borel and J. Tits. Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97:499–571, 1973.

[3] G. Castelnuovo. Le trasformationi generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36:861–874, 1901.

[4] J. Déserti. Groupe de Cremona et dynamique complexe: une approche de la conjecture de Zimmer. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 71701, 27, 2006.

[5] J. Déserti. Sur les automorphismes du groupe de Cremona. *Compos. Math.*, à paraître.

[6] M. Kh. Gizatullin. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5):909–970, 1134, 1982.

---

Julie Déserti • *E-mail :* `julie.deserti@univ-rennes1.fr`