ERRATUM
SUR LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DU PLAN AFFINE

par

J. Déserti

La démonstration de la Proposition 4.4 présentée dans la version parue dans J. Algebra comporte une erreur, on en donne ici une autre (l'énoncé de la Proposition 4.4 reste inchangé).

Proposition 4.4 — *Si φ est un automorphisme de* G, *il existe un élément ψ de* G *tel que :*

$$\varphi(\mathrm{E}) = \psi \mathrm{E} \psi^{-1}.$$

Démonstration. — L'ensemble H est préservé par l'automorphisme φ (lemme 4.1) ; donc chaque élément de $\varphi(\mathrm{E})$ est conjugué à un élément de E ou de A. D'après ([**?**], théorème 2.4) l'image de E par φ est conjugué à un sous-groupe de E ou de A.
Montrons que si $\varphi(\mathrm{E})$ est conjugué à un sous-groupe de A, il est conjugué à un sous-groupe de E. Quitte à faire une conjugaison, nous pouvons supposer que $\varphi(\mathrm{E})$ est contenu dans A. Le groupe E étant résoluble de longueur trois, $\varphi(\mathrm{E})$ l'est aussi ; notons K l'image de E par φ. L'adhérence de Zariski $\overline{\mathrm{K}}^Z$ de K étant résoluble, la composante neutre $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$ de $\overline{\mathrm{K}}^Z$ est donc un sous-groupe résoluble de

$$\{(ax+by+c, dy+e) \mid a,\ d \in \Bbbk^*,\ b,\ c,\ e \in \Bbbk\}.$$

Le groupe E contient $\bigcup_{p \geq 2} \mathrm{D}(p)$ où

$$\mathrm{D}(p) = \{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha,\ \beta \in \Bbbk^*,\ \alpha^p = \beta^p = 1\},$$

par suite $\overline{\mathrm{K}}^Z$ possède, à conjugaison dans A près, de nombreux $\mathrm{D}(p)$; en effet, pour chaque p premier, $\mathrm{D}(p)$ compte p^2 éléments, tous d'ordre p. Ainsi le groupe abélien maximal contenant $\varphi\left(\cup_p \mathrm{D}_p\right)$ est nécessairement à conjugaison près le tore $\{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha,\ \beta \in\ \Bbbk^*\}$. Remarquons qu'il existe un entier n tel que pour tout f dans $\overline{\mathrm{K}}^Z$ l'itéré n-ième de f est dans $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$; en particulier $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$ possède donc de nombreux $\mathrm{D}(p)$. Considérons l'image de $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$ par le morphisme « partie linéaire » L à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$. Elle contient elle aussi de nombreux groupes du type $\mathrm{D}(p)$; puisque c'est un groupe de Lie nous obtenons que $L(\overline{\mathrm{K}}_0^Z)$ coïncide avec $\{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha,\ \beta \in \Bbbk^*\}$. Par suite

$$\overline{\mathrm{K}}_0^Z = \{(ax+by+c, dy+e) \mid a,\ d \in \Bbbk^*,\ (b,\ c,\ e) \in \Lambda\},$$

où Λ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{k}^3$. Écrivons $\overline{\mathrm{K}}^Z$ sous la forme

$$\overline{\mathrm{K}}^Z = \overline{\mathrm{K}}_0^Z \cup \overline{\mathrm{K}}_1^Z \cup \ldots \cup \overline{\mathrm{K}}_s^Z.$$

Chaque $\overline{\mathrm{K}}_i^Z$ agit par conjugaison sur $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$. Soient $f=(f_1, Ax+By+C)$ dans $\overline{\mathrm{K}}_i^Z$, $i\neq 0$, et $g=(\alpha x, \beta y)$ dans D; il existe $\psi=(\psi_1, d'y+e')$ dans $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$ tel que

$$fg=\psi f.$$

En particulier nous avons

$$A(\alpha-d')=B(\beta-d')=0;$$

il s'en suit que pour tout $f=(f_1, Ax+By+C)$ dans $\overline{\mathrm{K}}_i^Z$ l'un des coefficients A ou B est nul. Par ailleurs pour tous $\psi=(ax+by+c, dy+e)$ dans $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$ et $f=(f_1, Ax+C)$ dans $\overline{\mathrm{K}}_j^Z$, $j\neq 0$, la composée $f\psi$ est encore dans $\overline{\mathrm{K}}_j^Z$. La seconde composante de $f\psi$ est de la forme $Aax+Aby+Ac+C$ donc soit $Aa=0$, soit $Ab=0$. Le coefficient a étant non nul nous avons l'alternative :

– tous les éléments de K sont triangulaires et K est conjugué à un sous-groupe de E;
– $\overline{\mathrm{K}}_0^Z$ est un sous-groupe de

$$\{(ax+c, dy+e) \mid a,\ d\in\mathbb{k}^*,\ c,\ e\in\mathbb{k}\}.$$

Dans cette dernière éventualité la situation est la suivante : il existe un sous-groupe E' de E d'indice n et de longueur de résolubilité 2. Autrement dit il existe un entier n tel que pour tout f dans E l'itéré n-ième de f appartienne à E' et pour tout g_1, g_2, g_3 et g_4 dans E' nous avons

$$[[g_1, g_2], [g_3, g_4]]=\mathrm{id}.$$

Or si

$$f_1=(2x,3y), \qquad f_2=(x+1,y+2), \qquad f_3=(x+y,y), \qquad f_4=(2x,y+1),$$

alors $[[f_1^n, f_2^n], [f_3^n, f_4^n]]$ est non trivial pour tout n non nul. Il en résulte que si $\varphi(\mathrm{E})$ est conjugué à un sous-groupe de A il est conjugué à un sous-groupe de E.
Il existe donc un automorphisme polynomial ψ de $\mathbb{k}^2$ pour lequel

$$\varphi(\mathrm{E})\subset\psi\mathrm{E}\psi^{-1};$$

la proposition 4.3 assure que cette inclusion est en fait une égalité. □

Remerciements. Je remercie aussi F. KUTZCHEBAUCH pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour m'avoir signalé une erreur dans la démonstration de la proposition 4.4
Merci aussi à Dominique Cerveau pour ses suggestions et remarques.

---

12 août 2009

J. DÉSERTI, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Projet Géométrie et Dynamique, Site Chevaleret, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France. Membre de l'ANR BLAN06-3_137237
E-mail : `deserti@math.jussieu.fr`