

---

# GÉOMÉTRIE CLASSIQUE DE CERTAINS FEUILLETAGES DE DEGRÉ DEUX

par

D. CERVEAU, J. DÉSSERTI, D. GARBA BELKO & R. MEZIANI

---

**Abstract.** — The set  $\mathcal{F}(2;2)$  of foliations of degree 2 on the complex projective plane can be identified with a ZARISKI's open set of a projective space of dimension 14 on which acts  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ . We classify, up to automorphisms of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , quadratic foliations with only one singularity. There are only four such foliations up to conjugacy; whereas three of them have a dynamic which can be easily described the dynamic of the fourth is still mysterious. This classification also allows us to describe the action of  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  on  $\mathcal{F}(2;2)$ . On the one hand we show that the dimension of the orbits is more than 6 and that there are exactly two orbits of dimension 6; on the other hand we obtain that the closure of the generic orbit in  $\mathcal{F}(2;2)$  contains at least seven orbits of dimension 7 and exactly one orbit of dimension 6.

*2000 Mathematics Subject Classification.* — 37F75 (primary), 32S65, 32M25, 32M05, 14L35 (secondary).

**Résumé.** — L'ensemble  $\mathcal{F}(2;2)$  des feuilletages de degré deux du plan projectif complexe s'identifie à un ouvert de ZARISKI dans un espace projectif de dimension 14 sur lequel agit le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ . Nous classifions, à automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  près, les feuilletages de degré deux ayant une unique singularité. À automorphisme près il y a 4 feuilletages ayant cette propriété; alors que trois ont une dynamique que l'on peut décrire facilement, celle du quatrième reste mystérieuse. Cette classification intervient dans la description de l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  sur  $\mathcal{F}(2;2)$ . Nous montrons d'une part que la dimension des orbites est supérieure ou égale à 6 et qu'il y a exactement deux orbites de dimension 6 dont l'une correspond à un feuilletage ne présentant qu'un seul point singulier; d'autre part nous obtenons que l'adhérence de l'orbite d'un élément générique de  $\mathcal{F}(2;2)$  contient au moins sept orbites de dimension 7 et une seule orbite de dimension 6. *Classification mathématique par sujets (2000).* — 37F75, 32S65, 32M25, 32M05, 14L35.

## Introduction

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe de codimension 1 et de degré  $N$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Si  $\pi: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est la projection canonique, le feuilletage homogène  $\pi^{-1}\mathcal{F}$  s'étend à  $\mathbb{C}^3$  et est défini par une 1-forme

$$\omega = a(X, Y, Z)dX + b(X, Y, Z)dY + c(X, Y, Z)dZ,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des polynômes homogènes de degré  $N+1$  sans composante commune vérifiant l'identité d'EULER :  $aX + bY + cZ = 0$ ; c'est le théorème de CHOW pour les feuilletages. Le lieu singulier  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  est donné par

$$\pi(\{a = b = c = 0\} \setminus \{0\}).$$

L'identité d'EULER assure l'existence de polynômes homogènes  $p, q, r$  de degré  $N$  tels que

$$\omega = p(X, Y, Z)(YdX - XdY) + q(X, Y, Z)(YdZ - ZdY) + r(X, Y, Z)(XdZ - ZdX).$$

Dans la carte affine  $Z = 1$  nous dirons abusivement que la 1-forme  $\omega$  s'écrit

$$p(x, y, 1)(ydx - xdy) - q(x, y, 1)dy - r(x, y, 1)dx.$$

Rappelons la notion de nombre de MILNOR  $\mu(\mathcal{F}, m)$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  en un point singulier  $m$ . Fixons une carte locale  $(u, v)$  telle que  $m = (0, 0)$ ; le germe de  $\mathcal{F}$  en  $m$  est défini, à multiplication par une unité en 0 près, par une 1-forme  $Edu + Fdv$ . Désignons par  $\langle E, F \rangle$  l'idéal engendré par  $E$  et  $F$ , alors

$$\mu(\mathcal{F}, m) = \dim \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle E, F \rangle};$$

c'est aussi la multiplicité d'intersection  $(C.C')_0$  des germes de courbes  $C = (E = 0)$  et  $C' = (F = 0)$ .

Sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  on dispose d'un théorème de type BEZOUT (voir [11]); si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de degré  $N$  on a

$$\sum_{m \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, m) = N^2 + N + 1. \quad (0.1)$$

Cette formule implique, en particulier, qu'il n'y a pas de feuilletage régulier (*i.e.* sans singularité) sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Nous noterons  $\mathcal{F}(2; N)$  l'ensemble des feuilletages de degré  $N$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

La classification des feuilletages de degré 0 ou 1 sur le plan projectif complexe est connue depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle ([11]) : un feuilletage de degré 0 sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est un pinceau de droites et possède une seule singularité ; tout feuilletage de degré 1 sur le plan projectif complexe possède trois singularités comptées avec multiplicité, a, au moins, une droite invariante et est donné par une forme fermée rationnelle. Pour  $N \geq 2$  peu de propriétés ont été établies, hormis la non existence générique de courbe invariante ([11, 3]). En particulier le problème du « minimal exceptionnel » n'est pas résolu, même en degré 2 (voir [2]). Ce problème, qui va dans le sens d'un énoncé de type Poincaré-Bendixon, consiste à décrire les différentes possibilités pour les adhérences (ordinaires) des feuilles. En particulier on ignore actuellement si une telle adhérence doit contenir nécessairement un point singulier. Une feuille dont l'adhérence ne contiendrait pas de singularité produirait alors un « minimal exceptionnel ». Il y a a priori plusieurs façons de l'aborder ; soit on cherche à dégager des propriétés des feuilletages génériques, soit au contraire on étudie les dégénérescences les plus compliquées que l'on essaie ensuite de déformer. C'est dans cette dernière optique que nous nous proposons de classier, à isomorphisme près, les feuilletages de degré deux de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ayant une unique singularité que l'on suppose être le point 0 de coordonnées  $(0, 0)$  dans la carte affine  $Z = 1$ . On peut a priori penser que ces feuilletages, du fait de la confluence de leurs singularités en une seule, sont très compliqués. Comme nous le verrons cette philosophie est dans certains cas mise en défaut. La formule (0.1) implique que  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 7$ . En particulier les germes de  $P$  et  $Q$  en 0 ne forment pas un système de coordonnées local en 0; en effet si c'était le cas  $\mu(\mathcal{F}, 0)$  vaudrait 1. Par suite, à isomorphisme linéaire près, nous avons les trois possibilités suivantes

1.  $\omega = ydy +$  termes de plus haut degré, la singularité est dite de type *nilpotent*, éventualité étudiée au § 1.1 ;
2.  $\omega = xdy +$  termes de plus haut degré, la singularité 0 est dite de type *selle-noeud*, ce cas sera l'objet du § 1.2 ;
3. le 1-jet de  $\omega$  est nul en 0 (voir § 1.3).

En analysant le point singulier 0, plus précisément en traduisant dans chacune des éventualités qui précèdent, l'égalité  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 7$  nous obtenons la description des feuilletages de degré deux de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ayant une unique singularité.

**Théorème 1.** — À automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  près, il y a quatre feuilletages de degré deux  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4$  sur le plan projectif complexe ayant une seule singularité. Ils sont décrits respectivement en carte affine par les 1-formes suivantes

1.  $\omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx)$ ;
2.  $\omega_2 = x^2 dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$ ;
3.  $\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$ ;
4.  $\omega_4 = (x + y^2 - x^2y)dy + x(x + y^2)dx$ .

On observe qu'aucun de ces feuilletages présente de singularité nilpotente. Notons que le feuilletage défini par les niveaux de  $\frac{x+y^2}{x^2}$  est de degré 1 et présente une unique singularité qui de plus est nilpotente. Les feuilletages  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  admettent respectivement pour intégrale première

$$\frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}, \quad \left(2 + \frac{1}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{y}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{1}{x}\right).$$

Notons que l'adhérence d'une feuille générique de  $\mathcal{F}_1$  est une cubique cuspidale ; remarquons aussi que  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  peuvent être définis par une 1-forme fermée rationnelle. Chacun de ces trois modèles compte au moins une courbe algébrique invariante ; il n'en est pas de même pour  $\mathcal{F}_4$ . En particulier  $\mathcal{F}_4$  ne peut posséder de structure transversalement projective ([5]) ; ceci implique d'ailleurs que  $\mathcal{F}_4$  n'a pas d'intégrale première de type LIOUVILLE. Les intégrales premières de  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  nous permettent de décrire leurs feuilles de façon immédiate.

**Proposition 2.** — Les feuilletages  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  possèdent la propriété suivante : pour tout point  $m$  régulier la feuille de  $\mathcal{F}_i$  passant par  $m$  est une courbe entière, i.e. une courbe paramétrée par une application holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

En fait  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  sont définis, dans la carte  $X = 1$ , par des champs de vecteurs polynomiaux complets.

Nous n'avons aucune idée de la nature des feuilles de  $\mathcal{F}_4$  ; par exemple on peut se demander si  $\mathcal{F}_4$  a un minimal exceptionnel ([2]), i.e. s'il existe une feuille de  $\mathcal{F}_4$  n'adhérant pas à la singularité. L'étude de ce problème sur cet exemple nous semble pertinent. Dans [1] CAMACHO et DE FIGUEIREDO montrent par des techniques numériques que le feuilletage de JOUANOLOU de degré 2 (nous en reparlerons plus loin) ne possède pas de minimal exceptionnel. Il serait intéressant d'adapter leurs méthodes pour l'étude du feuilletage  $\mathcal{F}_4$ .

Un théorème de LUNA et VUST affirme que si  $M$  est une variété algébrique affine,  $G$  un groupe réductif agissant algébriquement sur  $M$  avec isotropie générique réductive, l'orbite générique de  $G$  est fermée dans  $M$  (voir [12]). Dans cet esprit nous nous demandons si l'orbite  $O(\mathcal{F})$  sous l'action du groupe  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  d'un élément générique  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}(2;2)$  est fermée dans  $\mathcal{F}(2;2)$ . La réponse est non et la classification précédente entre ici en jeu.

**Théorème 3.** — Il existe un ensemble algébrique  $\Sigma$  non trivial, contenu dans  $\mathcal{F}(2;2)$  ayant la propriété suivante : pour tout feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}(2;2) \setminus \Sigma$  l'adhérence de l'orbite  $O(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  contient  $\mathcal{F}_1$ .

En particulier, pour tout  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}(2;2) \setminus \Sigma$ , l'orbite  $O(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  n'est pas fermée.

Donnons une interprétation géométrique de cet ensemble  $\Sigma$ . Un point régulier  $m$  du feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit d'inflexion ordinaire si la feuille passant par  $m$  a un point d'inflexion ordinaire en  $m$  ; désignons par  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  l'adhérence de ces points. Un feuilletage  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}(2;2) \setminus \Sigma$  si et seulement si  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  est non vide.

Le Théorème 3 n'est pas en contradiction avec l'énoncé de LUNA et VUST puisque  $\mathcal{F}(2;2)$  n'est pas une variété affine.

La dimension de l'orbite de  $\mathcal{F}_1$  est 6 qui est la dimension minimale possible, et ce en tout degré supérieur ou égal à 2 (Proposition 2.3). Nous montrons qu'il y a exactement deux orbites de dimension 6 (Proposition 2.7) ; la seconde est associée au feuilletage  $\mathcal{F}_5$  donné en carte affine par

$$\omega_5 = x^2 dy + y^2(xdy - ydx).$$

Ce feuilletage possède deux points singuliers et l'intégrale première  $\frac{y}{x} - \frac{1}{y}$  ; autrement dit il s'agit du pinceau de coniques  $(y^2 - xz) + \lambda xy$ . Pour des raisons de dimension les orbites  $O(\mathcal{F}_1)$  et  $O(\mathcal{F}_5)$  sont fermées.

De nombreux problèmes, en particulier la partie b) du 16<sup>ème</sup> problème de HILBERT, sont abordés par des techniques de perturbation en général à partir de feuilletages « hamiltoniens ». Ce qui précède montre en un certain sens que presque tout feuilletage de degré deux est une « petite perturbation » du feuilletage « hamiltonien »  $\mathcal{F}_1$ . Nous précisons le Théorème 3, en particulier dans l'énoncé qui suit.

**Théorème 4.** — *Si  $\mathcal{F}$  désigne un élément générique de  $\mathcal{F}(2;2)$  l'adhérence de l'orbite  $O(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  contient au moins sept orbites de dimension 7 et une seule orbite de dimension 6, celle de  $\mathcal{F}_1$ .*

D'autres considérations sur les adhérences d'orbites seront abordées dans le texte.

**Remerciements.** Merci à L. PIRIO pour sa disponibilité et à J. PEREIRA pour ses remarques.

Les deux premiers auteurs remercient l'IUF et l'ANR Symplexe (ANR BLAN06-3\_137237) qui ont contribué au bon déroulement de cette collaboration ainsi que le CIRM pour les excellentes conditions de travail dont ils ont bénéficié.

Les troisième et quatrième auteurs remercient l'IRMAR pour leurs séjours à Rennes.

## 1. Feuilletages de degré deux de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ayant une seule singularité

Considérons un feuilletage de degré deux  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ayant une unique singularité ; la classification menant au Théorème 1 est établie au cas par cas suivant la nature du 1-jet de  $\omega$  définissant  $\mathcal{F}$  au point singulier que nous supposons être l'origine 0 de la carte affine  $Z = 1$ . On écrira  $\omega$  sous la forme  $A dx + B dy + \phi(xdy - ydx)$  et on adoptera les notations suivantes

$$A = a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2, \quad B = b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2,$$

$$\phi = \phi_{2,0}x^2 + \phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2.$$

On désignera par  $P$  (resp.  $Q$ ) la composante en  $dx$  (resp.  $dy$ ) ; autrement dit on pose  $P = A - y\phi$  et  $Q = B + x\phi$ .

### 1.1. Étude du cas nilpotent. —

**Proposition 1.1.** — *Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré deux sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dont le lieu singulier est réduit à un point et  $\omega$  une 1-forme décrivant  $\mathcal{F}$  ; la partie linéaire de  $\omega$  ne peut être conjuguée à  $ydy$ .*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde : supposons que  $\mathcal{F}$  possède une unique singularité et que celle-ci soit nilpotente. À isomorphisme linéaire près  $\mathcal{F}$  est défini par la 1-forme  $\omega = Pdx + Qdy$  où

$$P(x,y) = a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{1,1}xy - y(\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy),$$

$$Q(x,y) = y + b_{2,0}x^2 + b_{0,2}y^2 + b_{1,1}xy + x(\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy).$$

Remarquons que la condition  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 7$  implique la nullité de  $a_{2,0}$ . Dans le cas contraire  $\langle P, Q \rangle_{,0} = \langle y, x^2 \rangle_{,0}$  dans l'anneau local  $\mathbb{C}\{x,y\}$  qui implique  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 2$ .

Ainsi le polynôme  $P$  est divisible par  $y$

$$P = yP_1 \quad \text{avec} \quad P_1 = a_{0,2}y + a_{1,1}x - (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy).$$

Comme  $\omega$  est à singularité isolée en  $0$ , le polynôme  $Q$  est non divisible par  $y$  et  $|b_{2,0}| + |\phi_{2,0}|$  est non nul. Posons  $C = (Q = 0)$  et  $C' = (P = 0)$ ; nous avons

$$\mu(\mathcal{F}, 0) = (C \cdot C')_0 = (C \cdot (y = 0))_0 + (C \cdot (P_1 = 0))_0.$$

Notons que la multiplicité d'intersection  $(C \cdot (y = 0))_0$  vaut 2 ou 3.

Si  $a_{1,1}$  est non nul  $(P_1 = 0)$  est transverse à  $C$  et  $(C \cdot (P_1 = 0))_0 = 1$ ; d'où l'inégalité  $\mu(\mathcal{F}, 0) \leq 4$ : contradiction. D'où l'égalité  $a_{1,1} = 0$ .

Sur la droite  $y = 0$  la 1-forme  $\omega$  s'écrit  $x^2(b_{2,0} + \phi_{2,0}x)dy$ ; si  $\phi_{2,0}b_{2,0} \neq 0$  le point  $(-\frac{b_{2,0}}{\phi_{2,0}}, 0)$  est une singularité de  $\omega$ , distincte de  $(0, 0)$ , ce qui est, par hypothèse, impossible. Il en résulte que le produit  $\phi_{2,0}b_{2,0}$  est nul.

Montrons, par l'absurde, que  $\phi_{2,0} \neq 0$ . Si  $\phi_{2,0} = 0$ , alors d'après ce qui précède  $b_{2,0} \neq 0$  et

$$\omega = (y + b_{2,0}x^2 + b_{0,2}y^2 + b_{1,1}xy + x(\phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy)) dy + y^2(a_{0,2} - \phi_{0,2}y - \phi_{1,1}x) dx.$$

Si  $a_{0,2}$  est différent de 0, alors  $a_{0,2} - \phi_{0,2}y - \phi_{1,1}x$  est une unité en  $(0, 0)$ ; de sorte que

$$\mu(\mathcal{F}, 0) = 2(C \cdot (y = 0))_0 = 4,$$

ce qui est absurde. Donc  $a_{0,2} = 0$  et  $\omega$  est du type

$$(y + b_{2,0}x^2 + b_{0,2}y^2 + b_{1,1}xy + x(\phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy)) dy - y^2(\phi_{0,2}y + \phi_{1,1}x) dx.$$

Si  $\phi_{1,1} \neq 0$  nous constatons que  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 5$ ; enfin si  $\phi_{1,1} = 0$  le coefficient  $\phi_{0,2}$  est non nul et  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 6$ , ces deux cas sont exclus. Donc  $\phi_{2,0} \neq 0$ .

Finalement  $\omega$  s'écrit

$$(y + b_{0,2}y^2 + b_{1,1}xy + x(\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy)) dy + y(a_{0,2}y - (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy)) dx, \quad \phi_{2,0} \neq 0.$$

La multiplicité d'intersection en  $0$  entre  $(Q = 0)$  et  $(y = 0)$  est 3. En outre nous avons au niveau des idéaux dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $0$

$$\begin{aligned} & \langle Q, a_{0,2}y - (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy) \rangle_0 \\ &= \langle y(1 + b_{0,2}y + (b_{1,1} + a_{0,2})x), a_{0,2}y - (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy) \rangle_0 \\ &= \langle y, x^2 \rangle_0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 3 + 2 = 5$ . Il n'existe donc pas de feuilletage de degré deux de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ayant une seule singularité qui soit de type nilpotent.  $\square$

## 1.2. Singularités de type selle-noeud. —

**Proposition 1.2.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré deux ayant une seule singularité. Si cette singularité est de type selle-noeud,  $\mathcal{F}$  est conjugué au feuilletage  $\mathcal{F}_4$  décrit par la 1-forme

$$\omega_4 = (x + y^2 - x^2y)dy + x(x + y^2)dx.$$

*Démonstration.* — Supposons comme précédemment que  $0$  soit l'unique singularité de  $\mathcal{F}$ . Une fois encore nous allons traduire l'égalité  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 7$ . À isomorphisme près  $\omega$  s'écrit  $Pdx + Qdy$  dans la carte  $Z = 1$  avec

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{1,1}xy - y(\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy), \\ Q(x, y) &= x + b_{2,0}x^2 + b_{0,2}y^2 + b_{1,1}xy + x(\phi_{2,0}x^2 + \phi_{0,2}y^2 + \phi_{1,1}xy). \end{aligned}$$

Montrons par l'absurde que la droite  $(x = 0)$  n'est pas invariante par  $\mathcal{F}$ . Si  $(x = 0)$  est invariante par  $\mathcal{F}$ , le coefficient  $b_{0,2}$  est nul. Comme  $\omega$  est à singularité isolée  $|a_{0,2}| + |\phi_{0,2}|$  est non nulle ; on en déduit l'égalité d'idéaux

$$\langle P, Q \rangle_{,0} = \langle a_{0,2}y^2 + \phi_{0,2}y^3, x \rangle_{,0}$$

qui conduit à  $\mu(\mathcal{F}, 0) \leq 3$  : contradiction.

Considérons un point générique  $m_0 = (0, y_0)$  de l'axe  $(x = 0)$  et  $\mathcal{D}$  la tangente à la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $m_0$  ; cette tangente est donc distincte de l'axe  $(x = 0)$ . Quitte à faire agir un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  préservant les axes  $(x = 0)$  et  $(y = 0)$ , envoyant  $m_0$  sur le point à l'infini  $(0 : 1 : 0)$  et  $\mathcal{D}$  sur la droite à l'infini  $Z = 0$ , nous pouvons nous ramener à  $\phi_{0,2} = 0$ . Maintenant, quitte à faire agir la transformation linéaire diagonale  $(b_{0,2}x, y)$ , on peut effectuer la normalisation  $b_{0,2} = 1$ .

Le théorème des fonctions implicites assure que la courbe  $Q = 0$  est en 0 un graphe local (calcul réalisé avec Maple)

$$\begin{aligned} x = x(y) = & -y^2 + b_{1,1}y^3 - (b_{1,1}^2 + b_{2,0})y^4 + (3b_{2,0}b_{1,1} - \phi_{1,1} + b_{1,1}^3)y^5 \\ & + (\phi_{2,0} - b_{1,1}^4 + 3\phi_{1,1}b_{1,1} - 2b_{2,0}^2 - 6b_{2,0}b_{1,1}^2)y^6 \\ & + (10b_{2,0}^2b_{1,1} - 4b_{2,0}\phi_{1,1} + 10b_{2,0}b_{1,1}^3 - 4\phi_{2,0}b_{1,1} - 6\phi_{1,1}b_{1,1}^2 + b_{1,1}^5)y^7 \pmod{y^8}. \end{aligned}$$

La condition  $\mu(\mathcal{F}, 0) = 7$  se traduit par le fait que  $P(x(y), y)$  est d'ordre précisément 7. En écrivant explicitement cette condition on obtient les égalités suivantes

$$a_{0,2} = a_{1,1} = 0, \quad \phi_{1,1} = -a_{2,0}, \quad \phi_{2,0} = -a_{2,0}b_{1,1}, \quad a_{2,0}b_{2,0} = 0 \quad a_{2,0}(3b_{1,1}b_{2,0} + a_{2,0}) \neq 0,$$

ces deux dernières égalités impliquant  $b_{2,0} = 0$  et  $a_{2,0} \neq 0$ .

Ainsi

$$\omega = (x + y^2 + b_{1,1}xy - x^2(b_{1,1}x + y)) dy + x(x + y(b_{1,1}x + y)) dx.$$

Quitte à remplacer  $\omega$  par  $\varphi^*\omega$ , où  $\varphi(x, y) = \left( \frac{x}{1-b_{1,1}y}, \frac{y}{1-b_{1,1}y} \right)$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini, dans les coordonnées affines  $(x, y)$ , par la 1-forme

$$\omega_4 = (x + y^2 - x^2y)dy + x(x + y^2)dx.$$

□

Les feuilletages de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  les plus « simples » sont ceux qui possèdent une structure transversalement projective ([5]). La proposition qui suit dit en particulier que  $\mathcal{F}_4$  ne possède pas de telle structure ; il devient alors naturel d'aborder pour ce feuilletage le problème du minimal exceptionnel. Le portrait de phase « réel » de la restriction de  $\mathcal{F}_4$  à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  présenté au § 3 fait penser que toutes les feuilles adhèrent à la singularité.

**Proposition 1.3.** — *Le feuilletage  $\mathcal{F}_4$  n'admet pas de courbe invariante algébrique. En particulier  $\mathcal{F}_4$  n'est pas transversalement projectif.*

*Démonstration.* — Rappelons que si  $C$  est une courbe algébrique invariante par  $\mathcal{F}_4$ , elle contient au moins une singularité de  $\mathcal{F}_4$ , i.e.  $C$  passe nécessairement par l'unique point singulier  $(0 : 0 : 1)$  de  $\mathcal{F}_4$  (voir [3, 11]). Comme ce dernier est de type selle-noeud, toute courbe invariante locale est soit lisse, soit à croisement ordinaire, c'est-à-dire du type  $xy + \text{termes de degré supérieur} = 0$  (voir [6]).

D'après [3] le degré de  $C$  est inférieur ou égal à 4. Si  $\deg C = 4$  alors  $C$  est réductible et  $\mathcal{F}_4$  est décrit par une forme logarithmique  $\sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$  (voir [3], théorème 1) ; en particulier le germe de  $\mathcal{F}_4$  en 0 est donné par une forme logarithmique. Or ce n'est pas le cas pour une singularité de type selle-noeud ([6]) ; donc  $\deg C \leq 3$ . Si  $C$  est irréductible lisse de degré 3, alors ([3], proposition 3) assure que  $\mathcal{F}_4$  a une intégrale première rationnelle ; il s'en suit que le germe de  $\mathcal{F}_4$  en 0 a une intégrale première méromorphe ce qui est encore impossible pour une

singularité selle-noeud. Si  $C$  est irréductible mais non lisse, il s'agit d'une cubique à point double donnée par une équation de la forme  $xy + \psi = 0$ , où  $\psi$  est un polynôme homogène de degré 3. Si  $C$  est réductible elle possède une branche de degré plus petit que 2, admettant une équation de l'un des deux types qui suivent

$$x + ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y + ax^2 + bxy + cy^2 = 0;$$

de même si le degré de  $C$  est inférieur ou égal à 2. Dans toutes ces situations on montre par un calcul Maple que  $\omega_4$  ne possède pas de telles courbes invariantes.

D'après ([5], corollaire 2.16) le feuilletage  $\mathcal{F}_4$  n'est pas transversalement projectif, la présence d'une telle structure nécessitant la présence d'une courbe algébrique invariante.  $\square$

**Remarque 1.4.** — Il résulte des travaux de SINGER ([15]) que  $\mathcal{F}_4$  n'est pas intégrable au sens de LIOUVILLE. De même  $\mathcal{F}_4$  ne peut être défini par une forme fermée rationnelle.

### 1.3. Cas 1-jet nul. —

Dans les trois lemmes qui suivent  $\mathcal{F}$  désigne un feuilletage de degré deux sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  défini par une 1-forme  $\omega$  et tel que

1. l'unique singularité de  $\mathcal{F}$  soit  $(0 : 0 : 1)$ ;
2. le 1-jet en 0 de  $\omega$  soit nul.

Dans ce cas

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy + \phi(x, y)(xdy - ydx),$$

où  $A$ ,  $B$  et  $\phi$  sont des polynômes homogènes de degré 2. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  étant de degré deux, le cône tangent  $xA + yB$  de  $\omega$  en 0 ne peut être identiquement nul. Le polynôme  $\phi$  n'est pas non plus identiquement nul sinon la droite à l'infini serait invariante par  $\mathcal{F}$  qui posséderait donc une singularité sur cette droite, ce qui est exclu. Nous allons raisonner suivant la nature du cône tangent qui, a priori, peut être trois droites, deux droites ou une droite.

**Lemme 1.5.** — *Le cône tangent de  $\omega$  ne peut être l'union de 3 droites distinctes.*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde ; nous pouvons supposer que le cône tangent est formé des droites  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $y - x = 0$ ; il s'en suit que  $\omega$  s'écrit ([6])

$$xy(y-x) \left( \lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{d(y-x)}{y-x} \right) + (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2)(xdy - ydx), \quad \lambda_i, \phi_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Sur la droite  $x = 0$  nous avons  $\omega = y^2(\lambda_1 - \phi_{0,2}y)dx$ . Comme 0 est l'unique singularité de  $\mathcal{F}$ , le produit  $\lambda_1\phi_{0,2}$  est nul. De la même façon, en restreignant  $\omega$  aux droites  $y = 0$  et  $y - x = 0$  nous obtenons

$$\lambda_2\phi_{2,0} = \lambda_3(\phi_{2,0} + \phi_{1,1} + \phi_{0,2}) = 0.$$

Le point  $(1 : 0 : 0)$  étant non singulier nous avons  $\phi_{2,0} \neq 0$  et par suite  $\lambda_2 = 0$ . Un argument analogue montre que  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont nuls, mais ceci contredit l'égalité  $\deg \mathcal{F} = 2$ .  $\square$

**Lemme 1.6.** — *Si le cône tangent de  $\omega$  en 0 est composé de deux droites distinctes, alors, à isomorphisme près,  $\mathcal{F}$  est défini par*

$$\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx).$$

*Démonstration.* — À conjugaison près  $\mathcal{F}$  est donné par la 1-forme ([6])

$$\omega = x^2y \left( \lambda \frac{dx}{x} + \delta \frac{dy}{y} + \varepsilon d \left( \frac{y}{x} \right) \right) + (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2)(xdy - ydx), \quad \lambda, \delta, \varepsilon, \phi_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Comme au Lemme 1.5, en considérant les restrictions de  $\omega$  aux droites  $x = 0$  et  $y = 0$ , nous établissons que

$$\varepsilon\phi_{0,2} = \delta\phi_{2,0} = 0.$$

Le point  $(1 : 0 : 0)$  n'est pas singulier donc  $\phi_{2,0} \neq 0$  et  $\delta = 0$ . De même en écrivant que  $(0 : 1 : 0)$  n'est pas singulier nous remarquons que  $\phi_{0,2} \neq 0$  et par suite que  $\varepsilon = 0$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}$  étant de degré deux  $\lambda$  est non nul ; nous pouvons donc supposer que  $\lambda = 1$ , d'où

$$\frac{\omega}{x^3y} = \frac{dx}{x^2} + \frac{(\phi_{2,0}x^2 + \phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2)}{x^2} d\left(\frac{y}{x}\right).$$

La transformation linéaire diagonale  $(\phi_{2,0}^{-1}x, (\phi_{2,0}\phi_{0,2})^{-1/2}y)$  nous permet de supposer que  $\phi_{2,0} = \phi_{0,2} = 1$  ; par conséquent

$$\omega = xydx + (x^2 + \phi_{1,1}xy + y^2)(xdy - ydx).$$

Quitte à conjuguer  $\omega$  par le difféomorphisme  $(\frac{x}{1+\phi_{1,1}y}, \frac{y}{1+\phi_{1,1}y})$  le coefficient  $\phi_{1,1}$  vaut 0, d'où l'énoncé.  $\square$

Remarquons que  $\frac{\omega_3}{x^3y}$  est fermée ; nous en déduisons que  $\omega_3$  admet pour intégrale première

$$\frac{y}{x} \exp\left(\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

**Lemme 1.7.** — *Si le cône tangent de  $\omega$  en 0 est réduit à une seule droite, alors à conjugaison près  $\mathcal{F}$  est défini par l'une des deux 1-formes suivantes*

1.  $\omega_1 = x^2dx + y^2(xdy - ydx)$ ;
2.  $\omega_2 = x^2dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$ .

*Démonstration.* — À conjugaison près,  $\mathcal{F}$  est donné par

$$\omega = x^3 \left( \lambda \frac{dx}{x} + d\left(\frac{\alpha xy + \beta y^2}{x^2}\right) \right) + (\phi_{2,0}x^2 + \phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2)(xdy - ydx), \quad \alpha, \beta, \lambda, \phi_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  étant de degré deux le coefficient  $\lambda$  est non nul et nous pouvons le supposer égal à 1. En outre, vu que 0 est l'unique singularité, nous obtenons, en restreignant  $\omega$  à la droite  $x = 0$ , que  $\phi_{0,2}\beta = 0$ . Puisque  $(0 : 1 : 0)$  n'est pas singulier  $\phi_{0,2} \neq 0$  et  $\beta = 0$ . Quitte à conjuguer  $\omega$  par la transformation linéaire diagonale  $(\phi_{0,2}^{1/2}x, y)$ , nous nous ramenons à  $\phi_{0,2} = 1$ . Ainsi  $\mathcal{F}$  est décrit par

$$\omega = x^2dx + (\alpha x + \phi_{2,0}x^2 + \phi_{1,1}xy + y^2)(xdy - ydx).$$

La conjugaison par le difféomorphisme  $(x, y - \frac{\phi_{1,1}}{2}x)$  permet d'annuler  $\phi_{1,1}$ . Puis en faisant agir

$$\left(\frac{x}{1+\phi_{2,0}y}, \frac{y}{1+\phi_{2,0}y}\right) \text{ si } \alpha = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{1 - \left(\frac{\phi_{2,0}}{\alpha}\right)x}, \frac{y}{1 - \left(\frac{\phi_{2,0}}{\alpha}\right)x}\right) \text{ si } \alpha \neq 0,$$

nous pouvons supposer que  $\phi_{2,0} = 0$ . Si  $\alpha = 0$  nous obtenons le premier modèle  $\omega_1$ . Si  $\alpha$  est non nul, alors, en conjugant par la transformation linéaire diagonale  $(\alpha^3x, \alpha^2y)$ , on se ramène à  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire au modèle  $\omega_2$ .  $\square$

Remarquons que  $\frac{\omega_1}{x^4}$  est fermée et a pour intégrale première  $\frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}$ ; quant à  $\omega_2$  elle admet pour intégrale première

$$\left(2 + \frac{1}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{y}{x}\right).$$

Les Lemmes 1.5, 1.6 et 1.7 impliquent l'énoncé qui suit.

**Proposition 1.8.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré deux sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dont l'unique singularité est  $(0 : 0 : 1)$ . Si le 1-jet de la forme  $\omega$  définissant  $\mathcal{F}$  au point singulier est nul alors, à isomorphisme près,  $\mathcal{F}$  est donné par l'une des trois 1-formes suivantes

1.  $\omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx)$ ;
2.  $\omega_2 = x^2 dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$ ;
3.  $\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$ .

**Remarque 1.9.** — Les quatre feuilletages  $\mathcal{F}_i$  ne sont pas linéairement conjugués. En effet  $\mathcal{F}_4$  est le seul à posséder une singularité de type selle-noeud, il n'est donc pas conjugué aux autres  $\mathcal{F}_i$ . La 1-forme  $\omega_3$  n'est pas linéairement conjuguée à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  car le cône tangent en 0 de  $\omega_3$  est formé de deux droites distinctes, alors que le cône tangent en 0 de  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$ ) est constitué d'une seule droite. Enfin  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  ne sont pas linéairement conjugués : le premier possède une intégrale première rationnelle mais pas le second.

Le Théorème 1 résulte des Propositions 1.1, 1.2, 1.8 et de la Remarque 1.9.

Par contre les feuilletages  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  sont birationnellement conjugués car ils le sont au feuilletage linéaire d'intégrale première  $xe^y$ ; leurs feuilles génériques sont transcendantales. Dans la carte  $X = 1$  les feuilletages  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  possèdent respectivement les intégrales premières suivantes

$$z - \frac{y^3}{3}, \quad (2 + z + 2y + y^2)e^{-y}, \quad y \exp\left(\frac{y^2}{2} - z\right).$$

Quitte à faire agir les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$

$$\left(y, z - \frac{y^3}{3}\right), \quad \text{resp. } (y, 2 + z + 2y + y^2), \quad \text{resp. } \left(y, z - \frac{y^2}{2}\right)$$

sur  $\mathcal{F}_1$ , resp.  $\mathcal{F}_2$ , resp.  $\mathcal{F}_3$  nous constatons que

1.  $\mathcal{F}_1$  est polynomialement conjugué au feuilletage décrit par  $z = \text{cte}$  ;
2.  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  sont polynomialement conjugués au feuilletage donné par les niveaux de  $ye^{-z} = \text{cte}$ .

Nous en déduisons la :

**Proposition 1.10.** — Les feuilletages  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  possèdent la propriété suivante : pour tout point  $m$  régulier la feuille de  $\mathcal{F}_i$  passant par  $m$  est une courbe entière, i.e. une courbe paramétrée par une application holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

En fait  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  sont définis, dans la carte  $X = 1$ , par des champs de vecteurs polynomiaux complets.

## 2. Orbites sous l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$

L'ensemble  $\mathcal{F}(2;N)$  est un ouvert de ZARISKI dans le projectivisé des 1-formes en les variables  $X, Y$  et  $Z$  de degré  $N+1$  satisfaisant l'identité d'EULER (il faut en effet que la condition « sans composante commune » évoquée dans l'introduction soit satisfaite). En particulier  $\mathcal{F}(2;2)$  est un ouvert de ZARISKI dans  $\mathbb{P}^{14}(\mathbb{C})$ . Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  agit sur  $\mathcal{F}(2;2)$ ; l'orbite d'un élément  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}(2;2)$  sous l'action de  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  est notée  $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ . Comme cette action est algébrique les orbites sont d'adhérence (ordinaire) algébrique dans  $\mathbb{P}^{14}(\mathbb{C})$ . Nous nous intéressons dans ce qui suit aux adhérences  $\overline{\mathcal{O}(\mathcal{F})}$  des orbites  $\mathcal{O}(\mathcal{F})$  dans  $\mathcal{F}(2;2)$  sous l'action du groupe  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .

### 2.1. Isotropies et dimensions des $\mathcal{O}(\mathcal{F}_i)$ . —

**Définition.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Le sous-groupe de  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  qui préserve  $\mathcal{F}$  s'appelle le *groupe d'isotropie* de  $\mathcal{F}$  et est noté  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F})$ ; c'est un groupe algébrique.

La Proposition suivante est de nature élémentaire, sa démonstration est laissée au lecteur.

**Proposition 2.1.** — *Les dimensions des  $\mathcal{O}(\mathcal{F}_i)$  sont les suivantes*

$$\dim \mathcal{O}(\mathcal{F}_1) = 6, \quad \dim \mathcal{O}(\mathcal{F}_2) = 7, \quad \dim \mathcal{O}(\mathcal{F}_3) = 7 \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{O}(\mathcal{F}_4) = 8.$$

Plus précisément les groupes  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_i)$  sont donnés par

1.  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_1) = \{(\beta^3x : \beta^2y : z + \alpha x) \mid \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^*\}$  qui est isomorphe au groupe des transformations affines de la droite ;
2.  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_2) = \{(x : \alpha x + y : -\alpha(\alpha + 2)x - 2\alpha y + z) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ ;
3.  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_3) = \{(x : \pm y : z + \alpha x) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ ;
4.  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_4) = \{\mathrm{id}, (jx : j^2y : z), (j^2x : jy : z)\}$  où  $j = e^{2i\pi/3}$ .

### 2.2. Minoration de la dimension de l'orbite d'un feuilletage de degré deux. —

Nous avons vu que la dimension de  $\mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$  est 6; nous montrons dans cette section que c'est la dimension minimale possible.

Notons  $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  l'algèbre de LIE des champs de vecteurs holomorphes globaux :  $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  est bien sûr l'algèbre de LIE du groupe d'automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $X$  un élément de  $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ ; nous dirons que  $X$  est une symétrie du feuilletage  $\mathcal{F}$  si le flot  $\exp(tX)$  est, pour chaque  $t$ , dans le groupe d'isotropie  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$ . Si  $\omega$  définit  $\mathcal{F}$  dans une carte affine,  $X$  est une symétrie de  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $L_X \omega \wedge \omega = 0$  où  $L_X$  désigne la dérivée de LIE de  $\omega$  suivant  $X$ . Remarquons que si  $\mathcal{F}$  est de degré supérieur à 2 et  $X$  une symétrie non triviale de  $\mathcal{F}$  alors  $X$  n'est pas tangent au feuilletage  $\mathcal{F}$  : si c'était le cas  $\mathcal{F}$  serait en effet de degré 0 ou 1.

**Lemme 2.2.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un élément de  $\mathcal{F}(2;N)$  défini par une 1-forme  $\omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux symétries de  $\mathcal{F}$  indépendantes sur  $\mathbb{C}$  alors  $\frac{\omega(X)}{\omega(Y)}$  est une intégrale première rationnelle non constante de  $\mathcal{F}$ .*

**Démonstration.** — D'après ce qui précède les polynômes  $\omega(X)$  et  $\omega(Y)$  sont non identiquement nuls. Les champs  $X$  et  $Y$  étant indépendants sur  $\mathbb{C}$ , la fonction rationnelle  $\frac{\omega(X)}{\omega(Y)}$  est non constante. Rappelons que si  $X$  est une symétrie de  $\mathcal{F}$  et si  $\omega(X) \neq 0$ , alors  $\omega(X)$  est un facteur intégrant de  $\omega$ , autrement dit  $\frac{\omega}{\omega(X)}$  est fermée. Puisque le quotient de deux facteurs intégrants de  $\omega$  est une intégrale première rationnelle de  $\mathcal{F}$ , la fonction  $\frac{\omega(X)}{\omega(Y)}$  est une intégrale première rationnelle non constante de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Si  $G$  désigne un groupe algébrique, nous notons  $\mathfrak{g}$  son algèbre de LIE.

**Proposition 2.3.** — Soient  $N$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $\mathcal{F}$  un élément de  $\mathcal{F}(2;N)$ . La dimension de  $O(\mathcal{F})$  est minorée par 6.

*Démonstration.* — Comme  $\dim \chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 8$  le Lemme 2.2 assure que si  $\dim O(\mathcal{F}) \leq 6$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  admet une intégrale première rationnelle. Dans [6] CERVEAU et MATTEI montrent, en utilisant le théorème de LÜROTH, qu'il existe une fonction rationnelle non constante  $f$ , définie à  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  près, telle que l'ensemble des intégrales premières rationnelles de  $\mathcal{F}$  soit isomorphe à  $\mathbb{C}(f)$ ; on dit alors que  $f$  est minimale. Choisissons  $f$  minimale pour  $\mathcal{F}$ . Remarquons que si  $\varphi$  appartient à  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F})$  alors  $f \circ \varphi$  est encore une intégrale première de  $\mathcal{F}$  et que, de plus, elle est minimale;  $f \circ \varphi$  s'écrit donc  $\tau_\varphi(f)$  avec  $\tau_\varphi$  dans  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ . Désignons par  $\tau$  le morphisme défini par

$$\tau: \mathrm{Iso}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi \mapsto \tau_\varphi.$$

Le noyau de  $\tau$  est un sous-groupe de  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F})$  nécessairement discret. En effet si  $\dim \ker \tau \geq 1$ , alors  $\ker \tau$  contient un flot dont le générateur infinitésimal est tangent à  $\mathcal{F}$  ce qui est impossible. Par suite

$$D_{id} \tau: \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

est injective; ceci implique l'inégalité

$$\dim \mathrm{Iso}(\mathcal{F}) = \dim \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) \leq \dim \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3.$$

Supposons que  $\dim \mathrm{Iso}(\mathcal{F}) = 3$  alors  $\mathfrak{iso}(\mathcal{F}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Soit  $G$  la composante neutre de  $\mathrm{Iso}(\mathcal{F})$ . À partir de  $\mathfrak{iso}(\mathcal{F}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  nous obtenons à isomorphisme près

$$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{ou} \quad G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

Dans chacune de ces éventualités nous héritons d'une action  $\rho$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Si  $\rho$  est irréductible  $\rho$  s'identifie au projectivisé de l'action naturelle  $\tilde{\rho}$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  sur l'espace des formes quadratiques en deux variables. Cette action n'a pas de feuilletage invariant de degré supérieur ou égal à 2; en effet si  $\mathcal{F}$  était invariant, son lieu singulier, qui n'est pas vide, le serait aussi: contradiction avec le fait que  $\tilde{\rho}$  ne laisse invariant aucun ensemble fini.

Si  $\rho$  est réductible, elle se décompose, au niveau de  $\mathbb{C}^3$ , en une action sur  $\mathbb{C}^2$  et une sur  $\mathbb{C}$  qui est nécessairement triviale. Par suite dans une carte affine ad-hoc  $\rho$  coïncide avec l'action linéaire standard

$$\left( \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (x, y) \right) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

Cette dernière action préserve un feuilletage: celui induit par le champ radial  $\mathcal{R} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ , qui est de degré 0, et c'est le seul. En effet soit  $\tilde{\mathcal{F}}$  un feuilletage non radial invariant par

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y);$$

il existe alors un point générique  $m$  tel que la tangente à la feuille  $\tilde{\mathcal{L}}_m$  passant par  $m$  ne soit pas la droite passant par l'origine et  $m$ . Nous pouvons supposer que  $m = (1, 0)$ ; le groupe

$$\{(x + \beta y, \delta y) \mid \beta \in \mathbb{C}, \delta \in \mathbb{C}^*\}$$

fixe  $m$ , doit fixer  $\tilde{\mathcal{F}}$  donc doit fixer la tangente à  $\tilde{\mathcal{L}}_m$  en  $m$  ce qui est impossible. Nous en déduisons que  $\dim \mathrm{Iso}(\mathcal{F}) \neq 3$ . Il s'en suit que  $\dim \mathrm{Iso}(\mathcal{F}) \leq 2$  et  $\dim O(\mathcal{F}) \geq 6$ .  $\square$

**Corollaire 2.4.** — Le feuilletage  $\mathcal{F}_1$  réalise la dimension minimale des orbites en degré 2.

Nous pouvons nous demander si  $\mathcal{F}_1$  est l'unique élément de  $\mathcal{F}(2;2)$  à satisfaire cette propriété ; nous allons voir dans le paragraphe suivant que ce n'est pas le cas.

### 2.3. Description des feuilletages de degré deux tels que $\dim \mathcal{O}(\mathcal{F}) = 6$ . —

**Proposition 2.5.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré  $N$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Si  $\dim \text{iso}(\mathcal{F}) = 2$ , alors  $\text{iso}(\mathcal{F})$  est isomorphe à l'algèbre du groupe des transformations affines de la droite.*

*Démonstration.* — D'après la classification des algèbres de LIE de dimension 2 (voir [8]) il suffit de montrer que  $\text{iso}(\mathcal{F})$  n'est pas abélienne. Pour ce faire raisonnons par l'absurde, *i.e.* supposons que  $\text{iso}(\mathcal{F})$  soit abélienne. Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux générateurs de  $\text{iso}(\mathcal{F})$ . La triangulation des algèbres résolubles de matrices assure l'existence d'une droite  $\mathcal{D}$  invariante par  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ . Nous pouvons alors nous ramener à la situation suivante :  $\mathcal{D}$  est la droite à l'infini et dans la carte  $\mathbb{C}^2$  les champs  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont affines. Dans cette même carte  $\mathcal{F}$  est défini par un champ polynomial à singularité isolée que nous noterons  $\mathcal{Z}$ . Soit  $V$  un élément de  $\text{iso}(\mathcal{F})$ . Puisque le flot de  $V$  laisse  $\mathcal{F}$  invariant, en tout point non singulier  $[V, \mathcal{Z}]$  est un multiple de  $\mathcal{Z}$ ; d'après [14] il existe une fonction holomorphe  $g$  sur  $\mathbb{C}^2$  telle que  $[V, \mathcal{Z}] = g\mathcal{Z}$ . Les champs  $V$  et  $\mathcal{Z}$  étant polynomiaux,  $[V, \mathcal{Z}]$  l'est aussi ; par suite  $g$  est rationnelle et holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  donc polynomiale. Le champ  $V$  étant affine nous avons  $\deg[V, \mathcal{Z}] \leq \deg \mathcal{Z}$ ; la relation  $[V, \mathcal{Z}] = g\mathcal{Z}$  entraîne que  $g$  est constante. Finalement nous obtenons

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = \lambda \mathcal{Z}, \quad [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = \eta \mathcal{Z}, \quad \lambda, \eta \in \mathbb{C}.$$

À combinaison linéaire et permutation près de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  nous pouvons nous ramener à

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = 0, \quad [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = \eta \mathcal{Z}, \quad \eta \in \mathbb{C}.$$

Commençons par supposer que  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont génériquement transverses. En un point générique il existe des coordonnées locales telles que

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{Y} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dans ce système de coordonnées  $\mathcal{Z}$  est de la forme

$$\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

L'égalité  $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = 0$  implique que  $\alpha$  et  $\beta$  ne dépendent pas de  $x$ . Alors  $[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = \eta \mathcal{Z}$  entraîne que  $\alpha'(y) = \eta \alpha(y)$  et  $\beta'(y) = \eta \beta(y)$ . On obtient ainsi

$$\mathcal{Z} = e^{\eta y} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{C},$$

qui se réécrit  $\mathcal{Z} = e^{\eta y}(\gamma \mathcal{X} + \delta \mathcal{Y})$ . Sur un ouvert  $\mathcal{Z}$  et  $\gamma \mathcal{X} + \delta \mathcal{Y}$  sont donc parallèles ; nous en déduisons que c'est le cas partout. Ainsi le feuilletage défini par  $\mathcal{Z}$  est linéaire : contradiction.

Supposons que  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  soient partout colinéaires ; par conséquent en un point générique nous pouvons écrire

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{Y} = \delta(y) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \delta \in \mathbb{C}\{y\}.$$

Notons que  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  n'étant pas  $\mathbb{C}$ -colinéaires,  $\delta$  est non constante. À partir de  $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = 0$ , nous obtenons

$$\mathcal{Z} = \alpha(y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\{y\};$$

remarquons que  $\beta \neq 0$  sinon  $Z$  serait colinéaire à  $X$  et définirait un feuilletage linéaire. Par ailleurs  $[Y, Z] = \eta Z$  conduit à  $\eta\alpha(y) = 0$  et  $\beta(y)(\eta + \delta'(y)) = 0$ , soit à  $\alpha \equiv 0$  et  $\delta'(y) = -\eta \neq 0$ . Autrement dit

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = (-\eta y + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = \beta(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \eta \in \mathbb{C}^*, \varepsilon \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}\{y\}.$$

Par suite  $\mathcal{F}$  a une intégrale première rationnelle  $f$  (Lemme 2.2) qui, dans les coordonnées locales  $(x, y)$  ne dépend pas de  $y$  et s'écrit donc  $f(x)$ . Le flot de  $Y$  est donné par  $(x + t\delta(y), y)$ ; puisque  $Y$  est une symétrie de  $\mathcal{F}$ , la composée  $f(x + t\delta(y))$  ne dépend pas de  $y$ , i.e.  $\delta$  est une constante ce qui, comme nous l'avons déjà vu, est impossible.  $\square$

**Lemme 2.6.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré deux sur le plan projectif complexe. Supposons que l'algèbre de LIE  $\text{iso}(\mathcal{F})$  soit de type affine, i.e. engendrée par deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  tels que  $[X, Y] = Y$ . Il existe une droite dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  invariante par les champs  $X$  et  $Y$  et telle que tout point singulier de  $\mathcal{F}$  appartienne à cette droite.

*Démonstration.* — Puisque  $[X, Y] = Y$ , le théorème d'ENGEL assure l'existence d'une droite  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , que nous pouvons supposer être la droite  $Z = 0$ , invariante par  $X$  et  $Y$ . Plaçons-nous dans la carte  $Z = 1$ ; en reprenant un argument de la démonstration de la Proposition 2.5 nous avons

$$[X, Z] = \lambda Z, \quad [Y, Z] = \eta Z, \quad \lambda, \eta \in \mathbb{C}.$$

L'identité de JACOBI

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

entraîne  $\eta = 0$ , c'est-à-dire  $[Y, Z] = 0$ .

Si toutes les singularités de  $\mathcal{F}$  sont sur la droite à l'infini  $\mathcal{D}$  le lemme est démontré.

Supposons qu'il existe un point singulier  $m$  à distance finie pour le feuilletage  $\mathcal{F}$ ; évidemment ce point est singulier pour  $X$  et  $Y$ . Nous pouvons nous ramener à  $m = (0, 0)$  et

$$X = -(1 + \alpha)x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Quant à  $Z$  nous l'écrivons sous la forme  $Z_1 + Z_2 + \phi\mathcal{R}$  où  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ) désigne un champ linéaire (resp. quadratique) et  $\mathcal{R}$  le champ radial. L'égalité  $[Y, Z] = 0$  conduit à  $[Y, Z_1] = [Y, Z_2] = 0$  et  $\phi$  est du type  $\varepsilon y^2$ . À partir de  $[Y, Z_1] = 0$  et  $[Y, Z_2] = 0$  nous obtenons

$$Z_1 = (\beta x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_2 = (\delta y^2 + \kappa xy) \frac{\partial}{\partial x} + \kappa y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \beta, \gamma, \kappa, \delta \in \mathbb{C}.$$

Nous constatons que si  $\beta$  est nul,  $Z$  est divisible par  $y$ , donc n'est pas associé à un feuilletage de degré deux. Il s'en suit que  $\beta$  est non nul ce qui implique que  $\lambda = 0$ . En écrivant explicitement  $[X, Z] = 0$  nous avons

$$\gamma = \alpha\varepsilon = \alpha\kappa = \delta(\alpha - 1) = 0.$$

Si  $\delta$  est nul,  $Z$  est colinéaire au champ radial ce qui ne peut arriver. Ainsi  $\alpha = 1$  et  $\varepsilon = \kappa = 0$ ; d'où

$$Z = \beta\mathcal{R} + \delta y^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Nous pouvons évidemment normaliser les coefficients  $\beta$  et  $\delta$  à 1. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini par la 1-forme  $ydx - xdy - y^2dy$  qui possède l'intégrale première  $\frac{x}{y} - y$ ; ses points singuliers sont  $(0 : 0 : 1)$  et  $(1 : 0 : 0)$  et la droite  $y = 0$  satisfait l'énoncé.  $\square$

Les feuilletages de degré deux dont l'orbite est de dimension maximale 6 sont classifiés par la :

**Proposition 2.7.** — Soit  $\mathcal{F}$  un élément de  $\mathcal{F}(2;2)$ . Supposons que l'algèbre de LIE  $\text{iso}(\mathcal{F})$  soit de dimension 2; alors  $\mathcal{F}$  est, à action d'un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  près, défini par l'une des 1-formes suivantes

1.  $\omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx)$ ;
2.  $\omega_5 = x^2 dy + y^2(xdy - ydx)$ .

Dit autrement les orbites associées sont les seules orbites de dimension 6. Elles sont fermées dans  $\mathcal{F}(2;2)$ . De plus nous avons

$$\begin{aligned} \text{Iso}(\mathcal{F}_1) &= \{(\alpha^3 x, \alpha^2 y), \left(\frac{x}{1+\beta x}, \frac{y}{1+\beta x}\right) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\}, \\ \text{Iso}(\mathcal{F}_5) &= \left\{(\alpha^2 x, \alpha y), \left(\frac{x}{1+\beta y}, \frac{y}{1+\beta y}\right) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\right\}; \end{aligned}$$

ces deux groupes ne sont pas conjugués.

**Remarque 2.8.** — Le feuilletage  $\mathcal{F}_5$  décrit par  $\omega_5$  intervient déjà dans la démonstration du Lemme 2.6.

*Démonstration.* — D'après la Proposition 2.5 et le Lemme 2.6 il existe deux symétries  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{F}$  telles que  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$ . Ces deux symétries préservent une droite  $\mathcal{D}$  que nous supposons être  $y = 0$ . De plus  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  est contenu dans  $\mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{F}$  a un unique point singulier nous savons d'après le Théorème 1 et la Proposition 2.1 que  $\mathcal{F}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_1$ . Nous nous ramenons donc au cas où  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  contient  $(0 : 0 : 1)$  et  $(1 : 0 : 0)$ . Notons que  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont singuliers en ces deux points; nous en déduisons en utilisant l'identité  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$  que

$$x = (\lambda x + \varepsilon y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha y \mathcal{R}, \quad \mathcal{Y} = \gamma y \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \mathcal{R} \quad \text{avec} \quad (\eta - \lambda)\gamma = \gamma \quad \text{et} \quad \eta\beta = \beta$$

avec  $\lambda, \varepsilon, \eta, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$ . Considérons un champ de vecteurs polynomial  $\mathcal{Z}$  définissant  $\mathcal{F}$  dans la carte  $Z = 1$ ; écrivons-le sous la forme

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \phi \mathcal{R}$$

où  $\mathcal{Z}_i$  est un champ de vecteurs homogène de degré  $i$  et  $\phi$  une forme quadratique. Nous pouvons supposer que la droite à l'infini n'est pas invariante par  $\mathcal{F}$  ce qui s'interprète comme suit :  $\phi$  n'est pas identiquement nulle. Puisque  $\mathcal{F}$  est singulier en  $(1 : 0 : 0)$ , la forme quadratique  $\phi$  est du type suivant

$$\phi = \phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2.$$

En reprenant un argument évoqué précédemment le fait que  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  soient des symétries de  $\mathcal{F}$  se traduit par

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = (a_1 + b_1x + c_1y)\mathcal{Z} \tag{2.1}$$

$$[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = (a_2 + b_2x + c_2y)\mathcal{Z} \tag{2.2}$$

les  $a_i, b_i$  et  $c_i$  désignant des complexes.

De nouveau on utilise l'identité de JACOBI  $[\mathcal{X}, [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]] + [\mathcal{Y}, [\mathcal{Z}, \mathcal{X}]] + [\mathcal{Z}, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]] = 0$  qui implique ici

$$x(a_2 + b_2x + c_2y) - \mathcal{Y}(a_1 + b_1x + c_1y) = a_2 + b_2x + c_2y.$$

Les champs  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  s'annulant en 0, nous obtenons en particulier que  $a_2$  est nul puis que

$$\alpha(b_2x + c_2y) = \beta(b_1x + c_1y).$$

L'étude des termes de plus haut degré dans (2.1) conduit à  $[\alpha y \mathcal{R}, \phi \mathcal{R}] = (b_1x + c_1y)\phi \mathcal{R}$ ; puisque  $\phi$  est non nulle nous en déduisons que

$$\alpha y = b_1x + c_1y.$$

De même en considérant les termes de plus haut degré dans (2.2) nous obtenons

$$\beta y = b_2 x + c_2 y.$$

Autrement dit

$$b_1 = b_2 = 0, \quad \alpha = c_1 \quad \text{et} \quad \beta = c_2.$$

La preuve se sépare en deux suivant la nullité ou non de  $\gamma$ .

Dans un premier temps supposons que  $\gamma$  soit nul ; nous pouvons alors nous ramener à  $\beta = 1$  et, quitte à soustraire  $\alpha\gamma$  à  $x$ , à  $\alpha = 0$ . En réécrivant la relation  $[x, \gamma] = \gamma$  nous constatons que  $\eta = 1$ , *i.e.*

$$x = (\lambda x + \varepsilon y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \gamma = y\mathcal{R}.$$

Les égalités (2.1) et (2.2) sont désormais du type

$$[x, z] = a_1 z \quad \text{et} \quad [\gamma, z] = yz.$$

Cette dernière entraîne que

$$-z_1(y)\mathcal{R} + yz_2 - z_2(y)\mathcal{R} + y\phi\mathcal{R} = y(z_1 + z_2 + \phi\mathcal{R})$$

d'où  $-z_1(y)\mathcal{R} = yz_1$  et  $z_2(y) = 0$ . Il s'en suit que

$$z = Q \frac{\partial}{\partial x} + \phi\mathcal{R} \quad \text{avec} \quad Q = q_{2,0}x^2 + q_{1,1}xy + q_{0,2}y^2,$$

les formes quadratiques  $Q$  et  $\phi$  étant non nulles et sans facteur commun ; ce qui implique en particulier la non nullité de  $q_{2,0}$ .

L'identité  $[x, z] = a_1 z$  conduit au système

$$(\diamond) \begin{cases} (\lambda x + \varepsilon y) \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} = (a_1 + \lambda)Q \\ (\lambda x + \varepsilon y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = a_1 \phi \end{cases}$$

Montrons que nous pouvons supposer que  $\varepsilon = 0$ . Remarquons que si  $\lambda$  vaut 1, la décomposition de JORDAN de l'opérateur de dérivation  $x$  (pour lequel  $Q$  et  $q$  sont vecteurs propres) implique que

$$\varepsilon y \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon y \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

Puisque  $Q$  et  $\phi$  sont non nulles et sans facteur commun,  $\varepsilon$  est nécessairement nul. Enfin si  $\lambda$  est différent de 1, nous invoquons la diagonalisation pour nous ramener à  $\varepsilon = 0$ ; notons que cette diagonalisation n'altère pas la forme de  $\phi$ , *i.e.*  $\phi$  est toujours du type  $\phi_{1,1}xy + \phi_{0,2}y^2$ .

Le système  $(\diamond)$  se réécrit alors

$$(\lambda + 1 - a_1)\phi_{1,1} = (2 - a_1)\phi_{0,2} = (\lambda - a_1)q_{2,0} = (1 - a_1)q_{1,1} = (2 - \lambda - a_1)q_{0,2} = 0.$$

Comme le coefficient  $q_{2,0}$  est non nul on a  $\lambda = a_1$  et  $\phi_{1,1} = 0$ . La forme quadratique  $\phi$  étant non triviale  $\phi_{0,2}$  est non nul et on obtient  $\lambda = a_1 = 2$  et  $q_{1,1} = q_{2,0} = 0$ .

Par conséquent

$$z = q_{2,0}x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \phi_{0,2}y^2\mathcal{R}$$

et nous pouvons évidemment normaliser les coefficients  $q_{2,0}$  et  $\phi_{0,2}$  à 1. Nous obtenons alors le feuilletage  $\mathcal{F}_5$  défini par  $\omega_5$ .

Maintenant nous étudions la deuxième éventualité où  $\gamma \neq 0$ ; on peut supposer que  $\gamma = 1$ . Dans ce cas on a  $\eta = \lambda + 1$ . Quitte à remplacer  $x$  par  $x - \varepsilon\gamma$  on se ramène à

$$x = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda + 1)y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha y \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = y \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \mathcal{R}.$$

Les égalités  $[x, z] = (a_1 + \alpha y)z$  et  $[\mathcal{Y}, z] = \beta y z$  ajoutées à l'identité de JACOBI nous conduisent à  $\lambda\beta = 0$ . Si  $\beta = 0$  nous remarquons que le champ  $\mathcal{Y} = y \frac{\partial}{\partial x}$  est conjugué via un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  à  $y\mathcal{R}$ . En permutant le rôle des points singuliers nous nous ramenons au premier cas déjà traité.

Lorsque  $\lambda = 0$  on peut supposer par conjugaison que  $\beta$  vaut 1 ce qui nous conduit à

$$x = -\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = y \frac{\partial}{\partial x} + y \mathcal{R},$$

quitte à soustraire  $\alpha\mathcal{Y}$  à  $x$ .

Via une transformation linéaire de  $\mathbb{C}^2$  qui n'affecte ni le champ  $\mathcal{Y}$  ni le fait que  $\phi$  soit non nul, nous pouvons diagonaliser  $x$

$$x = y \frac{\partial}{\partial y};$$

on vérifie alors que  $[x, z] = a_1 z$ . Avec les notations habituelles nous avons  $\phi_{1,1}(1 - a_1) = \phi_{0,2}(2 - a_1) = 0$  de sorte que  $a_1$  vaut 1 ou 2.

Si  $a_1 = 1$  le coefficient  $\phi_{0,2}$  est nul et on constate que  $z$  est divisible par  $y$  et ne définit donc pas un feuilletage de degré deux.

Si  $a_1 = 2$ , alors  $\phi_{1,1} = 0$  et, toujours en invoquant le fait que  $[x, z] = a_1 z$ , on vérifie encore que  $z$  est divisible par  $y$ . L'éventualité  $\gamma \neq 0$  n'arrive pas et la proposition est démontrée.  $\square$

#### 2.4. Adhérences d'orbites. —

Nous commençons l'étude des adhérences d'orbites par celles des  $O(\mathcal{F}_i)$  dans  $\mathcal{F}(2; 2)$  pour  $i = 1, 2, 3$  et 5; celle de  $O(\mathcal{F}_4)$  résultera d'un principe plus général.

La définition suivante nous sera utile.

**Définition.** — Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux feuilletages. On dit que  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}'$  si l'adhérence  $\overline{O(\mathcal{F})}$  (dans  $\mathcal{F}(2; 2)$ ) de  $O(\mathcal{F})$  contient  $O(\mathcal{F}')$  et  $O(\mathcal{F}) \neq O(\mathcal{F}')$ .

**Remarque 2.9.** — Si  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}'$  nous avons l'inégalité  $\dim O(\mathcal{F}') < \dim O(\mathcal{F})$ .

**Remarque 2.10.** — Si  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}'$  le nombre de points singuliers de  $\mathcal{F}'$  (comptés sans multiplicité) est plus petit ou égal à celui de  $\mathcal{F}$ . En particulier si  $\mathcal{F}$  n'a qu'un point singulier et dégénère sur  $\mathcal{F}'$  alors  $\#\text{Sing}(\mathcal{F}') = 1$ .

**Proposition 2.11.** — **1.** Les orbites  $O(\mathcal{F}_1)$  et  $O(\mathcal{F}_5)$  sont fermées.

**2.** Pour  $i = 2$  et 3 nous avons :  $\overline{O(\mathcal{F}_i)} = O(\mathcal{F}_i) \cup O(\mathcal{F}_1)$ .

**Démonstration.** — Le point **1.** résulte comme nous l'avons dit du fait que  $O(\mathcal{F}_1)$  et  $O(\mathcal{F}_5)$  réalisent la dimension minimale.

La Remarque 2.10 et des raisons de dimension font que les  $\mathcal{F}_i$ , avec  $i = 2, 3$ , ne peuvent dégénérer que sur  $\mathcal{F}_1$ . Montrons qu'il en est ainsi. Considérons la famille d'automorphismes  $\varphi = \varphi_\varepsilon = \left(\frac{x}{\varepsilon^3}, \frac{y}{\varepsilon^2}\right)$ . Nous avons

$$\varepsilon^9 \varphi^* \omega_2 = x^2 dx + (\varepsilon x + y^2)(x dy - y dx)$$

qui tend vers  $\omega_1$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Le feuilletage  $\mathcal{F}_2$  dégénère donc sur  $\mathcal{F}_1$ .

Pour montrer que  $\mathcal{F}_3$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$  nous procédons comme suit. Nous considérons la famille  $(\omega_\varepsilon)$  donnée par

$$\omega_\varepsilon = x(\varepsilon y + (1 - \varepsilon)x)dx + (\varepsilon x^2 + y^2)(x dy - y dx)$$

et définissant la famille de feuilletages  $(\mathcal{G}_\varepsilon)$ . Nous constatons que

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_3 \quad \text{et} \quad \mu(\mathcal{G}_\varepsilon, 0) = 7.$$

Par suite pour chaque  $\varepsilon$ , à conjugaison près,  $\mathcal{G}_\varepsilon$  est l'un des  $\mathcal{F}_i$ . Comme le 1-jet de  $\omega_\varepsilon$  est nul,  $\mathcal{G}_\varepsilon$  est conjugué à  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  ou  $\mathcal{F}_3$ . Pour des raisons de dimension  $O(\mathcal{F}_1)$  (resp.  $O(\mathcal{F}_2)$ ) ne peut adhérer à  $O(\mathcal{F}_3)$ . Il en résulte que pour  $\varepsilon$  voisin de 1 le feuilletage  $\mathcal{G}_\varepsilon$  appartient à  $O(\mathcal{F}_3)$ . Ainsi  $\mathcal{G}_\varepsilon$  est dans  $O(\mathcal{F}_3)$  pour presque tout  $\varepsilon$  et  $\mathcal{F}_3$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ .  $\square$

Rappelons une notion introduite par PEREIRA ([13]).

**Définition.** — Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $m$  un point régulier de  $\mathcal{F}$ . On dit que  $m$  est d'inflexion ordinaire pour  $\mathcal{F}$  si la feuille  $\mathcal{L}_m$  de  $\mathcal{F}$  passant par  $m$  a un point d'inflexion ordinaire en  $m$ ; notons  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  l'adhérence de l'ensemble de ces points.

**Exemples.** — 1. Dans la carte  $X = 1$  le feuilletage  $\mathcal{F}_1$  a pour intégrale première  $\frac{y^3}{3} - z$ . En résulte que  $\text{Flex}(\mathcal{F}_1)$  est la droite  $y = 0$ .

2. Le feuilletage  $\mathcal{F}_5$  a pour intégrale première  $\frac{y}{x} - \frac{1}{y}$ ; de sorte que ses feuilles ont pour adhérence des coniques, aussi  $\text{Flex}(\mathcal{F}_5)$  est vide.

Soit  $Z = E \frac{\partial}{\partial X} + F \frac{\partial}{\partial Y} + G \frac{\partial}{\partial Z}$  un champ de vecteurs homogène de degré 2 sur  $\mathbb{C}^3$  non colinéaire au champ radial,  $\text{pgcd}(E, F, G) = 1$ ; à un tel champ est associé un feuilletage de degré deux  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  défini par la 1-forme  $\omega = i_{\mathcal{R}} i_Z dX \wedge dY \wedge dZ$ . Introduisons le polynôme  $\mathcal{H}$  de degré 6

$$\mathcal{H}(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} X & E & Z(E) \\ Y & F & Z(F) \\ Z & G & Z(G) \end{vmatrix};$$

notons que  $\mathcal{H}$  ne dépend pas du choix du champ de vecteurs  $Z$  dans le noyau de  $\omega$ . D'après [13] le lieu des zéros de  $\mathcal{H}$  est constitué de  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  et de l'ensemble des droites invariantes par  $\mathcal{F}$ .

L'énoncé qui suit montre qu'un feuilletage de degré deux général  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ .

**Théorème 2.12.** — Il existe un ensemble algébrique  $\Sigma$  non trivial, contenu dans  $\mathcal{F}(2; 2)$  ayant la propriété suivante : tout feuilletage de  $\mathcal{F}(2; 2) \setminus \Sigma$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ .

En particulier, pour tout  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}(2; 2) \setminus \Sigma$ , l'orbite  $O(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  n'est pas fermée.

Donnons une interprétation géométrique de l'énoncé qui apparaîtra en cours de démonstration. Un feuilletage  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}(2; 2) \setminus \Sigma$  si et seulement si l'ensemble  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  est non vide. Cette propriété est générique dans l'ensemble des feuilletages.

**Démonstration.** — Considérons la famille  $\varphi_\varepsilon = \varphi = (\varepsilon^3 x, \varepsilon y)$ . Notons que

1.  $\varphi^*(x^i y^j dx) = \varepsilon^{3i+j+3} x^i y^j dx$  est divisible par  $\varepsilon^3$  et  $\frac{1}{\varepsilon^3} \varphi^*(x^i y^j dx)$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 sauf pour  $i = j = 0$ ;
2.  $\varphi^*(x^i y^j dy) = \varepsilon^{3i+j+1} x^i y^j dy$  est divisible par  $\varepsilon^3$  sauf pour  $i = j = 0$  et  $(i, j) = (0, 1)$ . Si  $(i, j)$  n'appartient pas à  $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ , la forme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \varphi^*(x^i y^j dy)$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Si  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme  $\omega$  du type

$$(\alpha + *x + *y + *x^2 + *xy + *y^2)dx + (*x + *x^2 + *xy + \beta y^2)dy \\ + (*x^2 + *xy + *y^2)(ydx - xdy), \quad \text{où les } * \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*,$$

nous dirons que  $\omega$  ou  $\mathcal{F}$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ . Si tel est le cas nous constatons que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi^* \omega = \alpha dx + \beta y^2 dy.$$

Visiblement  $\alpha dx + \beta y^2 dy$  définit un feuilletage conjugué à  $\mathcal{F}_1$ ; en particulier si  $\mathcal{F}$  vérifie  $(\mathcal{P})$  alors  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ .

Notons que si  $\mathcal{F}$  a la propriété  $(\mathcal{P})$  le point  $(0,0)$  est non singulier (car  $\alpha \neq 0$ ) et la feuille  $\mathcal{L}_{(0,0)}$  de  $\mathcal{F}$  en  $(0,0)$  est tangente à l'axe  $x=0$ . Comme le coefficient de  $\omega$  sur  $ydy$  est nul un calcul élémentaire montre que  $\mathcal{L}_{(0,0)}$  a un point d'inflexion en  $(0,0)$ . Finalement le fait que  $\beta$  soit non nul implique que ce point d'inflexion est d'ordre minimal 1.

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré deux sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ; supposons que  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  soit non vide. Choisissons alors un système de coordonnées  $(x,y)$  tel que  $m = (0,0)$  soit d'inflexion ordinaire et  $x=0$  soit la tangente à  $\mathcal{L}_m$  en  $m$ . La 1-forme  $\omega$  décrivant  $\mathcal{F}$  satisfait la propriété  $(\mathcal{P})$  et  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ .

L'ensemble  $\Sigma$  est défini comme l'ensemble des feuilletages  $\mathcal{F}$  tel que  $\text{Flex}(\mathcal{F}) = \emptyset$ .  $\square$

**Remarques 2.13.** — 1. Comme indiqué dans l'exemple 2.4 le feuilletage  $\mathcal{F}_1$  possède une droite de points d'inflexion qui sont d'ordre 1; ceci confirme que  $\Sigma$  est propre.

2. L'ensemble  $\Sigma$  est invariant sous l'action de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ .

3. De la même façon que pour  $\mathcal{F}_5$ , les feuilletages ayant une intégrale première du type  $Q_1/Q_2$ , avec  $Q_1, Q_2$  polynôme de degré inférieur ou égal à 2, ne possèdent pas de points d'inflexion car les feuilles sont d'adhérence des coniques; ils appartiennent à  $\Sigma$ .

On peut voir aisément que l'ensemble  $\text{Flex}(\mathcal{F}_4)$  est non vide comme le montrent d'ailleurs les figures du § 3.

**Corollaire 2.14.** — Le feuilletage  $\mathcal{F}_4$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ ; en particulier  $\mathcal{O}(\mathcal{F}_4)$  n'est pas fermée.

*Démonstration.* — Le feuilletage  $\mathcal{F}_4$  est décrit par

$$\omega_4 = (x + y^2 - x^2 y)dy + x(x + y^2)dx.$$

Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $\alpha^3 = 4$ ; posons  $\beta = \frac{\alpha^2}{2}$ . En faisant agir la translation  $(x + \alpha, y + \beta)$  sur  $\omega_4$  nous obtenons une 1-forme du type

$$\omega = (\alpha(\alpha + \beta^2) + *x + *y + *x^2 + *xy + *y^2)dx + (*x + *x^2 + *xy + y^2)dy + (*x^2 + *xy + *y^2)(ydx - xdy);$$

la propriété  $(\mathcal{P})$ , introduite au Théorème 2.12, est donc satisfaite. D'après la démonstration du Théorème 2.12 nous avons

$$\omega_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} (\varepsilon^3 x, \varepsilon y)^* \omega = \alpha(\alpha + \beta^2)dx + y^2 dy.$$

On vérifie que  $\alpha(\alpha + \beta^2)$  est non nul ce qui implique que le feuilletage induit par  $\omega_0$  est conjugué à  $\mathcal{F}_1$ .  $\square$

**Exemple (de JOUANOLOU).** — Introduisons le feuilletage  $\mathcal{F}_J$  de degré 2 sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  défini, dans la carte affine  $Z=1$ , par

$$\omega_J = (x^2 y - 1)dx + (y^2 - x^3)dy.$$

Cet exemple, dû à JOUANOLOU, est très populaire. C'est historiquement le premier exemple explicite de feuilletage sans courbe algébrique invariante ([11]); c'est aussi un feuilletage qui n'admet pas d'ensemble

minimal non trivial ([1]). La procédure appliquée dans la démonstration du Théorème 2.12 s'applique directement, autrement dit la propriété  $(P)$  est vérifiée, ainsi  $\mathcal{F}_J$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$ .

Pour  $\mathcal{F}$  générique dans  $\mathcal{F}(2;2)$  on peut se demander si  $\mathcal{F}$  dégénère uniquement sur  $\mathcal{F}_1$ . Les considérations suivantes vont nous montrer que non.

Soit  $\mathcal{F}$  un élément de  $\mathcal{F}(2;2)$  décrit par une 1-forme  $\omega$ . Supposons que  $(0,0)$  soit un point singulier de  $\mathcal{F}$ ; nous pouvons trouver des coordonnées où  $\omega$  est du type

$$(\alpha y + *x + *x^2 + *y^2 + *xy)dx + (\beta x + \gamma y^2 + *x^2 + *xy)dy \\ + (*x^2 + *xy + *y^2)(ydx - xdy), \quad \text{avec } *, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Posons  $\varphi = (\varepsilon^2 x, \varepsilon y)$ . Nous constatons que

$$\Omega_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi^* \omega = \alpha y dx + (\beta x + \gamma y^2) dy.$$

Lorsque  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont tous les trois non nuls  $\Omega_0$  définit un feuilletage de degré deux  $\mathcal{F}_0$  sur lequel dégénère évidemment  $\mathcal{F}$ . Alors que la non nullité des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  signifie que  $(0,0)$  est de multiplicité 1, celle de  $\gamma$  s'interprète comme suit : si  $\gamma$  est nul  $\mathcal{F}$  possède une droite invariante, ce qui génériquement n'arrive pas dans  $\mathcal{F}(2;2)$ .

Détaillons le cas  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ . On peut supposer à conjugaison près que  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\lambda)$  est défini par

$$\Omega_0 = \Omega_0(\lambda) = ydx + (\lambda x + y^2)dy, \quad \lambda = \beta/\alpha.$$

Notons que l'invariant  $\lambda$  est relié à la singularité  $(0,0)$  du feuilletage initial  $\mathcal{F}$ ; plus précisément l'invariant de BAUM-BOTT  $\text{BB}(\mathcal{F};(0,0))$  de  $\mathcal{F}$  au point  $(0,0)$  est égal à celui de  $\mathcal{F}_0(\lambda)$

$$\text{BB}(\mathcal{F};(0,0)) = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} = -\frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda} = \text{BB}(\mathcal{F}_0(\lambda);(0,0)).$$

Nous allons décrire les feuilletages  $\mathcal{F}_0(\lambda)$  pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^*$ . Ils préservent les droites  $y = 0$  et  $z = 0$  et comptent deux points singuliers  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$ . Le point  $(0 : 0 : 1)$  est de multiplicité 1 et par suite  $(1 : 0 : 0)$  de multiplicité 6. Nous constatons que pour  $\lambda = -1$  la 1-forme

$$\frac{\Omega_0(-1)}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2} + dy$$

est fermée et a pour primitive  $\frac{x}{y} + y$ . Il s'en suit que  $\mathcal{F}_0(-1)$  est conjugué au feuilletage  $\mathcal{F}_5$ . Il y a encore une valeur spéciale de  $\lambda$  qui intervient :  $\lambda = -2$ . Dans ce cas nous remarquons que  $\frac{\Omega_0(-2)}{y^3}$  est fermée et s'intègre en  $\frac{x}{y^2} + \ln y$ ; ceci permet de constater que  $\text{Iso}(\mathcal{F}_0(-2))$  est le groupe  $\{(\varepsilon^2 x, \varepsilon y) \mid \varepsilon \in \mathbb{C}^*\}$ . En particulier  $\mathcal{O}(\mathcal{F}_0(-2))$  est de dimension 7.

Dans la suite nous supposons que  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2\}$ . Un calcul élémentaire montre que la conique  $(2 + \lambda)x + y^2 = 0$  est invariante par  $\mathcal{F}_0(\lambda)$ . Mieux la 1-forme rationnelle  $\frac{\Omega_0(\lambda)}{y((2 + \lambda)x + y^2)}$  est fermée. Un calcul élémentaire en donne une primitive

$$\ln((2 + \lambda)x + y^2) + \lambda \ln y,$$

ce qui permet de vérifier que le groupe d'isotropie est ici encore

$$\text{Iso}(\mathcal{F}_0(\lambda)) = \{(\varepsilon^2 x, \varepsilon y) \mid \varepsilon \in \mathbb{C}^*\}.$$

Remarquons que deux feuilletages  $\mathcal{F}_0(\lambda)$  et  $\mathcal{F}_0(\lambda')$  sont conjugués si et seulement si  $\lambda = \lambda'$ . Des considérations qui précèdent nous tirons l'énoncé suivant.

**Théorème 2.15.** — Soit  $\mathcal{F}$  un élément de  $\mathcal{F}(2;2)$  sans droite invariante.

1. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_5$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  possède un point singulier  $m$  de multiplicité 1 vérifiant  $\text{BB}(\mathcal{F}; m) = 4$ .

2. Si  $\mathcal{F}$  possède un point singulier  $m$  de multiplicité 1 tel que  $\text{BB}(\mathcal{F}; m) = 2 - \lambda - \frac{1}{\lambda}$ , alors  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_0(\lambda)$  donné par

$$ydx + (\lambda x + y^2)dy.$$

En particulier si  $\mathcal{F}$  est générique,  $\mathcal{F}$  dégénère au moins sur sept feuilletages (non conjugués) à orbites de dimension 7.

*Démonstration.* — Concernant la première assertion, il nous reste seulement à prouver que si  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_5$ , alors  $\mathcal{F}$  possède un point singulier de multiplicité 1 dont l'invariant de BAUM-BOTT est 4. Si tel est le cas il y a une famille analytique  $(\mathcal{F}_\varepsilon)$  définie par la famille de 1-formes  $(\omega_\varepsilon)$  telle que pour  $\varepsilon$  non nul  $\mathcal{F}_\varepsilon$  soit dans  $O(\mathcal{F})$  et pour  $\varepsilon$  nul nous ayons  $\mathcal{F}_{\varepsilon=0} = \mathcal{F}_5$ . Le point singulier de multiplicité 1, noté  $m_0$ , de  $\mathcal{F}_5$  est « stable » ; il existe une famille analytique  $(m_\varepsilon)$  de points singuliers de  $\mathcal{F}_\varepsilon$  de multiplicité 1 telle que  $m_{\varepsilon=0} = m_0$ . Les  $\mathcal{F}_\varepsilon$  étant conjugués pour  $\varepsilon$  non nul,  $\text{BB}(\mathcal{F}_\varepsilon; m_\varepsilon)$  est localement constant ; par suite  $\text{BB}(\mathcal{F}_\varepsilon; m_\varepsilon) = 4$  pour  $\varepsilon$  petit. En particulier  $\mathcal{F}$  possède un point singulier comme dans l'énoncé.

Le point 2. est conséquence du fait suivant : génériquement  $\mathcal{F}$  possède sept points singuliers distincts à invariants de BAUM-BOTT distincts.  $\square$

**Remarque 2.16.** — Les Théorèmes 2.12 et 2.15 assurent en particulier qu'un feuilletage générique dégénère sur  $\mathcal{F}_1$  mais pas sur  $\mathcal{F}_5$ .

Le Théorème 2.15 semble occulter les éléments  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}(2;2)$  avec droite invariante. En fait si  $\mathcal{F}$  possède un point singulier simple (condition  $\alpha\beta \neq 0$ ) par lequel ne passe pas de droite invariante la procédure de dégénérescence sur un  $\mathcal{F}_0(\lambda)$  s'applique et autorise la présence de droites invariantes ne passant pas par  $(0,0)$ . Une autre façon de procéder est la suivante. Si  $\mathcal{F}$  laisse  $y = 0$  invariante la 1-forme qui le définit s'écrit

$$\omega = ya(x,y)dx + b(x,y)dy.$$

En faisant agir la transformation linéaire diagonale  $(x, \varepsilon y)$  sur  $\omega$  puis en passant à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  on obtient

$$\omega_0 = ya(x,0)dx + b(x,0)dy$$

qui génériquement sur  $\mathcal{F}$  définit un feuilletage de degré 2 sur lequel  $\mathcal{F}$  dégénère.

**Proposition 2.17.** — L'ensemble  $\mathcal{F}(2;2)$  contient des éléments qui dégèrent à la fois sur  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_5$ .

*Démonstration.* — Rappelons que la 1-forme

$$\omega_1 = x^2dx + y^2(xdy - ydx)$$

définit  $\mathcal{F}_1$ , feuilletage pour lequel l'ensemble  $\text{Flex}(\mathcal{F}_1)$  est une droite. Un feuilletage  $\mathcal{F}_\varepsilon$  proche de  $\mathcal{F}_1$  va donc satisfaire  $\text{Flex}(\mathcal{F}_\varepsilon) \neq \emptyset$  et par suite dégénère sur  $\mathcal{F}_1$  (Théorème 2.12). En particulier il en est ainsi pour  $\mathcal{F}_\varepsilon$  défini par

$$\omega_\varepsilon = \varepsilon(xdy - ydx) + \omega_1$$

tout du moins pour  $\varepsilon$  petit. Mais pour  $\varepsilon$  non nul le 1-jet de  $\omega_\varepsilon$  en  $(0,0)$  est  $x dy - y dx$  et le coefficient de  $x^2 dx$  est 1 ce qui nous permet de faire dégénérer (à conjugaison près)  $\mathcal{F}_\varepsilon$  sur  $\mathcal{F}_5$  pour  $\varepsilon \neq 0$ ; ainsi pour  $\varepsilon$  petit non nul  $\mathcal{F}_\varepsilon$  dégénère à la fois sur  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_5$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}(2;2)$ ; nous avons l'alternative

1. si  $\text{Flex}(\mathcal{F})$  est non vide,  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $\mathcal{F}_1$  (Théorème 2.12);

2. si  $\text{Flex}(\mathcal{F}) = \emptyset$  alors  $\mathcal{F}$  ne dégénère pas sur  $\mathcal{F}_1$  (stabilité des points d'inflexion).

Parmi les éléments de  $\mathcal{F}(2;2)$  sans point d'inflexion, il y a les feuilletages définis par un pinceau de coniques. Leur classification est connue depuis longtemps ; on peut par exemple la trouver dans [10], chapitre XIII, §11. Elle correspond à celle des feuilletages de degré inférieur ou égal à 2 ayant une intégrale première rationnelle du type  $Q_1/Q_2$ , les  $Q_i$  désignant des formes quadratiques à 3 variables, le pinceau associé étant  $Q_1 + \lambda Q_2$ . Il y a cinq modèles à conjugaison près ; deux conduisent à des feuilletages de degré 1 (ils sont décrits par  $xy = \text{cte}$ ,  $y^2 - x = \text{cte}$ ), les trois autres sont les suivants : le feuilletage  $\mathcal{F}_6$  qui représente le pinceau générique et qui a pour intégrale première  $\frac{x(y+z)}{y(x+z)}$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_5$  déjà rencontré et enfin le feuilletage  $\mathcal{F}_7$  dont voici une intégrale première  $\frac{xz}{y(y-x)}$ . L'ensemble des coniques dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  (voir [9]) ; il en résulte qu'un pinceau de coniques s'identifie à une droite dans  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ , i.e. à un point dans la grassmannienne  $\mathbb{G}(1;5)$  des droites de  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ , qui est de dimension 8. Ainsi  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  agit sur  $\mathbb{G}(1;5)$  et l'orbite du pinceau générique est ouverte et dense. Par suite  $O(\mathcal{F}_6)$  adhère à toutes les autres orbites (associées à des pinceaux), en particulier à celle de  $\mathcal{F}_5$  et à celle de  $\mathcal{F}_7$ . Une manière, autre que la manière classique, de distinguer ces trois feuilletages est de considérer leur groupe d'isotropie : celui de  $\mathcal{F}_5$  est, comme nous l'avons vu,

$$\text{Iso}(\mathcal{F}_5) = \left\{ (\alpha^2 x, \alpha y), \left( \frac{x}{1+\beta y}, \frac{y}{1+\beta y} \right) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

celui de  $\mathcal{F}_6$  est fini et celui de  $\mathcal{F}_7$  est donné par

$$\text{Iso}(\mathcal{F}_7) = \{(\alpha x, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}.$$

Tout ceci est résumé dans la :

**Proposition 2.18.** — Soit  $\mathcal{F}$  un élément de  $\mathcal{F}(2,2)$  associé à un pinceau de coniques. Alors  $\mathcal{F}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_5$ , ou  $\mathcal{F}_6$  ou  $\mathcal{F}_7$ . De plus, les adhérences étant prises dans  $\mathcal{F}(2;2)$ , nous avons

1.  $\overline{O(\mathcal{F}_5)} = O(\mathcal{F}_5)$  et  $\dim O(\mathcal{F}_5) = 6$ ;
2.  $\overline{O(\mathcal{F}_7)} = O(\mathcal{F}_5) \cup O(\mathcal{F}_7)$  et  $\dim O(\mathcal{F}_7) = 7$ ;
3.  $\overline{O(\mathcal{F}_6)} = O(\mathcal{F}_5) \cup O(\mathcal{F}_6) \cup O(\mathcal{F}_7)$  et  $\dim O(\mathcal{F}_6) = 8$ .

*Démonstration.* — Une fois que l'on a constaté que si  $\mathcal{F}$  dégénère sur  $F$  alors  $F$  a aussi une intégrale première du type  $Q_1/Q_2$  il nous reste seulement à démontrer que  $\mathcal{F}_7$  dégénère sur  $\mathcal{F}_5$ . Introduisons le feuilletage  $\mathcal{F}'$  donné par les niveaux de

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{1}{y};$$

son groupe d'isotropie est

$$\text{Iso}(\mathcal{F}') = \left\{ \left( \frac{x}{1+\alpha y}, \frac{y}{1+\alpha y} \right) \mid \alpha \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

En particulier  $\dim O(\mathcal{F}') = 7$  et  $\mathcal{F}'$  appartient à  $O(\mathcal{F}_7)$ . Quitte à faire agir  $\varphi_\varepsilon = (\varepsilon^2 x, \varepsilon y)$  sur  $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{1}{y}$  nous obtenons à multiplication par une constante près

$$\varepsilon^2 \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{y};$$

nous retrouvons lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 l'intégrale première de  $\mathcal{F}_5$ . □

Tout ceci laisse penser que les seules orbites fermées dans  $\mathcal{F}(2;2)$  sous l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  sont celles de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_5$ .

### 2.5. En dimension supérieure. —

L'étude de la nature des orbites sous l'action du groupe linéaire pour les feuilletages de dimension supérieure à 2 se pose aussi naturellement, tout comme la classification des feuilletages ayant des « petites » singularités. Soient  $\mathcal{F}_0$  dans  $\mathcal{F}(2;N)$  et  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}(n;N)$  (où  $\mathcal{F}(n;N)$  désigne l'ensemble des feuilletages de degré  $N$  sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ). On dit que  $\mathcal{F}$  est un *déploiement* de  $\mathcal{F}_0$  s'il existe un plongement  $i : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  linéaire tel que  $i^*\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ .

Rappelons (voir [4]) que si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de degré deux sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  alors

1. ou bien  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme fermée ;
2. ou bien  $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}_0$  où  $\mathcal{F}_0$  désigne un feuilletage de degré deux de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $\pi$  la projection de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

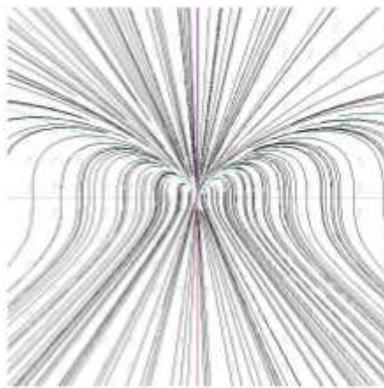
Nous en déduisons la :

**Proposition 2.19.** — *Soit  $\mathcal{F}_0$  un feuilletage de degré 2 sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Si  $\mathcal{F}_0$  n'est pas défini par une forme fermée tout déploiement  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}_0$  est trivial, i.e. il existe  $\pi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tel que  $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}_0$ .*

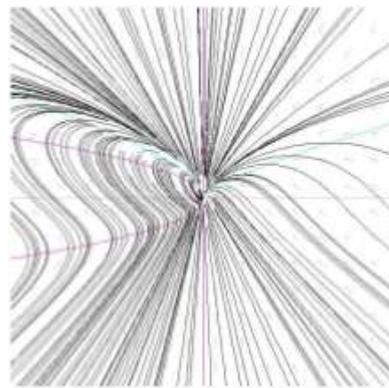
Le feuilletage  $\mathcal{F}_4$  satisfait la Proposition 2.19 ; ainsi  $\mathcal{F}_4$  va jouer un rôle particulier dans l'étude des orbites des feuilletages de degré deux de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  avec  $n \geq 3$  sous l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ .

### 3. Quelques portraits de phase en réel

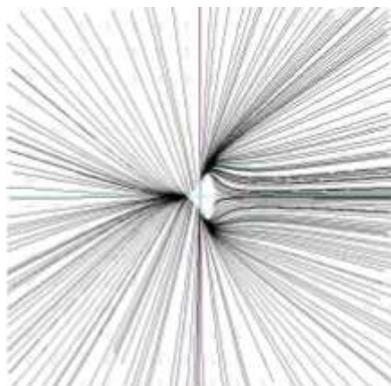
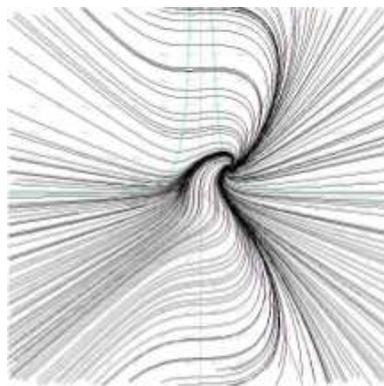
Les feuilletages  $\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{F}_J$  sont définis par des formes à coefficients réels (même entiers) et induisent donc des feuilletages de  $\mathbb{R}^2$  dont nous proposons le portrait de phase ; ces portraits de phase ont été tracés à l'aide d'un logiciel disponible sur <http://www.math.psu.edu/melvin/phase/newphase.html>.



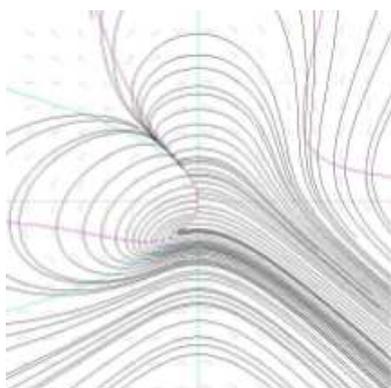
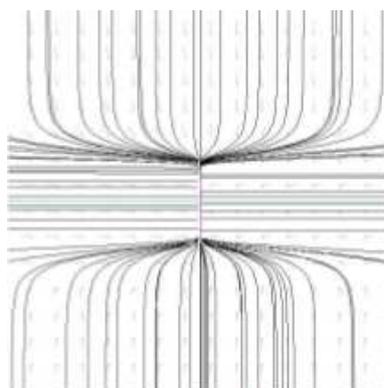
$\mathcal{F}_1$



$\mathcal{F}_2$

 $\mathcal{F}_3$  $\mathcal{F}_J$ 

Soit  $\tilde{\mathcal{F}}$  le feuilletage décrit dans la carte affine  $Z = 1$  par la 1-forme  $y^7 dx - x dy$ . Dans le contexte réel les feuilletages  $\tilde{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{F}_4$  sont localement différentiablement conjugués en l'origine. Ainsi le portrait de phase de  $\tilde{\mathcal{F}}$  explique celui de  $\mathcal{F}_4$  en 0; on observe un phénomène de type « fleuve » à l'origine ([7]).

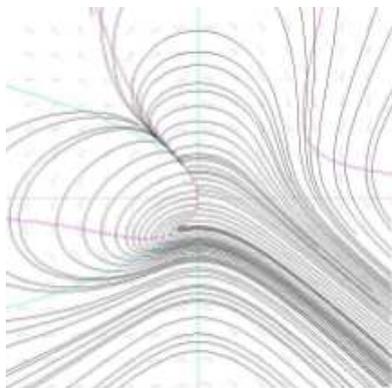
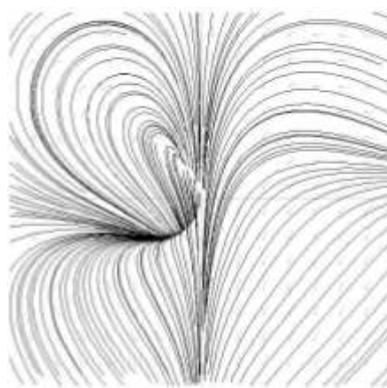
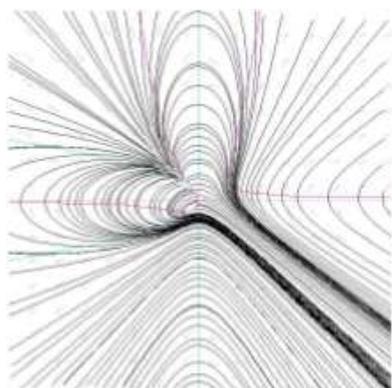
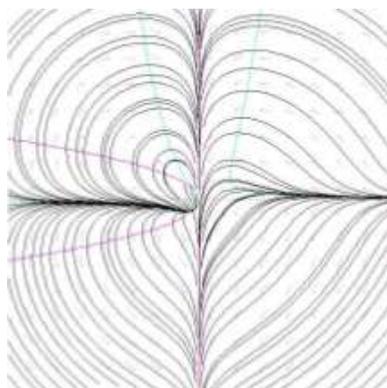
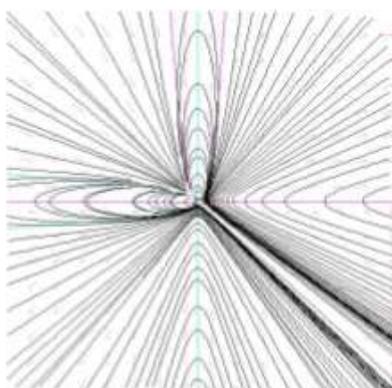
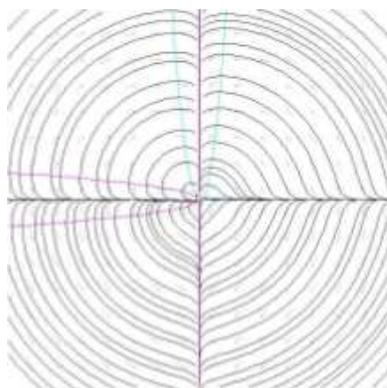
 $\mathcal{F}_4$  $\tilde{\mathcal{F}}$ 

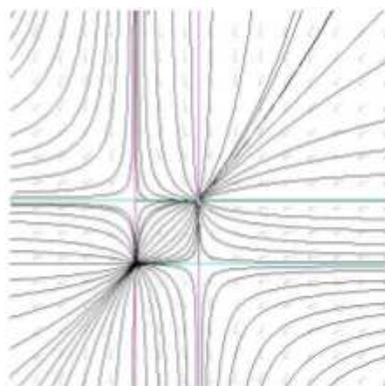
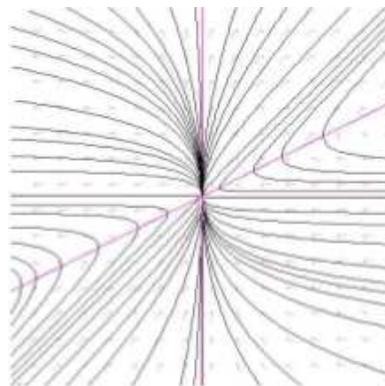
Le portrait de phase de  $\mathcal{F}_4$  ci-dessus suggère que le feuilletage réel induit par  $\mathcal{F}_4$  ne possède pas de cycle limite, plus précisément que toute trajectoire adhère au point singulier.

Pour avoir une meilleure idée des trajectoires réelles du feuilletage  $\mathcal{F}_4$  considérons le feuilletage  $\mathcal{F}_4^\perp$  donné dans la carte affine  $Z = 1$  par la 1-forme

$$\omega_4^\perp = -(x + y^2 - x^2 y) dx + x(x + y^2) dy.$$

C'est un feuilletage de degré 3 dont les trajectoires sont dans la carte  $Z = 1$  orthogonales à celles de  $\mathcal{F}_4$ . Nous proposons des représentations de  $\mathcal{F}_4$  et  $\mathcal{F}_4^\perp$  dans des domaines de tailles différentes

 $\mathcal{F}_4$  $\mathcal{F}_4^\perp$  $\mathcal{F}_4$  $\mathcal{F}_4^\perp$  $\mathcal{F}_4$  $\mathcal{F}_4^\perp$

 $\mathcal{F}_6$  $\mathcal{F}_7$ 

### Index des notations

$\text{Sing}(\mathcal{F})$	lieu singulier du feuilletage $\mathcal{F}$	1
$\mathcal{F}(n; N)$	ensemble des feuilletages de degré $N$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	2
$\mu(\mathcal{F}, m)$	nombre de MILNOR du feuilletage $\mathcal{F}$ au point singulier $m$	2
$\langle P, Q \rangle$	idéale engendré par les éléments $P$ et $Q$ de $\mathbb{C}\{x, y\}$	2
$\omega_1$	$x^2 dx + y^2(x dy - y dx)$	3
$\omega_2$	$x^2 dx + (x + y^2)(x dy - y dx)$	3
$\omega_3$	$xy dx + (x^2 + y^2)(x dy - y dx)$	3
$\omega_4$	$(x + y^2 - x^2 y) dy + x(x + y^2) dx$	3
$\omega_5$	$x^2 dy + y^2(x dy - y dx)$	4
$\mathcal{O}(\mathcal{F})$	orbite d'un élément $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}(2; 2)$ sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$	10
$\text{Iso}(\mathcal{F})$	groupe d'isotropie du feuilletage $\mathcal{F}$ défini sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$	10
$\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$	algèbre de LIE des champs de vecteurs holomorphes globaux sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$	10
$\mathfrak{g}$	algèbre de LIE du groupe algébrique $G$	11
$\mathcal{R}$	champ radial $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	11
$\mathcal{F}_J$	feuilletage décrit par la 1-forme $\omega_J$	18
$\omega_J$	$(x^2 y - 1) dx + (y^2 - x^3) dy$	18
$\text{BB}(\mathcal{F}; m)$	invariant de BAUM-BOTT du feuilletage $\mathcal{F}$ au point $m$	19
$\mathcal{F}_6$	feuilletage associé au pinceau $x(y + z) + \lambda y(x + z)$	21
$\mathcal{F}_7$	feuilletage associé au pinceau $xz + \lambda y(y - x)$	21

### Références

- [1] C. Camacho and L. H. de Figueiredo. The dynamics of the Jouanolou foliation on the complex projective 2-space. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(3) :757–766, 2001.
- [2] C. Camacho, A. Lins Neto, and P. Sad. Minimal sets of foliations on complex projective spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (68) :187–203 (1989), 1988.

- [3] D. Cerveau and A. Lins Neto. Holomorphic foliations in  $\mathbb{C}P(2)$  having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 41(4) :883–903, 1991.
- [4] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in  $\mathbb{C}P(n)$ ,  $n \geq 3$ . *Ann. of Math. (2)*, 143(3) :577–612, 1996.
- [5] D. Cerveau, A. Lins-Neto, F. Loray, J. V. Pereira, and F. Touzet. Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences. *Mosc. Math. J.*, 7(1) :21–54, 2007.
- [6] D. Cerveau and J.-F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982. With an English summary.
- [7] F. Diener. Fleuves et variétés centrales. *Astérisque*, (150-151) :59–66, 185, 1987. Singularités d'équations différentielles (Dijon, 1985).
- [8] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [9] J. Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.
- [10] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of algebraic geometry. Vol. II*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Book III : General theory of algebraic varieties in projective space, Book IV : Quadrics and Grassmann varieties, Reprint of the 1952 original.
- [11] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [12] D. Luna and T. Vust. Un théorème sur les orbites affines des groupes algébriques semi-simples. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 27 :527–535 (1974), 1973.
- [13] J. V. Pereira. Vector fields, invariant varieties and linear systems. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) :1385–1405, 2001.
- [14] K. Saito. On a generalization of de-Rham lemma. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 26(2) :vii, 165–170, 1976.
- [15] M. F. Singer. Liouvillian first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2) :673–688, 1992.

---

D. CERVEAU, Membre de l'Institut Universitaire de France. IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France. Membre de l'ANR BLAN06-3\_137237 • *E-mail* : dominique.cerveau@univ-rennes1.fr

J. DÉSERTI, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Projet Géométrie et Dynamique, Site Chevaleret, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France. Membre de l'ANR BLAN06-3\_137237 • *E-mail* : deserti@math.jussieu.fr

D. GARBA BELKO, Faculté des Sciences, Université Abdou Moumouni, B.P. 10662 Niamey, Niger.  
*E-mail* : garbabelkodjibrilla@yahoo.fr

R. MEZIANI, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Ibn Tofail, Kenitra, Maroc.  
*E-mail* : rmeziani@yahoo.com