UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
UFR DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE D'HABILITATION
À DIRIGER DES RECHERCHES

Julie DÉSERTI

Mathématiques pures

Transformations birationnelles du plan et de l'espace

Rapporteur interne :	Jury :
Bernard TEISSIER	Charles FAVRE
	Laurent GRUSON
	Raphaël KRIKORIAN
Rapporteurs externes :	Stéphane LAMY
Igor DOLGACHEV	Bernard TEISSIER
Charles FAVRE	Alain VALETTE

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Université Paris 7, Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France.
deserti@math.univ-paris-diderot.fr

« *En plein cœur de toute difficulté se cache une possibilité* »
A. EINSTEIN

Table des matières

Travaux présentés

Jérémy BLANC, Julie DÉSERTI. Embeddings of $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ into the CREMONA group, *Transform. Groups*, 17 (2012), no. 1, 21–50.

Jérémy BLANC, Julie DÉSERTI. Degree growth of birational maps of the plane, to appear in *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*

Dominique CERVEAU, Julie DÉSERTI. Transformations birationnelles de petit degré, *Cours Spécialisés, Société Mathématique de France,* 19 (2013), viii+ 223 pages.

Dominique CERVEAU, Julie DÉSERTI. Itération d'applications rationnelles dans les espaces de matrices, *Conform. Geom. Dyn.*, 15 (2011), 72–112.

Dominique CERVEAU, Julie DÉSERTI. Centralisateurs dans le groupe de JONQUIÈRES, *Michigan Math. J.*, 61 (2012), 763–783.

Julie DÉSERTI. JONQUIÈRES maps and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-cocycles, `arXiv:1304.6242`. *Soumis*.

Julie DÉSERTI, Julien GRIVAUX. Automorphisms of rational surfaces with positive topological entropy, *Indiana Univ. Math. J.*, 60 No. 5 (2011), 1589–1622.

Julie DÉSERTI, Frédéric HAN. On cubic birational maps of $\mathbb{P}^3_\mathbb{C}$, `arXiv:1311.1891`. *Soumis*.

Julie DÉSERTI. Some properties of the group of regular birational maps, `arXiv:1403.0346`. *Soumis*.

Introduction

Le groupe de CREMONA, noté $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$, se situe à la croisée de la géométrie algébrique, des systèmes dynamiques et de la théorie des groupes. Il a été l'objet, ces dernières années, de nombreuses attentions dans ces différentes directions ; citons par exemple les travaux de DOLGACHEV et ISKOVSKIKH ([**DI09**]), CANTAT ([**Can11, Can14**]), DILLER et FAVRE ([**DF01**]), BLANC et CANTAT ([**BC13b**]), CANTAT et LAMY ([**CL13**]). Ce mémoire est consacré à différents travaux sur le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ des transformations birationnelles de l'espace projectif complexe, une bonne partie du texte concernant le cas $n=2$.

Dans le premier chapitre on s'intéresse à la dynamique des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. On affine un résultat de DILLER et FAVRE ([**DF01**]) sur la croissance des degrés des éléments ϕ de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$, *i.e.* sur le comportement de la suite $(\deg\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ensuite on s'intéresse à un problème important tant en dynamique réelle que complexe : la description des centralisateurs des transformations de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. On finit ce premier chapitre avec l'étude d'une famille très spéciale de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ qui se ramène à l'étude de certains cocycles, domaine dans lequel il y a récemment eu des avancées notables ([**Avi13a, Avi13b**]).

Le second chapitre porte essentiellement sur les automorphismes d'entropie positive de surfaces complexes, objets étroitement liés aux transformations de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Dans la première section on fournit des constructions explicites d'automorphismes d'entropie positive à partir d'éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ donnés. Dans la seconde section on construit, via l'étude de certains plongements de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$, des groupes d'automorphismes de surfaces complexes isomorphes à $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ dont tous les éléments d'ordre infini sont d'entropie positive. La dernière section de ce chapitre porte sur la dynamique des applications rationnelles dans les espaces de matrices ; on considère en particulier les transformations

$$\mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathrm{M}(2;\mathbb{C}),\ M\mapsto AM^2$$

où A désigne un élément fixé de $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$.

Le dernier chapitre commence avec la description des transformations de petit degré de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ et se poursuit avec celle des transformations birationnelles de petit bidegré de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. On termine par l'étude d'un groupe analogue à $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ en dimension supérieure, *i.e.* le sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ engendré par $\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ et l'involution $\left(\frac{1}{z_0}:\frac{1}{z_1}:\ldots:\frac{1}{z_n}\right)$; on verra qu'il satisfait certaines propriétés de groupe vérifiées par $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.

Définitions et Notations

Soient X et Y deux variétés complexes projectives, lisses de dimension n. Une ***transformation rationnelle*** $X \dashrightarrow Y$ est un morphisme d'un ouvert $\mathcal{U}$ de X dans Y qui ne peut pas être étendu à un ouvert plus grand. Une ***transformation birationnelle*** $\phi\colon X \dashrightarrow Y$ est une transformation rationnelle qui admet un inverse lui-même rationnel ; elle induit un isomorphisme entre un ouvert de X et un ouvert de Y. Fixons un plongement projectif de Y ; alors on peut associer à ϕ le système linéaire Λ_ϕ sur X donné par les préimages par ϕ des sections hyperplanes sur Y. On appelle ***lieu base*** de ϕ le lieu base du système linéaire Λ_ϕ ; c'est une sous-variété de X de codimension au moins 2 notée $\mathfrak{base}\,\phi$. Une seconde sous-variété de X associée à ϕ est l'***ensemble exceptionnel*** de ϕ, c'est le complémentaire de l'ouvert maximal sur lequel ϕ est un isomorphisme local.

On désigne par $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ le projectivisé de l'espace des $(n+1)$-uplets de polynômes homogènes de degré k en $(n+1)$ variables :

$$\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) = \mathbb{P}\{(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n)\,|\,\phi_i \in \mathbb{C}[z_0,z_1,\ldots,z_n]_k\}.$$

Le ***degré*** d'un élément $\phi = (\phi_0 : \phi_1 : \ldots : \phi_n)$ de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est le degré des ϕ_i. À un élément

$$\phi = (\phi_0 : \phi_1 : \ldots : \phi_n)$$

de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ on associe la transformation rationnelle

$$\phi^\bullet = \delta(\phi_0 : \phi_1 : \ldots : \phi_n), \qquad\qquad \delta = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n)}.$$

Soit ϕ un élément de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$; on dit que $\phi = (\phi_0 : \phi_1 : \ldots : \phi_n)$ est ***purement de degré*** k si les ϕ_i n'ont pas de facteur commun. L'ensemble des éléments purement de degré k est noté $\mathring{\mathfrak{Rat}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Alors que $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ s'identifie à un espace projectif, l'espace $\mathring{\mathfrak{Rat}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ en est un ouvert de Zariski. Un élément de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \smallsetminus \mathring{\mathfrak{Rat}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ s'écrit $P\psi = (P\psi_0 : P\psi_1 : P\psi_2)$ où ψ appartient à un certain $\mathfrak{Rat}_\ell(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$, avec $\ell < k$, et P est un polynôme homogène de degré $k-\ell$. On note $\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ l'ensemble des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^n_\mathbb{C}$ dans lui-même : c'est l'union $\displaystyle\bigcup_{k\geq 1} \mathring{\mathfrak{Rat}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. C'est aussi la limite injective des $\mathfrak{Rat}^\bullet_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ avec

$$\mathfrak{Rat}^\bullet_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) = \big\{\phi^\bullet\,|\,\phi \in \mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})\big\}.$$

Remarquons que si l'élément ϕ de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est purement de degré k alors ϕ s'identifie à $\phi^\bullet$; ceci signifie que l'application

$$\mathring{\mathfrak{Rat}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \to \mathfrak{Rat}^\bullet_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$$

est injective. Dans la suite on utilisera la notation ϕ aussi bien pour les éléments de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ que pour ceux de $\mathfrak{Rat}^\bullet_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. De même nous dirons abusivement qu'un élément de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ « est » une transformation rationnelle.

L'espace $\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ contient le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n_\mathbb{C}$, *i.e.* les transformations rationnelles qui admettent un inverse rationnel. Ce groupe est appelé ***groupe de*** **CREMONA**, ses éléments ***transformations de*** **CREMONA** ; on le note $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Il est parfois plus commode de travailler dans les espaces $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ que dans les $\mathfrak{Rat}^\bullet_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Aussi nous désignons par $\mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \subset \mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ l'ensemble des transformations ϕ de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ telles que $\phi^\bullet$ soit inversible et par $\mathring{\mathfrak{Bir}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \subset \mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ l'ensemble des transformations birationnelles qui sont purement de degré k. On pose

$$\mathfrak{Bir}^\bullet_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) = \left\{\phi^\bullet \,|\, \phi \in \mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})\right\}.$$

Le groupe de CREMONA s'identifie alors à $\displaystyle\bigcup_{k\geq 1} \mathring{\mathfrak{Bir}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Si ϕ appartient à $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$, alors $\deg\phi = \deg\phi^{-1}$; ce n'est plus le cas en dimension supérieure. On introduit donc la notion de bidegré. Si ϕ appartient à $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$, $n \geq 3$, le ***bidegré*** de ϕ est le couple $(\deg\phi, \deg\phi^{-1})$. On pose pour $n \geq 3$

$$\mathrm{Bir}_{d,d'}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) = \left\{\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \,\middle|\, (\deg\phi, \deg\phi^{-1}) = (d,d')\right\}$$

et on a $\mathfrak{Bir}_d(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) = \cup_{d'} \mathrm{Bir}_{d,d'}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$.

Le ***lieu d'indétermination*** de $\phi = (\phi_0 : \phi_1 : \ldots : \phi_n) \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est le lieu des zéros communs des ϕ_i, on le note $\mathrm{Ind}\,\phi$. Dans ce contexte l'ensemble exceptionnel de ϕ est le lieu des zéros de $\det \mathrm{jac}\,\phi$. On constate que $\mathring{\mathfrak{Bir}}_1(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}((n+1);\mathbb{C})$ est le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^n_\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{X}$ le sous-ensemble algébrique de $\left(\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})\right)^2$ défini par

$$\mathcal{X} = \left\{(\phi,\psi) \in \left(\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})\right)^2 \,|\, \phi\circ\psi \text{ soit proportionnel à } \mathrm{id} = (z_0 : z_1 : \ldots : z_n)\right\}$$

alors l'image de la première projection

$$\mathrm{pr}_1 \colon \mathcal{X} \to \mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}), \quad (\phi,\psi) \mapsto \phi$$

est algébrique et coïncide avec l'adhérence ordinaire $\overline{\mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})}$ de $\mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathring{\mathfrak{Bir}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est un ouvert de ZARISKI de $\overline{\mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})}$, pas nécessairement dense car, comme nous le verrons au Chapitre III pour $(n,k) = (2,3)$, $\overline{\mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})}$ n'est pas en général irréductible (notons qu'il l'est pour $(n,k) = (2,2)$). Un argument classique de projection montre que $\overline{\mathring{\mathfrak{Bir}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})}$ est lui aussi algébrique et ceci pour tout k.

Sur l'espace $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ on va considérer l'action naturelle, appelée ***conjugaison gauche-droite*** (g.d.), de $(\mathrm{PGL}((n+1);\mathbb{C}))^2$ donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{PGL}((n+1);\mathbb{C}) \times \mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}((n+1);\mathbb{C}) & \to & \mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}), \\ (A,\phi,B) & \mapsto & A\phi B^{-1}. \end{array}$$

Notons que les ensembles $\mathring{\mathfrak{Rat}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$, $\mathfrak{Bir}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ et $\mathring{\mathfrak{Bir}}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ sont invariants sous cette action. Nous allons plus loin nous intéresser à quelques orbites de celle-ci. L'orbite d'un élément ϕ de $\mathfrak{Rat}_k(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ sous l'action de $\mathrm{PGL}((n+1);\mathbb{C})$ sous l'action g.d. est notée $\mathscr{O}(\phi)$.

CHAPITRE I

Dynamique des transformations birationnelles du plan projectif complexe

Le degré d'une transformation de CREMONA n'est pas un invariant de conjugaison : en général si ϕ et ψ sont deux éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ alors $\deg \psi\phi\psi^{-1} \neq \deg \phi$. Par contre la croissance des degrés est un invariant de conjugaison : il existe α et β deux constantes strictement positives telles que

$$\alpha \deg \phi^n \leq \deg(\psi\phi^n\psi^{-1}) \leq \beta \deg \phi^n;$$

d'où la notion suivante : le ***premier degré dynamique*** de $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est par définition (**[Fri95, RS97]**)

$$\lambda(\phi) = \lim_{n\to+\infty} (\deg(\phi^n))^{1/n}.$$

Les inégalités $\lambda(\phi) \geq 1$ et $\lambda(\phi)^n \geq \deg \phi^n$ sont satisfaites ; de plus, pour tous ϕ, ψ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ on a

$$\lambda(\phi) = \lambda(\psi\phi\psi^{-1}).$$

DILLER et FAVRE ont étudié le comportement de la suite $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Théorème I.A (**[DF01]**). *Soit ϕ une transformation de* CREMONA*. Alors à conjugaison birationnelle près nous sommes dans l'une des situations suivantes :*

- $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ;*
- $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croit linéairement et ϕ n'est pas un automorphisme ;*
- $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croit quadratiquement et ϕ est un automorphisme ;*
- $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croit exponentiellement.*

Dans la première partie de ce chapitre on précise le Théorème I.A et on introduit un nouvel invariant birationnel qui nous permet de caractériser les transformations birationnelles conjuguées à un automorphisme d'une surface rationnelle projective lisse (ceci généralise [**DF01**, Theorem 0.4]). Une question naturelle quand on s'intéresse à la dynamique est le calcul des centralisateurs des transformations considérées, ce sera l'objet du second paragraphe. Enfin dans une troisième partie on se consacre à l'étude des éléments ϕ de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ à croissance linéaire.

1. Croissance des degrés des transformations birationnelles

Définition 1. Une transformation birationnelle $\phi\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est

- ***elliptique*** si $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,
- un ***twist de* JONQUIÈRES** si $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ croit linéairement,
- un ***twist d'*HALPHEN** si $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ croit quadratiquement,
- ***hyperbolique*** si $(\deg \phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ croit exponentiellement.

Lorsque ϕ est un twist de JONQUIÈRES ou d'HALPHEN on dit aussi que ϕ est ***parabolique***.

Exemples 1.
- Une transformation d'ordre fini, un automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sont des transformations elliptiques.
- L'élément $\phi\colon (z_0 : z_1 : z_2) \dashrightarrow (z_0z_2 : z_0z_1 : z_2^2)$ de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est un twist de JONQUIÈRES.
- Le prolongement d'un automorphisme de HÉNON au plan projectif complexe est une transformation hyperbolique ; c'est par exemple le cas de $(z_0 : z_1 : z_2) \dashrightarrow (z_1z_2 : z_1^2 - z_0z_2 : z_2^2)$.
- Considérons la transformation monomiale donnée dans la carte affine $z_2 = 1$ par
$$\phi_M\colon (z_0,z_1) \dashrightarrow (z_0^a z_1^b, z_0^c z_1^d), \qquad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}).$$
La transformation ϕ_M est elliptique (resp. parabolique, resp. hyperbolique) si et seulement si la matrice M est elliptique (resp. parabolique, resp. hyperbolique).

Un petit mot sur la terminologie twist de JONQUIÈRES/HALPHEN : un twist de JONQUIÈRES préserve un unique pinceau de courbes rationnelles ([**DF01**]) et ce pinceau est birationnellement conjugué à un pinceau de droites ([**God53**]). Or une transformation de CREMONA qui préserve un pinceau de courbes rationnelles est classiquement appelée ***transformation de* JONQUIÈRES**. Un twist d'HALPHEN préserve un unique pinceau de courbes elliptiques ([**Giz80, DF01**]) et ce pinceau est birationnellement conjugué à un pinceau de courbes de degré $3n$ avec 9 points de multiplicité n (*voir* [**God53**]). Ces pinceaux ont été étudiés par HALPHEN ([**Hal82**]) et sont appelés ***pinceaux de* HALPHEN**.

DILLER et FAVRE ont donné une autre caractérisation des transformations elliptiques ([**DF01**]) : une transformation ϕ est elliptique si et seulement si elle est conjuguée à un automorphisme $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{S})$ d'une surface projective rationnelle S tel que ψ^n appartienne à la composante connexe $\mathrm{Aut}^0(\mathrm{S})$ de $\mathrm{Aut}(\mathrm{S})$ pour un certain entier n (*voir* [**DF01**]). Dans [2] nous précisons les résultats de DILLER et FAVRE : dans le cas des transformations elliptiques nous montrons que ψ est d'ordre fini ou $\mathrm{S} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Dans le cas twist de JONQUIÈRES (resp. d'HALPHEN) nous spécifions ce que signifie « la suite $(\deg\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ croit linéairement (resp. quadratiquement) ».

Théorème I.1 ([2])**.** *Si $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est une transformation elliptique d'ordre infini, alors ϕ est conjuguée à un automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui dans une carte affine bien choisie est de l'une des formes suivantes :*
- $(z_0,z_1) \mapsto (\alpha z_0, \beta z_1)$ *avec α, β dans $\mathbb{C}^*$ et dans ce cas le noyau du morphisme*
$$\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^*, \qquad (i,j) \mapsto \alpha^i\beta^j$$
est engendré par $(k,0)$ pour un certain k dans $\mathbb{Z}$;
- $(z_0,z_1) \mapsto (\alpha z_0, z_1 + 1)$ *avec α dans $\mathbb{C}^*$.*

Théorème I.2 ([2])**.** *Un twist de JONQUIÈRES $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ satisfait les propriétés suivantes :*
- *l'ensemble*
$$\left\{ \lim_{n\to+\infty} \frac{\deg(\psi\phi^n\psi^{-1})}{n} \,\middle|\, \psi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \right\}$$
admet un minimum $\frac{\mu(\phi)}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$;

- *il existe un entier* $a \in \mathbb{N}$ *tel que*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\deg \phi^n}{n} = a^2 \frac{\mu(\phi)}{2},$$
de plus, $a = 1$ *si et seulement si* ϕ *préserve un pinceau de droites.*

Théorème I.3 ([2])**.** *Considérons un twist d'*HALPHEN ϕ.

- *L'ensemble*
$$\left\{ \lim_{n\to+\infty} \frac{\deg(\psi\phi^n\psi^{-1})}{n^2} \,\middle|\, \psi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \right\}$$
admet un minimum $\kappa(\phi) \in \mathbb{Q}_{>0}$*.*
- *Il existe un entier* $a \geq 3$ *tel que*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\deg \phi^n}{n^2} = \frac{a^2}{9}\kappa(\phi).$$
De plus, $a = 3$ *si et seulement si* ϕ *préserve un pinceau d'*HALPHEN.

On donne une interprétation géométrique du nombre $\mu(\phi)$ qui s'avère être un invariant de conjugaison birationnelle et permet de donner une caractérisation des éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ birationnellement conjugués à un automorphisme d'une surface rationnelle projective lisse.

Considérons une surface projective lisse S ; tout élément ϕ de $\mathrm{Bir}(\mathrm{S})$ admet une résolution

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Z} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathrm{S} \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & \mathrm{S}, \end{tikzcd}$$

où π_1, π_2 désignent des suites d'éclatements. La résolution est dite ***minimale*** si et seulement si aucune (-1) courbe de Z est contractée à la fois par π_1 et π_2. Les ***points base*** de ϕ sont les points apparaissant dans π_1 ; ce sont des points de S ou infiniment proches. On rappelle que l'ensemble de ces points forment le lieu base $\mathfrak{base}(\phi)$ de ϕ ; on désigne par $\mathfrak{b}(\phi)$ le cardinal de $\mathfrak{base}(\phi)$. Remarquons que
$$\mathfrak{b}(\phi) = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(\mathrm{Z}) - \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(\mathrm{S}).$$
En particulier on a donc $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi^{-1})$. On introduit la quantité
$$\mu(\phi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathfrak{b}(\phi^n)}{n}$$
appelé ***nombre dynamique de points base*** de ϕ. Puisque pour tous ϕ, ψ dans $\mathrm{Bir}(\mathrm{S})$ on a l'inégalité $\mathfrak{b}(\phi\psi) \leq \mathfrak{b}(\phi) + \mathfrak{b}(\psi)$, le nombre $\mu(\phi)$ est un réel positif ou nul. De plus, à partir de $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi^{-1})$ on obtient $\mu(\phi^n) = |n\mu(\phi)|$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$. Par ailleurs soient ϕ dans $\mathrm{Bir}(\mathrm{S})$ et $\psi\colon \mathrm{S} \dashrightarrow \mathrm{Z}$ une transformation birationnelle entre surfaces projectives lisses ; pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a
$$-2\mathfrak{b}(\psi) + \mathfrak{b}(\phi^n) \leq \mathfrak{b}(\psi\phi^n\psi^{-1}) \leq 2\mathfrak{b}(\psi) + \mathfrak{b}(\phi^n).$$
Par conséquent on a l'énoncé qui suit.

Proposition I.4 ([2])**.** *Le nombre dynamique de points base est un invariant de conjugaison.*

De plus, si $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathrm{S})$ *est conjugué à un automorphisme d'une surface projective lisse, alors* $\mu(\phi) = 0$*.*

Soit ϕ une transformation birationnelle de S ; un point $p \in \mathfrak{base}(\phi)$ (infiniment proche ou non) est ***persistant*** s'il existe un entier N tel que

- $p \in \mathfrak{base}(\phi^k)$ pour tout $k \geq N$,
- $p \not\in \mathfrak{base}(\phi^{-k})$ pour tout $k \geq N$.

Soit $p \not\in \mathfrak{base}(\phi)$ un point de S ou un point infiniment proche. Considérons une résolution minimale de ϕ

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Z} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathrm{S} \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

où π_1, π_2 désignent des suites d'éclatements. Le point p n'étant pas un point base de ϕ il correspond via π_1 à un point de Z ou un point infiniment proche. En appliquant π_2 on peut voir ce point comme un point de S ou infiniment proche que l'on note $\phi^\bullet(p)$. Remarquons que si, de plus, $\phi(p)$ n'est pas un point base de ψ, alors $(\psi\phi)^\bullet(p) = \psi^\bullet(\phi^\bullet(p))$. Bien sûr, si p est un point général de S, alors $\phi^\bullet(p) = \phi(p) \in \mathrm{S}$. On peut donc définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des points de S ou infiniment proches : p est équivalent à q si et seulement s'il existe un entier k tel que $(\phi^k)^\bullet(p) = q$; ceci implique en particulier que p n'est pas un point base de ϕ^k et q n'est pas un point base de ϕ^{-k}. Donnons une interprétation géométrique du nombre $\mu(\phi)$:

Proposition I.5 ([2]). *Soit ϕ une transformation birationnelle d'une surface projective lisse S. Notons ν le nombre de classes d'équivalence de points base persistants de ϕ. Alors l'ensemble*

$$\left\{ \mathfrak{b}(\phi^n) - \nu n \,\middle|\, n \geq 0 \right\} \subset \mathbb{Z}$$

est borné.

En particulier, $\mu(\phi)$ est un entier, égal à ν.

Par ailleurs la seconde assertion de la Proposition I.4 est une équivalence qui généralise [**DF01**, Theorem 0.4] :

Proposition I.6 ([2]). *Soit ϕ une transformation birationnelle d'une surface projective lisse. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *$\mu(\phi) = 0$,*
- *ϕ est conjugué à un automorphisme d'une surface projective lisse.*

Donnons quelques applications :

- description des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dont deux itérés distincts sont conjugués :

  Proposition I.7 ([2]). *Soit $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ tel que ϕ^n et ϕ^m soient conjugués. Supposons $|m| \neq |n|$; alors ϕ est elliptique, $\lambda(\phi) = 1$ et $\mu(\phi) = 0$.*

  Si, de plus, ϕ est d'ordre infini, alors ϕ est conjugué à un automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui est dans une carte affine bien choisie de la forme $(z_0, z_1) \mapsto (\alpha z_0, z_1 + 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha^{m+n} = 1$ ou $\alpha^{m-n} = 1$.

- non-existence de plongements de certains groupes classiques dans le groupe de CREMONA :

Théorème I.8 ([2]). *Si $|m|\neq 1$ et $|n|\neq 1$ sont distincts, il n'y a pas de plongement du groupe de* BAUMSLAG-SOLITAR

$$\mathrm{BS}(m,n)=\langle r,s\,|\,rs^mr^{-1}=s^n\rangle$$

dans le groupe de CREMONA.

IDÉE DE DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un morphisme ρ de $\mathrm{BS}(m,n)$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ et que $\rho(s^m)$ soit d'ordre infini. En utilisant l'énoncé I.7 on peut déterminer $\rho(s^m)$ puis $\rho(r)$; on en déduit que l'image du groupe engendré par ces deux transformations est résoluble. Mais un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{BS}(m,n)$ est résoluble si et seulement si $|m|=1$ ou $|n|=1$. □

- On peut caractériser à conjugaison birationnelle près les plongements de $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Q})$ dans le groupe de CREMONA :

Théorème I.9 ([2]). *Soit $\rho\colon \mathrm{GL}(2;\mathbb{Q})\to\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ un plongement. À conjugaison près par un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$, il existe un entier impair k et un homomorphisme $\chi\colon\mathbb{Q}^*\to\mathbb{C}^*$ tels que pour tout $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ de $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Q})$ on ait*

$$\rho\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=\left(\frac{\chi(ad-bc)}{(cz_1+d)^k}z_0,\frac{az_1+b}{cz_1+d}\right).$$

2. Centralisateurs dans le groupe de CREMONA

Un des problèmes majeurs en dynamiques réelle et complexe est la description des centralisateurs des systèmes dynamiques discrets. Ainsi JULIA ([Jul68, Jul22]) puis RITT ([Rit23]) ont ouvert la voie en montrant que l'ensemble

$$\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^1_\mathbb{C})\big)=\big\{\psi\in\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^1_\mathbb{C})\,\big|\,\psi\phi=\phi\psi\big\}$$

des fonctions rationnelles commutant à une fonction rationnelle fixée ϕ est en général réduit à

$$\phi_0^\mathbb{N}=\{\phi_0^n\,|\,n\in\mathbb{N}\},$$

où ϕ_0 désigne un élément de $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^1_\mathbb{C})\big)$, sauf dans des cas très spéciaux. Dans les années 60 SMALE pose le problème suivant : un difféomorphisme générique $\phi\colon M\to M$ d'une variété compacte a-t-il un centralisateur trivial ? Autrement dit a-t-on

$$\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Diff}^\infty(M)\big)=\big\{\phi^n\,\big|\,n\in\mathbb{Z}\big\}?$$

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question dans différents contextes. Par exemple PALIS et YOCCOZ ont démontré qu'il existe un ouvert dense Ω de l'ensemble des difféomorphismes ANOSOV du tore ayant la propriété suivante : pour tout ϕ dans Ω, le centralisateur de ϕ est trivial ([PY89]). Nous allons ici nous restreindre au cas des transformations birationnelles du plan ; nous verrons que les techniques et les résultats sont différents suivant que ϕ est elliptique, un twist de JONQUIÈRES, un twist d'HALPHEN ou hyperbolique.

2.1. Commençons par le cas des transformations birationnelles elliptiques. Soient $p_1, \ldots, p_7$ sept points de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en position générale. Désignons par $\mathcal{L}$ le système linéaire de cubiques passant par les p_i ; il est de dimension 2. Soit p un point générique de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; considérons le pinceau $\mathcal{L}_p$ constitué des éléments de $\mathcal{L}$ passant par p. Un pinceau de cubiques génériques a neuf points base ; on définit par $i_G(p)$ le neuvième point base de $\mathcal{L}_p$. L'involution i_G qui à p associe $i_G(p)$ ainsi construite est appelée ***involution de* GEISER**. Elle est birationnelle et ses points fixes forment une courbe non hyperelliptique de genre 3.

Lorsque les éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ sont d'ordre fini, tous les cas de figure peuvent se produire : le centralisateur de l'involution

$$\sigma\colon (z_0 : z_1 : z_2) \dashrightarrow (z_1z_2 : z_0z_2 : z_0z_1)$$

est clairement non dénombrable alors que le centralisateur d'une involution de GEISER est fini ([**BPV09**]).

Comme on l'a vu au Théorème I.1 il existe des formes normales pour les transformations birationnelles elliptiques d'ordre infini ; ceci nous permet d'établir l'énoncé suivant :

Théorème I.10 ([**2**]). *Le centralisateur d'une transformation birationnelle elliptique d'ordre infini est non dénombrable.*

Plus précisément le centralisateur de la première forme normale est

$$\left\{(\eta(z_0), z_1R(z_0^k)) \,\middle|\, R \in \mathbb{C}[z_0],\, \eta \in \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}),\, \eta(\alpha z_0) = \alpha\eta(z_0)\right\}$$

et celui de la seconde

$$\left\{(\eta(z_0), z_1 + R(z_0)) \,\middle|\, \eta \in \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}),\, \eta(\alpha z_0) = \alpha\eta(z_0),\, R \in \mathbb{C}[z_0],\, R(\alpha z_0) = \alpha R(z_0)\right\}.$$

2.2. Concentrons-nous désormais sur les twist de JONQUIÈRES. Le groupe de JONQUIÈRES est le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ préservant un pinceau de courbes rationnelles ; on le note J. Deux pinceaux de courbes rationnelles étant birationnellement conjugués, J ne dépend pas, à conjugaison près, du pinceau choisi. On peut donc supposer à conjugaison birationnelle près que J est, dans une carte affine (z_0, z_1) de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, le groupe maximal des transformations birationnelles laissant la fibration $z_1 =$ cte invariante. Une transformation ϕ de J permute les fibres de la fibration donc induit un automorphisme de la base $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, *i.e.* un élément de $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$; lorsque ϕ préserve les fibres, ϕ agit comme une homographie dans les fibres génériques. Le groupe de JONQUIÈRES s'identifie donc au produit semi-direct $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}(z_1)) \rtimes \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$; autrement dit tout élément de J est de la forme

$$\phi = \left(\frac{A(z_1)z_0 + B(z_1)}{C(z_1)z_0 + D(z_1)}, \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}\right)$$

où

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}(z_1)), \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}).$$

On désigne par pr_2 le morphisme de J dans $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$. Les transformations de J qui préservent la fibration fibre à fibre forment un sous-groupe distingué (le noyau de pr_2) noté $\mathrm{J}_0 \simeq \mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}(z_1))$. À ϕ dans J_0 on associe un élément de $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C}(z_1))$ noté M_ϕ. L'***indice de* BAUM-BOTT** (par analogie avec l'indice de BAUM-BOTT d'un feuilletage [**BB70, GML97**]) de ϕ est par définition $\frac{(\mathrm{tr}\, M_\phi)^2}{\det M_\phi}$, on le note $\mathrm{BB}(\phi)$.

Un élément ϕ de J_0 est, à conjugaison birationnelle près, de l'une des formes suivantes ([9])

$$(z_0+a(z_1),z_1), \qquad (b(z_1)z_0,z_1), \qquad \left(\frac{c(z_1)z_0+F(z_1)}{z_0+c(z_1)},z_1\right)$$

avec a dans $\mathbb{C}(z_1)$, b dans $\mathbb{C}(z_1)^*$ et c, F dans $\mathbb{C}[z_1]$, F n'étant pas un carré. Un sous-groupe abélien maximal non fini de J_0 est (à conjugaison près dans J_0) de l'un des types suivants

$$\mathrm{J}_a=\big\{(z_0+a(z_1),z_1)\,\big|\,a\in\mathbb{C}(z_1)\big\}, \qquad \mathrm{J}_m=\big\{(b(z_1)z_0,z_1)\,\big|\,b\in\mathbb{C}(z_1)^*\big\},$$

$$\mathrm{J}_F=\left\{\mathrm{id}=(z_0,z_1),\left(\frac{c(z_1)z_0+F(z_1)}{z_0+c(z_1)},z_1\right)\,\Big|\,c\in\mathbb{C}(z_1)\right\}$$

où F désigne un élément de $\mathbb{C}[z_1]$ qui n'est pas un carré ([9]) ; plus précisément à conjugaison près par une transformation $(a(z_1)z_0,z_1)$ ad-hoc on peut supposer que F est un polynôme à racines simples, ce que nous faisons dans la suite. Si ϕ est un élément de J_0 et si $\mathrm{Ab}(\phi)$ désigne le sous-groupe abélien maximal non fini de J_0 contenant ϕ alors, à conjugaison près, $\mathrm{Ab}(\phi)$ est J_a, J_m ou J_F. Plus exactement si ϕ est de la forme $(z_0+a(z_1),z_1)$ (resp. $(b(z_1)z_0,z_1)$, resp. $\left(\frac{c(z_1)z_0+F(z_1)}{z_0+c(z_1)},z_1\right)$), alors $\mathrm{Ab}(\phi)=\mathrm{J}_a$ (resp. $\mathrm{Ab}(\phi)=\mathrm{J}_m$, resp. $\mathrm{Ab}(\phi)=\mathrm{J}_F$).

Remarquons qu'un élément de J n'est pas nécessairement un twist de JONQUIÈRES ; c'est par exemple le cas des transformations du type $(\alpha z_0,\beta z_1)$ avec α, β dans $\mathbb{C}^*$. On peut caractériser simplement les transformations de CREMONA qui préservent une fibration rationnelle fibre à fibre et sont des twist de JONQUIÈRES :

Théorème I.11 ([4]). *Soit ϕ une transformation de* CREMONA *qui préserve une fibration rationnelle fibre à fibre ; ϕ est un twist de* JONQUIÈRES *si et seulement si l'indice de* BAUM-BOTT *de ϕ appartient à $\mathbb{C}(z_1)\smallsetminus\mathbb{C}$.*

Considérons un élément ϕ de J_0 et une transformation rationnelle $\varphi=(\varphi_0(z_0,z_1),\varphi_1(z_0,z_1))$ qui commute à ϕ. Si φ n'appartient pas à J, alors $\varphi_1=$ cte est une fibration invariante fibre à fibre par ϕ différente de $z_1=$ cte. Ainsi ϕ possède deux fibrations distinctes invariantes fibre à fibre et est donc périodique. En effet les intersections des fibres $z_1=$ cte et $\varphi_1=$ cte génériques sont de cardinal fini, uniformément borné ; or ces intersections sont invariantes par ϕ. Autrement dit on a la

Proposition I.12 ([4]). *Soit ϕ dans J_0 ; alors*
- $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)\subset \mathrm{J}$ *;*
- *ou ϕ est périodique.*

À l'aide de cette propriété et des formes normales des éléments de J_0 on établit le fait suivant :

Théorème I.13 ([4]). *Soit ϕ une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui préserve une fibration rationnelle fibre à fibre. Si ϕ est un twist de* JONQUIÈRES*, alors $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$ est une extension finie de $\mathrm{Ab}(\phi)$.*

Remarque 1. Si ϕ appartient à J_a ou J_m on obtient le résultat par calcul « direct ». Lorsque ϕ est un élément de J_F on distingue les cas $\deg F\geq 3$ et $\deg F<3$; ce qui géométriquement se traduit de la façon suivante : on distingue le cas où la courbe de points fixes de ϕ est de genre >0 du cas où elle est de genre 0.

Cet énoncé nous permet de décrire, à indice fini près, les centralisateurs des transformations de CREMONA qui préservent (pas nécessairement fibre à fibre) une unique fibration rationnelle, question étroitement liée à des problèmes classiques d'équations aux différences (voir l'idée de démonstration de l'énoncé qui suit). Génériquement ces transformations ont un centralisateur trivial, *i.e.* réduit aux itérés de ϕ (*voir* [4]). En particulier on a le résultat suivant :

Théorème I.14 ([4]). *Soit ϕ une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui préserve une unique fibration rationnelle. Le centralisateur de ϕ est virtuellement résoluble.*

IDÉE DE DÉMONSTRATION. Soit ϕ un élément de $\mathrm{J}\setminus\mathrm{J}_0$ qui préserve une unique fibration rationnelle. Posons $\mathrm{G}=\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$. Considérons la restriction de pr_2 à G qui à un élément du centralisateur de ϕ associe son action sur la base de la fibration. Posons $\mathrm{H}=\ker \mathrm{pr}_{2_{|\mathrm{G}}}$. On raisonne suivant la nature de H. Si H est trivial, alors G est isomorphe à $\mathrm{pr}_2\big(\mathrm{G}\big)$ qui coïncide avec $\mathbb{C}^*\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou est abélien (isomorphe à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$).

- Supposons que H soit de torsion.
  Alors H est fini et G est isomorphe à $\mathrm{pr}_2\big(\mathrm{G}\big)$ qui est un sous-groupe abélien de $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})$. En effet, raisonnons par l'absurde : si H est infini, alors H est à conjugaison près de la forme
  $$\mathrm{K}_{a,\Lambda}=\langle\left(\frac{a(z_1)}{z_0},z_1\right)(\omega z_0,z_1)\,|\,\omega\in\Lambda\rangle$$
  où a désigne un élément de $\mathbb{C}(z_1)$ (éventuellement nul) et Λ un sous-groupe infini de racines de l'unité avec la convention
  $$\mathrm{K}_{0,\Lambda}=\langle(\omega z_0,z_1)\,|\,\omega\in\Lambda\rangle.$$
  Par passage à l'adhérence de ZARISKI on constate que ϕ commute aussi aux éléments du type $(\alpha z_0,z_1)$ avec α quelconque dans $\mathbb{C}^*$: contradiction avec l'hypothèse H est de torsion.
- Reste l'éventualité suivante : H n'est pas de torsion.
  À conjugaison près on se ramène à $\mathrm{pr}_2(\phi)=z_1+1$ ou $\mathrm{pr}_2(\phi)=\alpha z_1$. On va supposer que $\mathrm{pr}_2(\phi)=z_1+1$. Considérons un élément d'ordre infini ψ de H ; puisque $\mathrm{pr}_2(\phi)$ est une translation, l'image de pr_2 est infinie et ψ est à conjugaison près de la forme (z_0+1,z_1) ou $(\alpha z_0,z_1)$ où α désigne un élément de $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité. Supposons par exemple que $\psi=(z_0+1,z_1)$. À partir de la description de $\mathrm{Cent}\big(\psi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)\ni\phi$, on obtient que ϕ s'écrit $(z_0+a(z_1),z_1+1)$ pour un certain a dans $\mathbb{C}(z_1)$. Rappelons que $\mathrm{Cent}(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}))$ est contenu dans J puisque ϕ préserve une seule fibration rationnelle. Remarquons que si l'équation aux différences
  $$f(z_1)-f(z_1+1)=a(z_1)$$
  possède une solution rationnelle, alors ϕ est conjuguée à (z_0,z_1+1) qui préserve plus d'une fibration. Cette remarque permet d'établir l'égalité : $\ker \mathrm{pr}_{2_{|\mathrm{G}}}=\{(z_0+\beta,z_1)\,|\,\beta\in\mathbb{C}\}$. La suite exacte
  $$0\longrightarrow\ker \mathrm{pr}_{2_{|\mathrm{G}}}\longrightarrow\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{im}\,\mathrm{pr}_{2_{|\mathrm{G}}}\longrightarrow 0$$
  donne une description de G. L'image de pr_2 étant contenue dans $\mathbb{C}$, le premier groupe dérivé de G est abélien et G est résoluble.

$\square$

2.3. Étudions maintenant le cas des twists d'HALPHEN.

Proposition I.B ([**Giz80**]). *Soit* ϕ *un twist d'*HALPHEN *;* $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$ *contient un sous-groupe d'indice fini qui est abélien, libre et de rang* ≤ 8.

DÉMONSTRATION ([**Can11**]). À conjugaison birationnelle près on peut supposer que ϕ est une transformation d'une surface rationnelle S munie d'une fibration elliptique $\mathrm{S}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et que cette fibration est ϕ-invariante. On peut de plus se ramener au cas où la fibration est minimale (*i.e.* il n'y a pas de courbe d'auto-intersection -1 dans les fibres) et donc au cas où ϕ est un automorphisme. La fibration elliptique est l'unique fibration invariante par ϕ (*voir* [**DF01**]). Il en résulte que cette fibration est invariante par le centralisateur de ϕ et donc que $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathrm{S})\big)\subset\mathrm{Aut}(\mathrm{S})$.

La fibration étant minimale, la surface S est obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ aux 9 points base d'un pinceau de HALPHEN et son groupe de NÉRON-SEVERI est de rang 10. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{S})$ peut être plongé dans le semi-groupe des endomorphismes de $\mathrm{H}^2(\mathrm{S},\mathbb{Z})$ pour la forme d'intersection et préserve la classe $[\mathrm{K_S}]$ du diviseur canonique qui n'est autre que la classe de la fibration elliptique. La dimension de l'hyperplan orthogonal à $[\mathrm{K_S}]$ est 9 et la restriction de la forme d'intersection à cet hyperplan est semi-négative : son noyau coïncide avec $\mathbb{Z}[\mathrm{K_S}]$. Il s'en suit que $\mathrm{Aut}(\mathrm{S})$ contient un groupe abélien d'indice fini de rang ≤ 8.

□

2.4. Dans [**Can11**] CANTAT démontre que si ϕ est un élément hyperbolique du groupe de CREMONA et si ψ commute à ϕ, alors il existe deux entiers m dans $\mathbb{N}^*$ et n dans $\mathbb{Z}$ tels que $\psi^m=\phi^n$. Il donne deux démonstrations de cet énoncé, l'une d'entre elles est de nature dynamique et nous allons en esquisser les grandes lignes. On dit que $\phi\in\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est ***algébriquement stable*** si et seulement si les orbites positives $\big\{\phi^n(p)\,|\,n\geq 0\big\}$ des points d'indétermination p de ϕ^{-1} n'intersectent pas le lieu d'indétermination $\mathrm{Ind}\,\phi$ de ϕ. On dit que ϕ ***satisfait la condition de*** **BEDFORD-DILLER** si la somme

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda(\phi)^n}\log(\mathrm{dist}(\phi^n(p),\mathrm{Ind}\,\phi))$$

converge pour tout $p\in\mathrm{Ind}\,\phi^{-1}$; autrement dit ϕ vérifie la condition de BEDFORD-DILLER si les orbites positives $\big\{\phi^n(p)\,|\,n\geq 0\big\}$ des points d'indétermination p de ϕ^{-1} approchent le lieu d'indétermination de ϕ avec une vitesse « contrôlée ». Si ϕ est une transformation birationnelle qui satisfait la condition de BEDFORD-DILLER, alors ϕ possède une infinité de points périodiques hyperboliques pour lesquels variétés stable et instable s'intersectent ([**BD05, Duj06**]). Un élément ψ de $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$ permute les variétés stable et instable des points périodiques hyperboliques de ϕ ; on conclut en utilisant le fait que ces variétés sont ZARISKI denses. Dans l'éventualité où ϕ ne satisfait pas la condition de BEDFORD-DILLER d'autres arguments de nature dynamique entrent en jeu, nous n'en parlerons pas ici. Plus récemment, avec BLANC, CANTAT précise son résultat comme suit :

Théorème I.C ([**BC13b**]). *Soit* ϕ *une transformation hyperbolique de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. *Le groupe infini cyclique engendré par* ϕ *est un sous-groupe d'indice fini de* $\mathrm{Cent}\big(\phi;\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$.

3. Twists de Jonquières et $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-cocycles

Dans [6] on poursuit l'étude de la famille de transformations birationnelles $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ débutée dans [12]. La famille $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ est définie par

$$f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \qquad (z_0:z_1:z_2) \dashrightarrow \big((\alpha z_0+z_1)z_2 : \beta z_1(z_0+z_2) : z_2(z_0+z_2)\big)$$

où α, β désignent des nombres complexes de module 1. Les points base de $f_{\alpha,\beta}$ sont

$$(1:0:0), \qquad (0:1:0), \qquad (-1:\alpha:1).$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites pour α, β génériques :

- $\mathrm{Cent}\big(f_{\alpha,\beta};\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (*voir* [12]). Donnons une idée de la démonstration : $f_{\alpha,\beta}$ a un seul point base persistant de $f_{\alpha,\beta}$, le point $p=(1:\alpha:1)$. Ce point est éclaté sur une fibre de la fibration $z_1=$ cte. Soit ψ dans $\mathrm{Cent}\big(f_{\alpha,\beta};\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})\big)$; puisque ψ contracte un nombre fini de courbes il existe un entier k (que l'on choisit minimal) pour lequel $f^k_{\alpha,\beta}(p)$ n'est pas contracté par ψ. Quitte à remplacer ψ par $\widetilde{\psi}=\psi f^{k-1}_{\alpha,\beta}$ le point $\widetilde{p}$ appartient à $\mathrm{Ind}\, f_{\alpha,\beta}$; en d'autres termes $\widetilde{\psi}$ permute les points d'indétermination de $f_{\alpha,\beta}$. Puisque p est l'unique point d'indétermination persistant, il est fixé par $\widetilde{\psi}$. Les paramètres α, β étant génériques l'orbite négative de p sous l'action de $f_{\alpha,\beta}$ est Zariski dense d'où l'égalité $\widetilde{\psi}=\mathrm{id}$.
- La transformation $f_{\alpha,\beta}$ est un twist de Jonquières et ([6])
$$\mu(f_{\alpha,\beta})=1/2.$$
- Des domaines de linéarisation de rang 1 et 2 coexistent : il existe un domaine de linéarisation où l'orbite d'un point générique sous l'action de $f_{\alpha,\beta}$ est un tore, un autre domaine de linéarisation où l'orbite d'un point générique sous l'action de $f^2_{\alpha,\beta}$ est un cercle ([6]).

On peut aussi voir la famille $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$; les ensembles $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{S}^1_{\rho}$, où

$$\mathbb{S}^1_{\rho}=\big\{z_1\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\,\big|\,|z_1|<\rho\big\}$$

sont invariants. Les domaines de linéarisation évoqués précédemment peuvent être précisés comme suit :

Théorème I.15 ([12, 6]). *Supposons que α et β soient génériques.*

(1) *Il existe un réel strictement positif r tel que $f_{\alpha,\beta}$ est conjugué à $(\alpha z_0,\beta z_1)$ sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{D}(0,r)$ où $\mathbb{D}(0,r)$ désigne le disque centré à l'origine de rayon r.*

Un tel domaine existe aussi au voisinage du point $(\alpha-1,0)$.

(2) *Il existe un réel strictement positif r' tel que $\left(\frac{1}{z_0},\frac{1}{z_1}\right) f^2_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{z_0},\frac{1}{z_1}\right)$ soit conjugué à $\left(\frac{z_0}{\beta},\frac{z_1}{\beta^2}\right)$ sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{D}(0,r')$.*

Dans la carte affine $z_2=1$, on a

$$f_{\alpha,\beta}(z_0,z_1)=\left(\frac{\alpha z_0+z_1}{z_0+1},\beta z_1\right);$$

on peut donc poursuivre l'étude de la transformation $f_{\alpha,\beta}$ en la regardant comme un cocycle $(A^{\alpha,\rho},\beta)$ où
$$A^{\alpha,\rho}(z_1)=\begin{bmatrix}\alpha & z_1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Rappelons quelques définitions. Un $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-***cocycle quasipériodique*** est un couple (A,β) où β est un nombre réel non nul et
$$A\colon \mathbb{S}^1_1\to \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$$
une fonction analytique agissant sur $\mathbb{C}^2\times\mathbb{S}^1_1$ de la façon suivante
$$(z_0,z_1)\mapsto (A(z_1)z_0,\beta z_1).$$
L'itéré n-ième de (A,β) est noté $(A_n,n\beta)$ où $A_0(z_1)=\mathrm{id}$ et pour $n\geq 1$
$$A_n(z_1)=A(\beta^{n-1}z_1)\dots A(z_1)\qquad\qquad A_{-n}(z_1)=A_n(\beta^{-n}z_1)^{-1}.$$
L'***exposant de*** **LYAPUNOV** du $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-cocycle quasipériodique (A,β) est donné par
$$L(A,\beta)=\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{S}^1_1}\ln||A_n(z_1)||\,\mathrm{d}z_1.$$

En utilisant les travaux d'AVILA on détermine l'exposant de LYAPUNOV du cocyle $(A^{\alpha,\rho},\beta)$:

Théorème I.16 ([6])**.** *L'exposant de* LYAPUNOV *du cocycle associé à $f_{\alpha,\beta}$ est*

- *positif dès que $\rho>1$;*
- *nul dès que $\rho\leq 1$.*

Plus précisément $f_{\alpha,\beta}$ est semi-conjuguée à $\left(\frac{\alpha z_0+z_1^2}{z_0+1},\beta^{1/2}z_1\right)$ et l'exposant de LYAPUNOV *du cocycle $(B^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})$ où*
$$B^{\alpha,\rho}(z_1)=\begin{bmatrix}\alpha & z_1^2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
vaut $\max(0,\ln\rho)$.

Avant de donner une idée de démonstration, voici quelques résultats sur les cocycles (**[Avi13a, Avi13b]**). Si $A\in C^\omega\big(\mathbb{S}^1_1,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})\big)$ admet une extension holomorphe sur $|\mathrm{Im}\,z_1|<\delta$, alors pour $|\varepsilon|<\delta$ on peut définir $A_\varepsilon\in C^\omega\big(\mathbb{S}^1_1,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})\big)$ par
$$A_\varepsilon(z_1)=A(z_1+\mathrm{i}\varepsilon).$$
La fonction $\varepsilon\mapsto L(A_\varepsilon,\beta)$ est une fonction convexe. On peut donc introduire la notion d'accélération :

Définition 2. L'***accélération*** d'un $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-cocycle quasipériodique (A,β) est donnée par
$$\omega(A,\beta)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\big(L(A_\varepsilon,\beta)-L(A,\beta)\big).$$

La fonction exposant de LYAPUNOV est convexe et continue ; l'accélération est donc une fonction semi-continue supérieurement sur $C^\omega\big(\mathbb{S}^1_1,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})\big)\times\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$. De plus l'accélération est quantifiée :

Théorème I.D ([**Avi13a**])**.** *Si (A,β) est un $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-cocycle quasipériodique avec $\beta\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$, alors $\omega(A,\beta)$ est toujours un entier.*

Une conséquence directe est la suivante : la fonction $\varepsilon\mapsto L(A_\varepsilon,\beta)$ est affine par morceaux. AVILA introduit alors la notion de régularité :

Définition 3. Un cocycle $(A,\beta)\in C^\omega\big(\mathbb{S}^1_1,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})\big)\times\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ est ***régulier*** si $\varepsilon\mapsto L(A_\varepsilon,\beta)$ est affine au voisinage de 0.

En d'autres termes (A,β) est régulier si pour tout ε petit on a

$$L(A_\varepsilon,\beta)-L(A,\beta)=2\pi\varepsilon\omega(A,\beta).$$

IDÉE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.16. Les cocycles $(A^{\alpha,\rho},\beta)$ et $(B^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})$ étant conjugués nous allons nous concentrer sur $(B^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})$. On lui associe le $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-cocycle $(\widetilde{B}^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})$ où

$$\widetilde{B}^{\alpha,\rho}(z_1)=\frac{1}{\sqrt{\alpha-z_1^2}}\,B^{\alpha,\rho}(z_1).$$

Grâce à ([**Avi13a**, **Avi13b**]) on montre que $L(\widetilde{B}^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})=0$ lorsque ρ est proche de 0 (resp. lorsque ρ est proche de $+\infty$) ; on utilise en particulier que les cocycles presque constants sont réguliers, d'accélération nulle. La quantification de l'accélération, les continuité et convexité de L permettent d'établir que $L(\widetilde{B}^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})=0$ pour tout ρ. On conclut à l'aide de l'égalité

$$\begin{aligned} L(B^{\alpha,\rho},\beta^{1/2}) &= L(\widetilde{B}^{\alpha,\rho},\beta^{1/2})+\int_{\mathbb{S}^1_\rho}\ln\sqrt{\alpha-z_1^2}\,\mathrm{d}z_1\\ &= 0+\max(0,\ln\rho). \end{aligned}$$

$\square$

CHAPITRE II

Dynamique en dimension 2 et plus

Si X est un espace topologique et f un homéomorphisme sur X, l'***entropie topologique*** de f, notée $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$, est un nombre positif ou nul qui mesure la complexité du système dynamique (X,f). Si X est une variété kählérienne compacte et f un biholomorphisme sur X alors l'entropie est donnée par ([**Gro03**, **Gro03**, **Yom87**])

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{1\leq k\leq \dim X} \log \delta_k(f)$$

où $\delta_k(f)$ est le rayon spectral de $f^*\colon \mathrm{H}^{k,k}(X) \circlearrowleft$. Remarquons que lorsque $X=\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ on a $\delta_1(f)=\lambda(f)$.

L'étude des automorphismes des surfaces complexes compactes d'entropie positive est étroitement liée aux transformations birationnelles du plan projectif complexe. En effet considérons un automorphisme ϕ sur une surface complexe compacte S d'entropie positive (([**Can99**]))

- ou bien ϕ est birationnellement conjugué à un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ (et dans ce cas S est rationnelle),
- ou bien la dimension de KODAIRA de S est nulle et ϕ est conjugué à un automorphisme sur l'unique modèle minimal de S qui est un tore ou une surface K3 ou une surface de ENRIQUES.

Le cas des surfaces K3 a été traité dans [**Can01**, **McM02**, **Ogu10**, **Sil91**, **Wan95**]. Un des premiers exemples dans le contexte des surfaces rationnelles est dû à COBLE : considérons une courbe sextique générique avec dix points doubles dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et la surface S obtenue en éclatant ces dix points. La surface S est le quotient d'une surface K3 par une involution et les automorphismes de S proviennent des automorphismes de la surface K3 (*voir* [**Cob61**]).

Un autre exemple classique, dû à KUMMER, est le suivant : soient $\Lambda=\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ et $\mathcal{E}=\mathbb{C}/\Lambda$. Le groupe $\mathrm{GL}(2;\Lambda)$ agit linéairement sur $\mathbb{C}^2$ et préserve le réseau $\Lambda\times\Lambda$; par suite tout élément M de $\mathrm{GL}(2;\Lambda)$ induit un automorphisme f_M sur $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ qui commute à l'automorphisme $\iota=(\mathrm{i}z_0,\mathrm{i}z_1)$. L'automorphisme f_M se relève en un automorphisme $\widetilde{f_M}$ sur $\widetilde{\mathcal{E}\times\mathcal{E}/\langle\iota\rangle}$ qui est une surface de KUMMER après désingularisation. De plus, l'entropie topologique de $\widetilde{f_M}$ est égale à deux fois le logarithme du rayon spectral de M. Une construction analogue est bien sûr possible avec $\Lambda = \mathbb{Z}[\mathrm{j}]$.

Il y a des obstructions à l'existence d'automorphisme d'entropie positive sur les surfaces rationnelles. En effet si S est une surface rationnelle munie d'un automorphisme d'entropie positive, alors la représentation

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{S})\to\mathrm{GL}(\mathrm{Pic}(\mathrm{S})) \qquad \psi\mapsto\psi^*$$

est d'image infinie et d'après [**Har87**] de noyau fini ; en particulier il n'y a pas de champ de vecteurs holomorphe non nul sur S. Une autre obstruction est dûe à NAGATA ([**Nag60**]) : S est ***basique***, *i.e.* S est obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en un nombre fini N de points et $N\geq 10$. Expliquons brièvement pourquoi $N\geq$ 10. Raisonnons par l'absurde : considérons une surface rationnelle S obtenue en éclatant $N\leq 9$ points de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et ϕ un automorphisme de S ; supposons que $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\phi)=\log\lambda>0$. Il existe alors

$\theta \in \mathrm{H}^2(\mathrm{S};\mathbb{R})$ tel que $\phi^*\theta = \lambda\theta$ et $\theta^2 = 0$ (*voir* [**Can99**]). De plus $\phi_*\mathrm{K_S} = \phi^*\mathrm{K_S} = \mathrm{K_S}$ où $\mathrm{K_S}$ désigne la classe du diviseur canonique sur S. À partir de

$$\langle\theta, \mathrm{K_S}\rangle = \langle\phi^*\theta, \phi^*\mathrm{K_S}\rangle = \langle\lambda\theta, \mathrm{K_S}\rangle$$

on obtient $\langle\theta, \mathrm{K_S}\rangle = 0$. Puisque la signature de la forme d'intersection sur S est $(1, N-1)$ et que $\mathrm{K}_\mathrm{S}^2 \geq 0$ pour $N \leq 9$, on a $\theta = c\mathrm{K_S}$ pour un certain $c < 0$. Mais alors $\phi^*\theta = \theta \neq \lambda\theta$: contradiction.

Les premières familles d'exemples ont été construites indépendamment par McMullen et Bedford-Kim via des méthodes distinctes ([**McM07, BK09**]). Les surfaces rationnelles qu'ils considèrent sont obtenues en éclatant $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ en un nombre fini de points distincts et propres [1] ; les automorphismes proviennent de transformations birationnelles du type $A\sigma$ avec A dans $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ et σ l'involution de Cremona.

Dans la première partie de ce chapitre on donne une méthode qui permet de construire des familles d'automorphismes d'entropie positive sur des surfaces rationnelles à partir de transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ données ; on définit le nombre de paramètres d'une famille de surfaces rationnelles et une approche pour déterminer ce nombre. Dans la seconde partie on construit des sous-groupes G de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- G est isomorphe à $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$;
- G préserve une courbe elliptique ;
- tous les éléments de G d'ordre infini sont hyperboliques ;
- à conjugaison birationnelle près G est un sous-groupe du groupe d'automorphismes d'une surface rationnelle.

Enfin dans la dernière partie de ce chapitre on expose un travail sur la dynamique des applications rationnelles dans les espaces de matrices.

1. Construction d'automorphismes d'entropie positive sur les surfaces rationnelles

Dans [**13**] on construit de nouveaux exemples d'automorphismes de surfaces rationnelles d'entropie positive. La stratégie est la suivante : on se donne une transformation birationnelle ϕ de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$. Le théorème de factorisation assure l'existence de deux ensembles $\widehat{\xi_1}$ et $\widehat{\xi_2}$ de points de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ ou infiniment proches tels que ϕ peut être relevé en un isomorphisme entre $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ éclaté en $\widehat{\xi_1}$ et $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ éclaté en $\widehat{\xi_2}$. La donnée de $\widehat{\xi_1}$ et $\widehat{\xi_2}$ permet d'obtenir des automorphismes de surfaces rationnelles dans l'orbite de ϕ sous l'action de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$: soient k dans $\mathbb{N}$ et A un automorphisme de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ tels que

- $\widehat{\xi_1}$, $A\widehat{\xi_2}$, $(A\phi)A\widehat{\xi_2}$, ..., $(A\phi)^{k-1}A\widehat{\xi_2}$ aient des supports disjoints,
- $(A\phi)^k A\widehat{\xi_2} = \widehat{\xi_1}$.

De plus si ces conditions sont satisfaites par une famille holomorphe de tels automorphismes on obtient une famille holomorphe de surfaces rationnelles (de dimension au plus $8 = \dim \mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$). Relever un élément de l'orbite de ϕ sous l'action de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ à un automorphisme est donc fortement lié à la résolution de l'équation $u(\widehat{\xi_2}) = \widehat{\xi_1}$ où u désigne un germe de biholomorphisme de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ envoyant le support de $\widehat{\xi_2}$ sur celui de $\widehat{\xi_1}$. Plus précisément lorsque $\widehat{\xi_1}$ et $\widehat{\xi_2}$ sont connus cette équation peut être résolue et fait intervenir des équations polynomiales dans le développement de Taylor de u aux différents points de $\widehat{\xi_2}$.

1. *i.e.* non infiniment proches

Nous introduisons la notion de famille holomorphiquement triviale : soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{U}}$ une famille holomorphe d'éléments de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ paramétrée par $\mathcal{U}$ et ϕ une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$. On dit que la famille $(A_\alpha\phi)_{\alpha\in\mathcal{U}}$ est ***localement holomorphiquement triviale*** si pour tout paramètre α_0 dans $\mathcal{U}$ il existe une famille de matrices $M_\alpha \in \mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ paramétrée par un voisinage de α_0 telle que $M_{\alpha_0} = \mathrm{id}$ et $A_\alpha\phi = M_\alpha^{-1}(A_{\alpha_0}\phi)M_\alpha$ pour tout α proche de α_0. Les exemples de BEDFORD et KIM fournissent des exemples de familles non holomorphiquement triviales. Nous donnons des exemples de familles holomorphiquement triviales :

Théorème II.1 ([13]). *Soit α un nombre complexe non nul et distinct de 1. Soit A_α l'élément de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ donné par*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 2(1-\alpha) & 2+\alpha-\alpha^2 \\ -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Considérons $\phi = (xz+y^3 : yz^2 : z^3) \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$. La transformation $A_\alpha\phi$ est conjuguée à un automorphisme de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ éclaté en 15 points. De plus $\lambda(A_\alpha\phi) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et la famille $(A_\alpha\phi)_\alpha$ est localement holomorphiquement triviale.

On a un énoncé analogue lorsque $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\phi = \big(y^2z : x(xz+y^2) : y(xz+y^2)\big)$ et

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha^3}{343}(37i\sqrt{3}+3) & \alpha & -\frac{2\alpha^2}{49}(5i\sqrt{3}+11) \\ \frac{\alpha^2}{49}(-15+11i\sqrt{3}) & 1 & -\frac{\alpha}{14}(5i\sqrt{3}+11) \\ -\frac{\alpha}{7}(2i\sqrt{3}+3) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin dans la dernière partie de [13] nous proposons une définition du nombre de paramètres d'une famille de surfaces rationnelles et une approche pour déterminer ce nombre. Nous utilisons pour cela la théorie des déformations des variétés complexes compactes de KODAIRA et SPENCER. Si X est une variété complexe compacte, une ***déformation*** de X est un triplet $(\mathfrak{X},\pi,B)$ où $\mathfrak{X}$ et B sont des variétés complexes, $\pi\colon \mathfrak{X}\to B$ une submersion holomorphe propre telle que la fibre $\mathfrak{X}_b$ soit biholomorphe à X pour un certain b dans B.

Si $(\mathfrak{X},\pi,B)$ est une déformation de X, le théorème de fibration d'EHRESMANN implique que $\mathfrak{X}$ est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $X\times B$ au dessus de B. Une déformation peut donc aussi être vue comme une famille de structures complexes intégrables $(J_b)_{b\in B}$ sur une variété différentiable fixée X variant holomorphiquement avec b. L'outil clé de la théorie est l'application de KODAIRA-SPENCER : si $(\mathfrak{X},\pi,B)$ est une déformation et b_0 un point de B, l'application de KODAIRA-SPENCER de $\mathfrak{X}$ en b_0 est une application linéaire

$$\mathrm{KS}_{b_0}(\mathfrak{X})\colon \mathrm{T}_{b_0}B \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{X}_{b_0}, \mathrm{T}\mathfrak{X}_{b_0})$$

qui est intuitivement la différentielle de l'application $b\mapsto J_b$ en b_0. Si $(\mathfrak{X},\pi,B)$ est une déformation de variétés projectives, on montre que les noyaux de $\mathrm{KS}_b(\mathfrak{X})$ ont génériquement la même dimension et définissent un sous-fibré holomorphe $E_\mathfrak{X}$ de $\mathrm{T}B$:

Proposition II.2. *Soit $(\mathfrak{X},\pi,B)$ une déformation d'une variété projective. Il existe un sous-ensemble analytique propre Z de B et un fibré holomorphe E sur $U = B\smallsetminus Z$ tels que*

- *E est un sous-fibré holomorphe de $\mathrm{T}U$;*
- *la fonction $b\mapsto h^1(\mathfrak{X}_b, \mathrm{T}\mathfrak{X}_b)$ est constante sur U ;*
- *pour tout b dans B, $E_{|b}$ est le noyau de $\mathrm{KS}_b(\mathfrak{X})$.*

Ceci conduit naturellement à la définition de $\mathfrak{m}(\mathfrak{X})$, le ***nombre générique de paramètres d'une déformation*** $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{X}) = \dim B - \mathrm{rg}\, E_{\mathfrak{X}}.$$

Lorsque $\mathfrak{m}(\mathfrak{X}) = \dim B$ on dit que $\mathfrak{X}$ est ***génériquement effective*** ; autrement dit pour $b \in B$ générique $\mathrm{KS}_b(\mathfrak{X})$ est injective. C'est un peu plus faible que d'exiger que les différentes fibres de $\mathfrak{X}$ ne soient pas biholomorphes ([**BK10**]) mais beaucoup plus facile à vérifier dans les exemples concrets.

Les déformations des surfaces rationnelles basiques sont faciles à comprendre d'un point de vue théorique. Pour tout entier ℓ définissons la suite de déformations $(\mathfrak{X}_\ell, \pi_\ell, \mathcal{S}_\ell)$ suivante :

- $\mathcal{S}_0$ est un point et $\mathfrak{X}_0 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$;
- $\mathcal{S}_{\ell+1} = \mathfrak{X}_\ell$, $\mathfrak{X}_{\ell+1} = \mathrm{Bl}_{\mathfrak{X}_\ell}(\mathfrak{X}_\ell \times_{\mathcal{S}_\ell} \mathfrak{X}_\ell)$ où $\mathfrak{X}_\ell$ est plongé diagonalement dans $\mathfrak{X}_\ell \times_{\mathcal{S}_\ell} \mathfrak{X}_\ell$ et $\pi_{\ell+1}$ est obtenu en composant le morphisme d'éclatement $\mathfrak{X}_{\ell+1} \to \mathfrak{X}_\ell \times_{\mathcal{S}_\ell} \mathfrak{X}_\ell$ avec la première projection.

Les variétés $\mathcal{S}_\ell$ et $\mathfrak{X}_\ell$ sont lisses et projectives ; on peut en donner une interprétation géométrique :

- pour $\ell \geq 1$, $\mathcal{S}_\ell$ est l'ensemble des listes ordonnées de points (infiniment proches ou non) de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de longueur ℓ
$$\mathcal{S}_\ell = \left\{ p_1, p_2, \ldots, p_\ell \,\middle|\, p_1 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\, p_i \in \mathrm{Bl}_{p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots, p_1} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \right\}$$
- pour $\ell \geq 1$, $\mathfrak{X}_\ell$ est la famille universelle de surfaces rationnelles au dessus de $\mathcal{S}_\ell$: pour tout $\widehat{\xi}$ dans $\mathcal{S}_\ell$, la fibre $\pi_\ell^{-1}(\widehat{\xi})$ de $\widehat{\xi}$ dans $\mathcal{S}_\ell$ est la surface rationnelle $\mathrm{Bl}_{\widehat{\xi}}\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ paramétrée par $\widehat{\xi}$.

Cette déformation est ***complète*** en tout point de $\mathcal{S}_\ell$, *i.e.* toute petite déformation d'une fibre de $\mathfrak{X}_\ell$ est localement induite par $\mathfrak{X}$ via une application holomorphe. Ainsi si $(\mathfrak{X}, \pi, B)$ est une déformation d'une surface rationnelle basique, toutes les fibres dans un petit voisinage de la fibre centrale restent rationnelles et basiques.

Il y a une action naturelle de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ sur $\mathcal{S}_\ell$ qui peut être relevée sur $\mathfrak{X}_\ell$. Cette action peut être utilisée pour décrire l'application de KODAIRA-SPENCER de $\mathfrak{X}_\ell$; si $\widehat{\xi}$ appartient à $\mathcal{S}_\ell$, alors $\mathrm{KS}_{\widehat{\xi}}(\mathfrak{X}_\ell)$ est surjective et son noyau est décrit par l'énoncé suivant :

Théorème II.3 ([**13**])**.** *Pour tout point $\widehat{\xi}$ de $\mathcal{S}_\ell$ le noyau de $\mathrm{KS}_{\widehat{\xi}}(\mathfrak{X}_\ell)$ coïncide avec l'espace tangent en $\widehat{\xi}$ de l'orbite de $\widehat{\xi}$ sous l'action de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$.*

Il en résulte que pour $\ell \geq 4$, on a $\mathfrak{m}(\mathfrak{X}_\ell) = 2\ell - 8$.

Lorsque $\ell \geq 4$, considérons l'ensemble $\mathcal{S}_\ell^\dagger$ constitué des points $\widehat{\xi}$ de $\mathcal{S}_\ell$ tels qu'il n'y ait pas de champ de vecteurs holomorphe non nul sur $\mathrm{Bl}_{\widehat{\xi}}\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. C'est un ouvert de ZARISKI qui est dense. Puisque $\mathfrak{X}_\ell$ est complet les familles de surfaces rationnelles sans champs de vecteurs holomorphes non nuls peuvent être décrites localement comme le pull-back de $\mathfrak{X}_\ell$ par une application holomorphe de l'espace des paramètres dans $\mathcal{S}_\ell^\dagger$. On établit un moyen pratique pour calculer le nombre générique de paramètres de telles familles :

Théorème II.4 ([**13**])**.** *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\ell \geq 4$ un entier et $\psi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{S}_\ell^\dagger$ une application holomorphe. Alors $\mathfrak{m}(\psi^*\mathfrak{X}_\ell)$ est le plus petit entier d pour lequel pour tout $\alpha \in \mathcal{U}$ générique il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^{n-d}$ et deux applications holomorphes $\gamma\colon \Omega \to \mathcal{U}$ et $M\colon \Omega \to \mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$ telles que*

- *$\gamma_*(0)$ est injective ;*
- *$\gamma(0) = \alpha$ et $M(0) = \mathrm{id}$;*

- *et* $\psi(\gamma(t)) = M(t)\psi(\alpha)$ *pour tout* t *dans* Ω.

2. Groupes d'automorphismes isomorphes à $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$

Dans [**Pan05**] l'auteur montre que si une transformation de CREMONA hyperbolique préserve une courbe $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ est de genre 0 ou 1. Des exemples avec $\mathcal{C}$ de genre nul étaient connus mais l'existence d'automorphismes d'entropie positive préservant une courbe elliptique est longtemps resté un problème ouvert comme on peut le constater deux ans plus tard dans [**DJS07**]. Dans le travail de MCMULLEN évoqué précédemment ([**McM07**]) l'auteur construit des automorphismes de surfaces rationnelles d'entropie positive correspondant à des éléments de COXETER [2] qui préservent une courbe cuspidale (resp. nodale). Néanmoins un automorphisme général d'une surface rationnelle correspondant à un élément de COXETER est d'entropie positive mais ne préserve pas de courbe ([**BK09**]). Dans [**1**] on prouve l'existence de groupes d'automorphismes préservant une courbe elliptique tels que tout élément non périodique soit d'entropie positive. Avant d'énoncer le résultat rappelons quelques définitions.

Le groupe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ est engendré par

$$\mathfrak{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad \mathfrak{s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et une présentation de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ est la suivante

$$\langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \,|\, \mathfrak{s}^4 = (\mathfrak{r}\mathfrak{s})^3 = 1, \mathfrak{s}^2(\mathfrak{r}\mathfrak{s}) = (\mathfrak{r}\mathfrak{s})\mathfrak{s}^2 \rangle.$$

Rappelons que $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ agit sur le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \left\{ z_0 + \mathrm{i}z_1 \in \mathbb{C} \,\middle|\, z_0, z_1 \in \mathbb{R}, z_1 > 0 \right\}$$

par transformations de MÖBIUS

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z_0 \right) \mapsto \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}.$$

La structure hyperbolique de $\mathbb{H}$ est préservée d'où une notion naturelle d'éléments de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ elliptiques, paraboliques, hyperboliques. Si M appartient à $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ on a

- M est ***elliptique*** si M est d'ordre fini ;
- M est ***parabolique*** si M est d'ordre infini et de trace ± 2 ;
- M est ***hyperbolique*** si M est d'ordre infini et de trace $\neq \pm 2$.

Le groupe de CREMONA agit naturellement sur un espace hyperbolique de dimension infinie ([**Man86, Can11**]). On dit qu'un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est elliptique, resp. parabolique, resp. hyperbolique si l'isométrie correspondante est elliptique, resp. parabolique, resp. hyperbolique ([**GdlH90**]). Cette définition coïncide avec la Définition 1 (*voir* [**Can11**]). Un plongement Θ de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est dit ***hyperbolique*** si tout élément d'ordre infini de $\Theta(\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}))$ est hyperbolique.

Commençons par établir une propriété sur l'image de $\mathfrak{s}^2$ par tout plongement de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Avant rappelons les définitions d'involutions de JONQUIÈRES, d'involutions de BERTINI (les involutions de GEISER ont déjà été introduites au §2.1) et la classification des involutions de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_8$ huit points de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en position générale. Considérons le pinceau de cubiques passant par ces 8 points ; il a un neuvième point base que l'on notera p_9. Considérons un point générique p

2. Tout automorphisme d'une surface rationnelle d'entropie positive correspond à un élément du groupe de WEYL associé à la surface ([**McM07**]).

de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; il y a une unique cubique $\mathcal{C}(p)$ qui passe par les p_i et p. La courbe $\mathcal{C}(p)$ est munie d'une loi de groupe ayant p_9 comme élément neutre. Notons i_B l'involution qui à p associe $-p$; la transformation i_B définit une involution birationnelle de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré 17 appelée ***involution de* BERTINI**. Les points fixes de i_B forment une courbe non hyperelliptique de genre 4, de degré 9 avec des points triples en $p_1, \ldots, p_8$. Rappelons maintenant la définition d'involutions de JONQUIÈRES. Soient $\mathscr{C}$ une courbe de degré $\nu \geq 2$ et p un point sur $\mathscr{C}$ de multiplicité $\nu - 2$ (si $\nu = 2$, on choisit le point en dehors de $\mathscr{C}$). On suppose que p est l'unique point singulier de $\mathscr{C}$. Au couple $(\mathscr{C}, p)$ on va associer l'unique involution birationnelle i_{dJ} qui fixe la courbe $\mathscr{C}$ et préserve les droites passant par p. Soit m un point générique de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; notons q_m, r_m les deux points d'intersection, distinct de p, de la droite (pm) avec $\mathscr{C}$. La transformation i_{dJ} associe au point m le point $i_{dJ}(m)$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ satisfaisant la propriété suivante : le birapport de m, $i_{dJ}(m)$, q_m et r_m vaut -1. La transformation i_{dJ} est une ***involution de* JONQUIÈRES** de degré ν, centrée en p et préservant $\mathscr{C}$. La normalisée de la courbe de points fixes de i_{dJ} est une courbe hyperelliptique de genre $\nu - 2$ dès que $\nu \geq 3$ (par convention on dira qu'une courbe elliptique est hyperelliptique).

Théorème II.A ([**Ber77**, **BB00**]). *Une involution de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *est à conjugaison birationnelle près de l'un des types suivants :*

- *un automorphisme de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *;*
- *une involution de* JONQUIÈRES *;*
- *une involution de* BERTINI *;*
- *une involution de* GEISER.

Plus précisément l'ensemble des classes de conjugaison des involutions birationnelles est paramétré par une variété algébrique dont les composantes connexes sont respectivement :

- *l'espace des modules des courbes hyperelliptiques de genre* g (*involutions de* JONQUIÈRES) *;*
- *l'espace des modules des courbes canoniques de genre* 3 (*involutions de* GEISER) *;*
- *l'espace des modules des courbes canoniques de genre* 4 *de theta caractéristique nulle, isomorphes à une intersection non singulière d'une surface cubique et d'un cône quadratique dans* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ (*involutions de* BERTINI).

Cette classification nous permet de caractériser l'image de l'involution centrale $\mathfrak{s}^2$:

Lemme II.5 ([**1**]). *Soit* Θ *un plongement de* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ *dans le groupe de* CREMONA. *À conjugaison birationnelle près*

- *l'involution* $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ *est un automorphisme de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *;*
- *l'application* $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ *est une involution de* JONQUIÈRES *de degré* 3 *fixant point par point une courbe elliptique.*

DÉMONSTRATION. Posons $\mathrm{G} = \Theta(\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}))$. Puisque $\mathfrak{s}^2$ commute à $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, le groupe G est contenu dans $\mathrm{Cent}(\Theta(\mathfrak{s}^2);\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}))$. L'involution $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ est une involution de JONQUIÈRES. Raisonnons par l'absurde : supposons que $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ soit une involution de BERTINI ou une involution de GEISER, alors $\mathrm{Cent}(\Theta(\mathfrak{s}^2);\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}))$ est fini ([**BPV09**, Corollaire 2.3.6]) : contradiction.

Supposons que $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ ne soit pas linéarisable. Alors $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ fixe point par point une unique courbe irréductible Γ de genre ≥ 1. Le groupe G préserve donc Γ et l'action de G sur Γ induit la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 1$$

où H désigne un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, le groupe G' contient $\Theta(\mathfrak{s}^2)$ et fixe Γ. Le genre de Γ étant positif, H ne peut coïncider avec $\mathrm{G}/\langle\Theta(\mathfrak{s}^2)\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Par conséquent G' contient strictement

$\langle\Theta(\mathfrak{s}^2)\rangle$, et par suite est infini et non abélien. D'après [BPV08, Théorème 1.5], la courbe Γ est donc de genre 1. ☐

Lorsqu'on précise que le plongement est hyperbolique on obtient l'énoncé suivant :

Théorème II.6 ([1]). *Il existe des plongements hyperboliques Θ_1, Θ_2 et Θ_3 de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ tels que*

- *pour tout i le groupe $\Theta_i(\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}))$ préserve une cubique lisse $\Gamma\subset\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$;*
- *l'action de Θ_1 sur Γ est triviale, l'action de Θ_2 sur Γ est engendrée par une translation d'ordre 3, l'action de Θ_3 sur Γ est engendrée par un automorphisme d'ordre 3 avec points fixes ;*
- *pour $i=1,2,3$ l'éclatement $\mathrm{S}_i\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de respectivement 12, 10, 10 points de Γ conjugue $\Theta_i(\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}))$ à un sous-groupe d'automorphismes de S_i.*

La transformée stricte $\widetilde{\Gamma}$ de Γ sur S_i est la seule courbe invariante ; en particulier l'orbite d'un élément de $\mathrm{S}_i\smallsetminus\widetilde{\Gamma}$ est ou bien finie, ou bien dense (pour la topologie de ZARISKI).

Dans les cas $i=1,2$ on peut choisir Γ comme étant n'importe quelle cubique lisse, d'où l'existence d'une infinité de plongements hyperboliques de $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ non birationnellement conjugués.

Avant d'expliquer comment construire de tels plongements faisons quelques rappels. Une ***surface de* DEL PEZZO** est une surface projective lisse S telle que le diviseur anticanonique $-\mathrm{K}_\mathrm{S}$ soit ample. On peut montrer qu'une telle surface est $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, ou $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ éclaté en $1\leq k\leq 8$ points de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en position générale (c'est-à-dire qu'il n'y en a pas 3 colinéaires, pas 6 sur une conique, pas 8 sur une cubique ayant un point double en l'un de ses points). Le ***degré*** d'une surface de DEL PEZZO S vaut $(\mathrm{K}_\mathrm{S})^2$, autrement dit

- 8 lorsque $\mathrm{S}=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$,
- 9 lorsque $\mathrm{S}=\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et
- $9-k$ lorsque S est l'éclaté de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en k points en position générale.

Une surface de DEL PEZZO possède un nombre fini de (-1)-courbes, *i.e.* de courbes isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et d'auto-intersection -1 ; chacune de ses (-1)-courbes peut être contractée et on obtient alors une surface de DEL PEZZO de degré plus grand. Ces (-1)-courbes sont de plus les seules courbes d'auto-intersection négative.

Donnons maintenant des exemples explicites de surfaces de DEL PEZZO munies d'automorphismes d'ordre fini. Considérons la surface de DEL PEZZO S de degré 1 définie par

$$\mathrm{S}=\big\{(z_0:z_1:z_2:z_3)\in\mathbb{P}(3;1;1;2)\,\big|\,z_0^2=z_3^3+\mu z_1z_3^4+z_1^6+z_2^6\big\};$$

on choisit $\mu\in\mathbb{C}$ suffisamment générique pour que S soit lisse. Soit ϕ l'automorphisme de S d'ordre 6 donné par $\phi(z_0:z_1:z_2:z_3)=(z_0:z_1:-\mathrm{j}z_2:z_3)$, il fixe la courbe elliptique décrite par $z_2=0$. Notons que lorsque μ varie, toutes les courbes elliptiques sont obtenues. On peut vérifier que $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(\mathrm{S})^\phi=1$ (*voir* [DI09]).

Soit S la surface de DEL PEZZO de degré 3 donnée par

$$\mathrm{S}=\big\{(z_0:z_1:z_2:z_3)\in\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}\,\big|\,z_0z_1^2+z_0^3+z_2^3+z_3^3+\mu z_0z_2z_3=0\big\}$$

où μ désigne un complexe tel que S soit une surface cubique lisse. Sur S définissons l'automorphisme ϕ d'ordre 3 suivant : $\phi(z_0:z_1:z_2:z_3)=(z_0:-z_1:\mathrm{j}z_2:\mathrm{j}^2z_3)$; son itéré 3-ième fixe la courbe elliptique

$z_1 = 0$ et ϕ agit sur celle-ci par une translation d'ordre 3. Quand μ varie, toutes les courbes elliptiques sont obtenues. Ici encore $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(\mathrm{S})^\phi = 1$ (*voir* [**DI09**]).

Posons

$$\mathrm{S} = \left\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3_\mathbb{C} \,\middle|\, z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + (z_1 + \mu z_2)z_3^2 = 0\right\}$$

avec μ dans $\mathbb{C}$ tel que S soit lisse ; S est une surface de DEL PEZZO de degré 3. L'automorphisme ϕ de S défini par $\phi(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) = (\mathrm{j}z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ satisfait les propriétés suivantes : ϕ^3 fixe la courbe elliptique $z_3 = 0$ et ϕ agit sur celle-ci via un automorphisme d'ordre 3 avec 3 points fixes. Lorsque μ varie, la classe d'isomorphisme de la courbe fixée par ϕ^2 change donc la classe birationnelle de ϕ aussi (par contre la courbe elliptique fixée par ϕ^3 ne change pas de classe d'isomorphisme). Cette fois aussi $\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(\mathrm{S})^\phi = 1$ (*voir* [**DI09**]).

Enfin considérons la surface de DEL PEZZO de degré 2 donnée par

$$\mathrm{S} = \left\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}(2;1;1;1) \,\middle|\, z_0^2 - z_1^4 = z_2z_3(z_2 + z_3)(z_2 + \mu z_3)\right\}$$

où $\mu \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$ et l'automorphisme $\phi(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) = (z_0 : \mathrm{i}z_1 : z_2 : z_3)$ de S. L'automorphisme ϕ préserve la courbe elliptique $z_1 = 0$, le rang de $\mathrm{Pic}(\mathrm{S})^\phi$ vaut 1 et lorsque μ varie, on obtient toutes les courbes elliptiques.

Dans [**1**] on définit des surfaces de DEL PEZZO X et Y de degré ≤ 4, des automorphismes $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, $\beta \in \mathrm{Aut}(Y)$ d'ordre respectivement 6 et 4 tels que α^3 et β^2 fixent point par point une courbe elliptique Γ_X, Γ_Y et

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(X)^\alpha = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(Y)^\beta = 1.$$

Quitte à contracter les (-1)-courbes invariantes par les involutions α^3 et β^2 on obtient deux morphismes birationnels

$$X \to X_4 \qquad Y \to Y_4$$

où X_4 (resp. Y_4) désigne une surface de DEL PEZZO de degré 4 sur laquelle α^3 (resp. β^2) agit de manière minimale. On montre que $\mathrm{Pic}(X_4)^{\alpha^3}$ (resp. $\mathrm{Pic}(Y_4)^{\beta^2}$) est de rang 2 et engendré par les fibres d'un fibré en coniques sur X_4 (resp. Y_4). Si Γ_X et Γ_Y sont isomorphes, il existe une transformation birationnelle $X_4 \dashrightarrow Y_4$ conjuguant α^3 à β^2 et permettant d'obtenir un plongement de $\langle\alpha, \beta\rangle$ dans le groupe de CREMONA. On montre qu'il n'y a pas d'autres relations que celles imposées par construction

$$1 = \alpha^6 = \beta^4 = \alpha^3\beta^2,$$

autrement dit on montre que $\langle\alpha, \beta\rangle \simeq \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$. On calcule les actions de α, resp. β sur $\mathrm{Pic}(X)$, resp. $\mathrm{Pic}(Y)$ et sur une surface Z qui domine X et Y et sur laquelle α et β agissent. Une telle surface existe si le groupe engendré par l'action des deux transformations sur la courbe elliptique Γ fixée par α^3 et β^2 est un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ (sinon on travaille sur la limite des groupes de PICARD). On s'assure aussi que les plongements obtenus sont hyperboliques ([**1**, Proposition 4.7]).

3. Applications rationnelles dans les espaces de matrices

L'itération des applications rationnelles est très bien comprise en dimension 1, un peu moins en dimension 2 et encore moins en dimension plus grande. Dans [**3**] nous nous proposons d'étudier des applications spéciales sur les espaces de matrices. Par souci de simplicité nous travaillons sur l'espace $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes mais la majorité des résultats se laissent généraliser sans problème en dimension supérieure. Dans un premier temps nous nous intéressons aux transformations compatibles à la conjugaison, *i.e.* aux applications rationnelles $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$ telles que $A\varphi(M)A^{-1} = \varphi(AMA^{-1})$ pour tout A dans $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ et pour tout M où cela a un sens. Puis on étudie tout particulièrement l'exemple le plus typique

$$\Phi_{\mathrm{Id}}\colon \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathrm{M}(2;\mathbb{C}), \qquad M \mapsto M^2.$$

Pour finir nous considérons des déformations spéciales de Φ_{Id}, les applications

$$\Phi_A\colon \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathrm{M}(2;\mathbb{C}), \qquad M \mapsto AM^2$$

avec A dans $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$. Elles sont en général non compatibles à la conjugaison. Notons que si à une variable les transformations $z \mapsto z^2$ et $z \mapsto az^2$ sont linéairement conjuguées la situation est dans notre contexte plus compliquée.

3.1. Applications compatibles à la conjugaison. On dit que $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$ est ***compatible à la conjugaison*** si pour tous A, M dans $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ tels que M et AMA^{-1} sont dans $\mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \smallsetminus \mathrm{Ind}\,\varphi$ on a

$$A\varphi(M)A^{-1} = \varphi(AMA^{-1}).$$

Un exemple de ce type d'applications est donné par les polynômes de matrices. Une des propriétés immédiates de ces applications est la suivante : soit $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$ une transformation compatible à la conjugaison. Alors la sous-algèbre de $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ des matrices diagonales

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}$$

est invariante par φ, *i.e.* $\varphi(\mathcal{D} \smallsetminus \mathrm{Ind}\,\varphi) \subset \mathcal{D}$. Cette propriété permet entre autres d'établir un critère de birationnalité pour les transformations rationnelles compatibles à la conjugaison :

Proposition II.7 ([3]). *Soit $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$ une application rationnelle compatible à la conjugaison ; φ est birationnelle si et seulement si sa restriction $\varphi_{|\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \dashrightarrow \mathcal{D}$ l'est.*

Soient X une variété complexe compacte, $\psi\colon X \dashrightarrow X$ une application rationnelle dominante et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est ***invariant*** par ψ si $\psi^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{F}$ soit défini par une fibration, *i.e.* la feuille générique de $\mathcal{F}$ est la fibre générique d'une application rationnelle $g\colon X \dashrightarrow Y$; si $\psi^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$, l'application ψ ***préserve la fibration*** $\mathcal{F}$. Si $g \circ \psi = g$, on dit que ψ ***préserve la fibration*** $\mathcal{F}$ ***fibre à fibre***.

Au centre $\mathcal{C} = \{\lambda \mathrm{Id} \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ on peut associer la fibration $\mathcal{P}$ en 2-plans définie comme suit : si M désigne un élément de $\mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \setminus \mathcal{C}$ on définit $\mathcal{P}(M)$ comme l'unique plan contenant M et $\mathcal{C}$; on peut vérifier

- que le 2-plan $\mathcal{P}(M)$ n'est autre que l'ensemble des matrices qui commutent à M ;
- et que le plan générique $\mathcal{P}(M)$ est conjugué à $\mathcal{D}$.

On en déduit que toute application rationnelle compatible à la conjugaison préserve la fibration en 2-plans $\mathcal{P}$ fibre à fibre ([3]). La fibration $\mathcal{P}$ est donnée par les niveaux de l'application rationnelle $\left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_0 - z_3}{z_1}\right)$. Considérons l'application $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ qui à une matrice M associe ses invariants de similitude $(\mathrm{tr}\, M, \det M)$. Toute application $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$ compatible à la conjugaison laisse invariant le feuilletage associé à la fibration Inv. Plus précisément il existe une application rationnelle

$\mathrm{Sq}\,\varphi\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ telle que l'on ait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Inv}"'] & \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \arrow[d, "\mathrm{Inv}"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[r, dashed, "\mathrm{Sq}\,\varphi"'] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

Réciproquement on peut se demander à quelle condition une application rationnelle de $\mathbb{C}^2$ se relève à $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ via Inv. Nous donnons la réponse ([3, Proposition 2.18]) : une application rationnelle

$$W\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (u,v) \dashrightarrow \big(S(u,v),T(u,v)\big)$$

s'écrit $\mathrm{Sq}\,\varphi$ pour une certaine application rationnelle $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$ compatible à la conjugaison si et seulement si $(S^2-4T)\circ\mathrm{Inv}$ est un carré dans le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(u,v)$. Évidemment la transformation $\mathrm{Sq}\,\varphi$ contient une grande partie de la dynamique de l'application initiale φ. De plus, φ est birationnelle si et seulement si $\mathrm{Sq}\,\varphi$ l'est.

3.2. Dynamique de Φ_{Id}.

3.2.1. *Centralisateurs.* Comme on l'a déjà vu une façon de mesurer la complexité d'une transformation est d'examiner son centralisateur. La transformation $\chi_2\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $z\mapsto z^2$ joue un rôle spécial dans la dynamique à une variable : elle a son ensemble de JULIA lisse et son centralisateur n'est pas réduit à ses propres itérés. Il est donc naturel de décrire les groupes $\mathrm{Cent}(\Phi_{\mathrm{Id}};\mathrm{Aut}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C})))$ et $\mathrm{Cent}(\Phi_{\mathrm{Id}};\mathrm{Bir}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C})))$.

Théorème II.8 ([3]). *Le groupe* $\mathrm{Cent}(\Phi_{\mathrm{Id}};\mathrm{Aut}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C})))$ *est isomorphe à* $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{C})\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Le groupe* $\mathrm{Cent}(\Phi_{\mathrm{Id}};\mathrm{Bir}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C})))$ *est engendré par l'involution* $M\mapsto M^{-1}$ *et* $\mathrm{Cent}(\Phi_{\mathrm{Id}};\mathrm{Aut}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C})))$.

3.2.2. *Fonctions invariantes.* On désigne par $\mathrm{K}(\varphi)$ le corps des fractions rationnelles invariantes par $\varphi\in\mathrm{Rat}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))$. Autrement dit un élément de $\mathrm{K}(\varphi)$ est une fonction rationnelle $f\colon \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ telle que

$$f\circ\varphi = f.$$

Comme Φ_{Id} laisse le feuilletage en 2-plans $\mathcal{P}$ invariant, chacune de ses orbites est contenue dans un certain 2-plan de $\mathcal{P}$ ce qui, au niveau algébrique, se formalise de la façon suivante ([3, Théorème 3.1]) :

$$\mathrm{K}(\Phi_{\mathrm{Id}}) = \mathbb{C}\left(\frac{z_1}{z_2},\frac{z_0-z_3}{z_2}\right).$$

3.2.3. *Bassin d'attraction de la matrice nulle et points périodiques de* Φ_{Id}. Avant d'être plus précis, rappelons qu'une sous-variété réelle V de codimension 1 dans $\mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$ est dite **LEVI-*plate*** si son champ d'hyperplans tangents complexes $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}_m V = \mathrm{T}_m V\cap \mathrm{i}\mathrm{T}_m V$ est intégrable. Ce champ induit alors un feuilletage de V en sous-variétés complexes de dimension $n-1$.

Le bassin d'attraction $\mathrm{W}^s_{\mathrm{Id}}(\mathbf{0})$ de $\mathbf{0}$ est constitué des matrices ayant leurs deux valeurs propres de module strictement plus petit que 1 ; son bord est l'ensemble des matrices M ayant une valeur propre de module 1 et l'autre de module plus petit ou égal à 1 (*voir* [3, §3.1]). C'est une hypersurface LEVI-plate décrite par l'ensemble semi-algébrique donné par les inéquations $\mathbb{R}$-polynomiales sur $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$

suivantes :

$$\begin{cases} \left(|\det|^2 - \frac{1}{2}|\mathrm{tr}^2| + 1\right)^2 - \frac{1}{4}|\mathrm{tr}^2 - 4\det|^2 = 0 \\ |\det|^2 - \frac{1}{2}|\mathrm{tr}^2| + 1 \geq 0 \\ |\det| \leq 1 \end{cases}$$

Ceci va à l'encontre du cas des applications homogènes génériques. Rappelons à cet effet que lorsque $f\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ est une application polynomiale homogène, le bassin d'attraction de 0 est borné dès que $f^{-1}(0)$ est réduit à 0 ce qui est le cas génériquement ([**BL96**]).

Les points périodiques de Φ_{Id}, excepté $\mathbf{0}$, sont contenus dans le bord $\partial\mathrm{W}^s_{\mathrm{Id}}(\mathbf{0})$ du bassin d'attraction de $\mathbf{0}$ (*voir* [**3**, Proposition 3.3]). Leur adhérence est ([**3**, Proposition 3.4])

$$\mathbf{0} \cup \Lambda^0 \cup \Lambda^1 \cup \Lambda^2$$

où

- $\Lambda^0 = \left\{M \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \,|\, \det M = 0,\ |\mathrm{tr}\, M| = 1\right\}$;
- $\Lambda^1 = \left\{M \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \,|\, (\mathrm{tr}\, M)^2 - 4\det M = 0,\ |\det M| = 1\right\}$;
- $\Lambda^2 = \left\{M \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \,|\, \frac{(\mathrm{tr}\, M)^2}{\det M} \in [0,4[,\ |\det M| = 1\right\}$.

Notons que cette adhérence est un semi-algébrique donné par l'union disjointe

$$\{\mathbf{0}\} \sqcup \left\{|\mathrm{tr}\, M| = 1,\ |\det M| = 0\right\} \sqcup \left\{\frac{(\mathrm{tr}\, M)^2}{\det M} \in [0,4],\ |\det M| = 1\right\}.$$

On remarque en particulier que la situation est bien différente de la dimension 1 : en effet l'adhérence des points périodiques de l'application $z \mapsto z^2$ coïncide avec le bord du bassin d'attraction de l'origine auquel on ajoute l'origine.

3.3. Perturbations des applications monomiales compatibles à la conjugaison. Nous considérons des transformations spéciales qui possèdent à la fois un centralisateur suffisamment gros tout en préservant une dynamique plus riche que celle de Φ_{Id}. Les applications monomiales de degré 2

$$M \mapsto A_1 M A_2 M A_3, \qquad A_i \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C}),$$

sont conjuguées à celles du type AM^2B. Nous allons nous concentrer sur le cas spécial $B = \mathrm{Id}$, *i.e.*

$$\Phi_A\colon \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{M}(2;\mathbb{C}), \qquad M \mapsto AM^2.$$

Remarquons que $(\sigma_P^{-1}\Phi_A\sigma_P)(M) = (P^{-1}AP)M^2$; on peut donc prendre A sous forme de JORDAN. Dans un premier temps nous allons considérer le cas A diagonalisable puis le cas A non diagonalisable.

3.3.1. *Cas diagonalisable.* On désigne par $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$ l'élément de $\mathcal{D}$ dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2. On peut supposer que $A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$; remarquons que si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors Φ_A est conjuguée à Φ_{Id} via une homothétie. Supposons donc que λ_1 et λ_2 soient distincts. À conjugaison près par une homothétie on peut se ramener à $\det A = 1$, *i.e.* $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = \lambda^{-1}$. Bien que $\Phi_{A|\mathcal{D}}$ et $\Phi_{\mathrm{Id}|\mathcal{D}}$ soient conjuguées, la nature des points fixes de Φ_A et Φ_{Id} assure que Φ_A et Φ_{Id} ne sont pas conjuguées.

Comme précédemment on s'intéresse au corps des fonctions invariantes $K(\Phi_A)$. Pour cela on étudie Φ_A au voisinage du point fixe $\mathrm{diag}(\lambda^{-1},\lambda)$. La matrice jacobienne de Φ_A en ce point fixe est

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+\lambda^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1}(\lambda+\lambda^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour λ non résonnant [3], le germe de Φ_A en $\mathrm{diag}(\lambda^{-1},\lambda)$ est formellement linéarisable. Il s'en suit qu'à conjugaison formelle près les fonctions méromorphes formelles invariantes par le germe de Φ_A en $\mathrm{diag}(\lambda^{-1},\lambda)$ sont du type $h(z_0/z_3)$ avec h rationnelle. Soit f dans $K(\Phi_A)$ non constante ; on peut vérifier que f est non constante sur le 2-plan $z_1 = z_2 = 0$. Mais la restriction de Φ_A à ce 2-plan est conjuguée à (z_0^2, z_3^2) et les fonctions invariantes par (z_0^2, z_3^2) sont constantes d'où :

Proposition II.9 ([3]). *Pour λ non résonant, $K(\Phi_A) = \mathbb{C}$.*

On peut aussi déterminer la nature des points périodiques qui d'une part s'avère distincte de celle de Φ_{Id} et qui d'autre part varie suivant les valeurs de λ. On obtient l'énoncé suivant :

Proposition II.10 ([3]). *Pour λ générique l'adhérence des points périodiques de Φ_A est constituée*
- *d'un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,*
- *de deux $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$,*
- *de $\mathbf{0}$.*

On vérifie en particulier que pour λ générique les points périodiques de Φ_A sont d'adhérence de ZARISKI

$$\{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = 0\} \cup \{z_0 = z_1 = 0\}$$

alors que les points périodiques de Φ_{Id} sont ZARISKI denses.

On peut aussi déterminer $\mathrm{Cent}\big(\Phi_A; \mathrm{Aut}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))\big)$:

Proposition II.11 ([3]). *Soit A une matrice de la forme $\mathrm{diag}(\lambda,\lambda^{-1})$ avec $\lambda^2 \neq 1$. Le groupe $\mathrm{Cent}\big(\Phi_A; \mathrm{Aut}(\mathrm{M}(2;\mathbb{C}))\big)$ est engendré par les σ_P avec P diagonale ; il s'identifie à $\mathbb{C}^*$ agissant sur $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ de la façon suivante*

$$(z_0, z_1, z_2, z_3, \alpha) \mapsto \Big(z_0, \alpha z_1, \frac{z_2}{\alpha}, z_3\Big)$$

Les orbites de cette action sont aussi celles du champ de vecteurs invariant $z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$.

3.3.2. *Cas non diagonalisable.* On se ramène à conjugaison près à $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On peut décrire les points fixes et périodiques de Φ_A (*voir* [3, §4.2.1]) et son centralisateur :

Proposition II.12 ([3]). *Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Le groupe $\mathrm{Cent}\big(\Phi_A; \mathrm{M}(2;\mathbb{C})\big)$ est engendré par les σ_P tels que $P \in \mathrm{Cent}\big(A; \mathrm{M}(2;\mathbb{C})\big)$.*

3. *i.e.* pour λ tel que $2^p\lambda^q(\lambda+\lambda^{-1})^r = 1$, $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$, ait pour une unique solution $(0,0,0)$.

CHAPITRE III

Quelques propriétés algébriques des transformations birationnelles en dimension $n\geq 2$

De nombreuses propriétés algébriques de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ ont été établies : description d'un système de générateurs et relations ([**ŠAV$^+$65**, **Isk83**]), des sous-groupes finis ([**DI09**, **Bla09**]), des sous-groupes nilpotents ([**11**]), des sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables qui permet de caractériser $\mathrm{Aut}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C}))$ (*voir* [**9**]), des endomorphismes de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ qui permet de montrer que le groupe de CREMONA est hopfien ([**10**]), des sous-groupes de type fini qui permet d'établir que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ satisfait l'alternative de TITS ([**Can11**]) ... Par contre la situation est très différente pour $n\geq 3$ où il y a peu de résultats mais néanmoins quelques-uns : étude des sous-groupes algébriques de rang maximum ([**Dem70**]), étude des sous-groupes finis ([**Pro12**, **Pro13**, **Pro11**]), classification des morphismes de $\mathrm{PGL}(r+1;\mathbb{C})$ dans le groupe des transformations birationnelles d'une variété projective complexe, remarque sur les générateurs du groupe de CREMONA ([**Pan05**]), étude des transformations birationnelles de petit bidegré ([**PRV01**, **Pan97**, **Hud27**], [**14**]).

Dans [**5**] nous avons étudié $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ et $\mathfrak{Bir}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ (nous en donnons un aperçu au §1) : $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est lisse, irréductible dans l'ensemble $\mathrm{Rat}_2(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ et $\mathfrak{Bir}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est irréductible et rationnellement connexe. Par contre $\mathfrak{Bir}_d(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est réductible dès que $d\geq 4$ (*voir* [**BCMar**]). Dans [**Cre73**] CREMONA étudie trois types d'éléments de $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$. Il y en a en fait beaucoup plus : PAN, RONGA et VUST donnent, à conjugaison gauche-droite près, la liste des transformations birationnelles de bidegré $(2,d)$ de $\mathbb{P}^3_\mathbb{C}$, il y en a 30 (*voir* [**PRV01**]). Ils montrent en particulier que $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$ a trois composantes irréductibles de dimension 11, resp. 13, resp. 14 ; la composante de dimension 11 (resp. 13, resp. 14) correspond aux transformations birationnelles de bidegré $(2,2)$ (resp. $(2,3)$, resp. $(2,4)$). Il y a peu de travaux en bidegrés supérieurs, on peut néanmoins trouver une jolie contribution en bidegrés $(3,d)$ dûe à HUDSON dans [**Hud27**] ; les invariants utilisés par cette dernière sont assez fins et donnent donc lieu à une classification relativement longue. Nous avons suivi son cheminement pour $2\leq d\leq 5$ et mis en évidence deux cas oubliés. Comment ces familles se regroupent-elles pour former des composantes irréductibles de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$? Dans [**14**] nous nous intéressons à cette question naturelle, ce sera l'objet du §2. En dimension $n\geq 3$ le groupe de CREMONA n'est plus engendré par $\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ et l'involution de CREMONA ([**Hud27**, **Pan99**]) ; de plus les outils utilisés en géométrie algébrique en dimension 2 s'avèrent insuffisants en dimension plus grande. Par conséquent l'étude de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est beaucoup plus ardue qu'en dimension 2 et les résultats beaucoup moins nombreux. Dans la dernière partie de ce chapitre on considère le sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ introduit par COBLE ([**Cob61**]) et engendré par $\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ et l'involution de CREMONA en dimension n.

1. Transformations birationnelles de petit degré en dimension 2

Commençons par introduire trois exemples de transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré 2 qui, comme nous le verrons, jouent un rôle particulier, il s'agit des trois involutions suivantes :

$$\sigma\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad (z_0 : z_1 : z_2) \dashrightarrow (z_1z_2 : z_0z_2 : z_0z_1),$$
$$\rho\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad (z_0 : z_1 : z_2) \dashrightarrow (z_0z_1 : z_2^2 : z_1z_2),$$

et

$$\tau\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad (z_0 : z_1 : z_2) \dashrightarrow (z_0^2 : z_0z_1 : z_1^2 - z_0z_2).$$

Considérons l'application rationnelle $\det\mathrm{jac}$ définie par

$$\det\mathrm{jac} : \mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]_2 \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]_3), \quad \phi \dashrightarrow (\det\mathrm{jac}\,\phi = 0).$$

Soit $\widetilde{\phi}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ une application polynomiale homogène de degré d ; on note $\widetilde{\phi}_i$ les composantes de $\widetilde{\phi}$ et on suppose que $\mathrm{pgcd}(\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1,\widetilde{\phi}_2) = 1$. Les ***points critiques*** de $\widetilde{\phi}$ sont les zéros de $\det\mathrm{jac}\,\widetilde{\phi}$; ils forment l'ensemble $\mathcal{C}(\widetilde{\phi})$. Soit $\phi\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'application rationnelle induite par $\widetilde{\phi}$; l'hypothèse $\mathrm{pgcd}(\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\phi}_1,\widetilde{\phi}_2) = 1$ assure que ϕ est dominante. On désigne encore par $\mathcal{C}(\phi)$ l'adhérence du lieu critique de la restriction de ϕ à $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \smallsetminus \mathrm{Ind}\,\phi$. Cet ensemble est une courbe algébrique propre si $d \geq 2$. Un calcul local élémentaire montre que $\mathcal{C}(\phi)$ est exactement le projectivisé de $\mathcal{C}(\widetilde{\phi})$.

Proposition III.1 ([5]). *Soit ϕ un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$; $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est contracté par ϕ.*

Soient A, B deux éléments de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$; si $\phi = A\sigma B$ (resp. $\phi = A\rho B$, resp. $\phi = A\tau B$), alors $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est l'union de trois droites en position générale (resp. l'union d'une droite double et d'une droite simple, resp. une droite triple). Nous donnons un critère qui permet de déterminer si une transformation quadratique rationnelle est birationnelle :

Théorème III.2 ([5]). *Soit $\phi \in \mathring{\mathfrak{Rat}}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ telle que $\det\mathrm{jac}\,\phi \not\equiv 0$. Supposons que ϕ contracte $\det\mathrm{jac}\,\phi$; alors $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est l'union de trois droites (pas nécessairement distinctes et non concourantes lorsqu'elles le sont) et ϕ est birationnelle.*

De plus :

- *si $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est l'union de trois droites en position générale, alors ϕ est, à équivalence g.d. près, l'involution de* CREMONA *σ ;*
- *si $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est l'union d'une droite double et d'une droite simple, alors ϕ coïncide, à conjugaison g.d. près, avec ρ ;*
- *enfin si $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est une droite triple, alors ϕ appartient à $\mathscr{O}(\tau)$.*

Corollaire III.3 ([5]). *Une transformation ϕ de $\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ appartient à $\mathscr{O}(\sigma)$ si et seulement si elle admet trois points d'indétermination.*

Remarques 2.
- Une transformation birationnelle ϕ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dans lui-même contracte $\det\mathrm{jac}\,\phi$ et ne contracte pas d'autre courbe. On peut se demander si le critère de birationnalité du Théorème III.2 est encore valable en degré strictement supérieur à 2; la réponse est non. On a dès le degré 3 des exemples d'éléments ϕ qui contractent $\det\mathrm{jac}\,\phi$ mais ne sont pas birationnels comme l'atteste la transformation $(z_0^2z_1 : z_0z_2^2 : z_1^2z_2)$.
- Nous ignorons si un critère analogue à celui donné dans le Théorème III.2 existe en dimension quelconque ; [**PRV01**] devrait permettre de s'en assurer en dimension 3.

Posons

$$\Sigma^3 := \mathscr{O}(\sigma), \qquad \Sigma^2 := \mathscr{O}(\rho), \qquad \Sigma^1 := \mathscr{O}(\tau).$$

Considérons une transformation birationnelle représentée par $\phi = \ell(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2)$ où ℓ, ℓ_i désignent des éléments de $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]_1$, les ℓ_i étant indépendantes. La droite $\ell = 0$ est une « droite contractée apparente » ; en effet l'action de ϕ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est évidemment celle de l'automorphisme $(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2)$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. On notera Σ^0 l'ensemble de ces transformations :

$$\Sigma^0 = \{\ell(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2) \,|\, \ell, \ell_i \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]_1, (\ell_0 : \ell_1 : \ell_2) \in \mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})\}.$$

Les éléments de Σ^0 seront abusivement appelés linéaires ; en fait c'est l'ensemble

$$(\Sigma^0)^\bullet = \{\phi^\bullet \,|\, \phi \in \Sigma^0\}$$

qui s'identifie à $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$. On a $\Sigma^0 = \mathscr{O}(z_0(z_0 : z_1 : z_2))$: à conjugaison g.d. près un élément de la forme ℓA s'écrit $z_0 A'$ puis $z_0\mathrm{id}$. Cette approche permet de voir les dégénérescences de transformations quadratiques sur des applications linéaires.

Remarques 3.
- Un élément de Σ^i compte i points d'indétermination et i courbes contractées.
- Un élément de Σ^i ne peut pas être linéairement conjugué à un élément de Σ^j où $j \neq i$; par contre ils peuvent l'être birationnellement. Par exemple les involutions σ, ρ et τ sont conjuguées à des involutions de $\mathrm{PGL}(3;\mathbb{C})$.

On a les égalités suivantes ([5])

$$\mathring{\mathfrak{Bir}}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3, \qquad \mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3;$$

on peut étudier les conditions d'incidence entre les Σ^i. Récapitulons toutes ces propriétés dans l'énoncé suivant :

Théorème III.4 ([5]). *Les adhérences étant prises dans $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ on a :*

$$\overline{\Sigma^0} = \Sigma^0, \qquad \overline{\Sigma^1} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \qquad \overline{\Sigma^2} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2,$$

$$\mathring{\mathfrak{Bir}}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3, \qquad \mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \overline{\Sigma^3} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$$

avec

$$\dim \Sigma^0 = 10, \qquad \dim \Sigma^1 = 12, \qquad \dim \Sigma^2 = 13 \qquad \textit{et} \qquad \dim \Sigma^3 = 14.$$

On regarde $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ comme sous-ensemble de $\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ et on montre que :

Théorème III.5 ([5]). *L'ensemble $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est lisse dans $\mathfrak{Rat}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.*

Les conditions d'incidence et le fait que chaque Σ^i soit une orbite impliquent qu'il suffit de montrer que l'adhérence de Σ^3 est lisse le long de Σ^0.

Comme on l'a dit $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ est lisse et connexe. Qu'en est-il en degré quelconque ? Le premier degré intéressant est le degré 3 pour la raison suivante. D'après le théorème de NŒTHER toute transformation birationnelle s'écrit comme un produit

$$A_0\sigma A_1\sigma\ldots\sigma A_n \qquad A_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}});$$

lorsque les A_i sont choisis génériquement le degré d'un tel élément est $2n$. Pour obtenir des applications birationnelles de degré d qui n'est pas une puissance de 2, il est donc nécessaire que les transformations A_i soient assujetties à des contraintes. Le premier degré pour lequel ce phénomène apparaît est $d = 3$. Dans les traités anciens on trouve une « description » des transformations birationnelles cubiques, description qui repose sur des considérations de géométrie énumérative (nombre de points d'indétermination, configuration de courbes contractées). Nous proposons une liste de formes normales à conjugaison g.d. près ([**5**, §6.2.3]), la connexité apparaissant en dernier lieu comme sous-produit. Les techniques utilisées sont pour la plupart classiques : topologie du complément de certaines courbes planes, contraction des zéros du déterminant jacobien etc. Malheureusement dès le degré 3 on ne dispose pas de critère de birationnalité analogue à celui utilisé en degré 2 comme l'atteste l'exemple suivant : si ϕ est la transformation $(z_0^2z_1 : z_0z_2^2 : z_1^2z_2)$, le lieu d'annulation de $\det\mathrm{jac}\,\phi$ est bien contracté alors que ϕ n'est pas inversible. Toutefois si ϕ est birationnelle, la courbe $\det\mathrm{jac}\,\phi = 0$ est contractée par ϕ et ceci s'avère dans bon nombre de cas intéressant à exploiter. Nous montrons qu'en degré 3 les configurations possibles de courbes contractées sont certaines unions de droites et coniques. La liste des formes normales des éléments de $\mathfrak{Bir}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ à conjugaison g.d. près nous permet

- d'affirmer que le lieu exceptionnel d'un élément « générique » est formé d'une conique et de quatre droites qui s'intersectent sur un point de la conique
- et d'établir que $\dim \mathring{\mathfrak{Bir}}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C}) = 18$ (*voir* [**5**, Proposition 6.35]).

À conjugaison g.d. près les éléments qui présentent la configuration générique forment une famille à deux paramètres : alors qu'en degré 2 il y a trois orbites g.d., ici il y en a une infinité. À l'aide des formes normales on obtient que la décomposition de NŒTHER de tout élément de $\mathfrak{Bir}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ fait intervenir au plus huit fois l'involution de CREMONA ([**5**, Théorème 6.40]). On note que toutes les configurations de dégénérescence de l'élément générique n'apparaissent pas. En degré 2 il y a déjà un phénomène analogue : la configuration de trois droites concourantes n'est pas réalisée comme ensemble exceptionnel d'une transformation birationnelle quadratique. L'adhérence ordinaire de l'ensemble des transformations birationnelles purement cubiques de configuration générique dans $\mathring{\mathfrak{Bir}}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est $\mathring{\mathfrak{Bir}}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ (*voir* [**5**, Théorème 6.38]). Nous montrons que $\mathring{\mathfrak{Bir}}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est irréductible (en fait rationnellement connexe) ; par contre alors que $\mathfrak{Bir}_2(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est lisse et irréductible nous obtenons qu'il n'en est pas de même pour $\mathfrak{Bir}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ vu dans $\mathbb{P}^{29}_\mathbb{C} \simeq \mathfrak{Rat}_3(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ (*voir* [**5**, Théorème 6.39]).

2. Transformations birationnelles de petit bidegré en dimension 3

Si ϕ est une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^3_\mathbb{C}$ on désigne par I_ϕ l'idéal engendré par les ϕ_i, par $\Lambda_\phi \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_\mathbb{C}}(d))$ le sous-espace de dimension 4 engendré par les ϕ_i et par $\deg I_\phi$ le degré de I_ϕ. Parfois (par exemple dans [**Hud27**]) le lieu base $\mathfrak{base}\,\phi$ de Λ_ϕ est appelé ***F-lieu*** de ϕ ; ses points (resp. courbes) sont appelées les ***points fondamentaux*** (resp. les ***courbes fondamentales***) ou les ***F-points*** (resp. ***F-courbes***). Si ℓ est une droite générique, la préimage de ℓ par ϕ est une intersection complète Γ_ℓ ; soit $\mathcal{C}_2$ l'union des composantes irréductibles de Γ_ℓ supportées par le F-lieu de ϕ. On définit $\mathcal{C}_1$ par liaison à partir de $\mathcal{C}_2 \subset \Gamma_\ell$. Remarquons que si ϕ est birationnelle, alors $\mathcal{C}_1 = \phi^{-1}(\ell)$.

On note $\mathfrak{p}_a(\mathcal{C}_i)$ (resp. $\omega_{\mathcal{C}_i}$) le genre arithmétique de $\mathcal{C}_i$ (resp. le faisceau dualisant de $\mathcal{C}_i$).

Remarquons que l'inégalité $\deg\phi^{-1} \leq (\deg\phi)^2$ mentionnée au début du chapitre provient du théorème de BEZOUT qui assure que

$$(\deg\phi)^2 = \deg\mathcal{C}_1 + \deg\mathcal{C}_2 = \deg\phi^{-1} + \deg\mathcal{C}_2.$$

Continuons avec la terminologie utilisée par HUDSON et nécessaire pour la suite de cette section. Soit ϕ un élément de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Pour tout sous-schéma X de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ on désigne par $\mathscr{I}_X$ l'idéal de X dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Un point p est un ***point double*** si toutes les surfaces cubiques de Λ_ϕ sont singulières en p. Un point p est un ***binode*** s'il existe h dans $\mathscr{I}_p$ de degré 1 tel que tous les éléments de Λ_ϕ appartiennent à $h\cdot\mathscr{I}_p$. Un point p est un ***double point de contact*** si tous les éléments de Λ_ϕ appartiennent à $\mathscr{I}_p^3+(Q)$, avec Q de degré 2 singulier en p. Un point p est un ***point de contact*** si tous les éléments de Λ_ϕ appartiennent à $\mathscr{I}_p^2+\mathscr{I}_{\mathcal{S}}$ où $\mathcal{S}$ désigne une cubique lisse en p. Un point p est un ***point d'osculation*** si tous les éléments de Λ_ϕ appartiennent à $\mathscr{I}_p^3+\mathscr{I}_{\mathcal{S}}$ où $\mathcal{S}$ désigne une cubique lisse en p. En appendice on reproduit en partie une table qu'HUDSON appelle “Cubic Space Transformations”, on la notera $\mathfrak{table\ hudson}$ et on désigne par $\mathcal{E}_i$ la i-ème famille de $\mathfrak{table\ hudson}$. Dans un second appendice on donne des constructions de transformations birationnelles cubiques de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ à l'aide de Macaulay2.

2.1. Les transformations birationnelles réglées.

Définition 4. Une transformation birationnelle ϕ de bidegré $(3,d)$ est ***réglée*** si la transformée stricte d'un plan générique par ϕ^{-1} est une surface cubique réglée.

Désignons par $\mathfrak{regle}_{3,d}$ l'ensemble des éléments réglés de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. Remarquons qu'il n'y a pas de transformations birationnelles réglées de bidegré $(3,d)$ dès que $d\geq 6$. Détaillons un peu ces éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ qui jouent un rôle crucial par la suite :

Lemme III.A ([14])**.** *Soit ϕ un élément de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. Désignons par F_1 le sous-schéma maximal de dimension 1 localement* COHEN-MACAULAY *de $\mathfrak{base}\,\phi$. Alors F_1 est l'union d'une droite δ doublée dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ et de $5-d$ autres droites qui intersectent δ. Son résiduel dans $\mathfrak{base}\,\phi$ est un schéma de longueur $2d-4$.*

Considérons par exemple un élément ϕ de $\overline{\mathfrak{regle}_{3,5}}$ dont le lieu base est constitué d'une droite double δ^2 et de 6 points base p_i en position générale. On bouge deux des p_i, par exemple p_1, p_2, jusqu'à ce que la droite (p_1p_2) intersecte δ ; la droite (p_1p_2) est désormais dans $\mathfrak{base}\,\Lambda_\phi$, et l'élément obtenu est un élément générique de $\mathfrak{regle}_{3,4}$. De manière générale on peut montrer qu'on a les inclusions suivantes ([14]) :

$$\mathfrak{regle}_{3,2}\subset\overline{\mathfrak{regle}_{3,3}},\qquad \mathfrak{regle}_{3,3}\subset\overline{\mathfrak{regle}_{3,4}},\qquad \mathfrak{regle}_{3,4}\subset\overline{\mathfrak{regle}_{3,5}} \tag{2.1}$$

Soient ϕ un élément de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})\smallsetminus\mathfrak{regle}_{3,d}$ et ψ une transformation birationnelle réglée. Remarquons que les éléments de Λ_ψ n'ont pas de singularités isolées alors que ceux de Λ_ϕ en ont. Il en résulte qu'on ne peut pas spécialiser une transformation birationnelle réglée en une non reglée ; on peut aussi montrer que la réciproque est impossible. Autrement dit on a l'énoncé suivant :

Proposition III.B ([14])**.** *L'ensemble $\mathfrak{regle}_{3,d}$ est une composante irréductible de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ pour tout $2\leq d\leq 5$.*

Il y a d'autres composantes irréductibles de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ pour $3\leq d\leq 5$. Pour les déterminer on décrit les transformations birationnelles de bidegré $(3,d)$ en utilisant un outil « standard », la suite de liaison, et des propriétés qui en découlent.

2.2. Suite de liaison.

Rappelons le résultat fondamental suivant :

Lemme III.C ([PS74])**.** *Si $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ est une intersection complète, alors on a*

$$0\longrightarrow\omega_{\Gamma_1}\longrightarrow\omega_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\longrightarrow\mathcal{O}_{\Gamma_2}\otimes\omega_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

Remarquons que si ϕ est une transformation rationnelle de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ de degré 3 et si h est un hyperplan de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, alors $\omega_{\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2}(2h)$ et (2.2) se réécrit comme suit (pour $i \in \{2, 3\}$)

$$0 \longrightarrow \omega_{\mathcal{C}_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2}(2h) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{3-i}}(2h) \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

On en déduit un critère de birationnalité ([14]) : la transformation $\phi \in \mathfrak{Rat}_3(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ est birationnelle si et seulement si

$$1 = 3\deg\mathcal{C}_1 - \sum_{p\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2} \operatorname{long}(\mathcal{S}\cap\mathcal{C}_1)_{\{p\}} - \sum_{\substack{p\in F\text{-points}\\ \text{isolés}}} \operatorname{long}(\mathcal{S}\cap\mathcal{C}_1)_{\{p\}}$$

où les F-points isolés désignent les composantes irréductibles de dimension 0 de $\mathfrak{base}\,\phi$. Lorsque le genre arithmétique de $\mathcal{C}_1$ est petit, on peut décrire $I_{\mathcal{C}_2}$:

Proposition III.6 ([14]). *Soit ϕ une application birationnelle de bidegré $(3,d)$.*

Supposons que ϕ ne soit pas réglée et que $\mathfrak{p}_a(\mathcal{C}_1) = 0$, i.e. $\mathcal{C}_1$ est lisse. Alors

- *$d \leq 6$;*
- *$\deg\mathcal{C}_2 = 9-d$ et $\mathfrak{p}_a(\mathcal{C}_2) = 9-2d$.*

Supposons que $\mathfrak{p}_a(\mathcal{C}_1) = 1$ et que $2 \leq d \leq 6$. Alors

- *il existe un point singulier p de $\mathcal{C}_1$ qui est indépendant du choix de $\mathcal{C}_1$;*
- *si $d \leq 4$, toutes les surfaces cubiques de Λ_ϕ sont singulières en p ;*
- *$\deg\mathcal{C}_2 = 9-d$, $\mathfrak{p}_a(\mathcal{C}_2) = 10-2d$ et $\mathcal{C}_2$ est sur une unique quadrique ; plus précisément*

$$I_{\mathcal{C}_2} = (\mathcal{Q}, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{d-2})$$

  où $\deg\mathcal{Q} = 2$ et où les $\mathcal{S}_i$ sont des cubiques indépendantes modulo $\mathcal{Q}$.

Remarque 4. L'avant dernière assertion est fausse lorsque $d = 5$.

2.3. Description des composantes irréductibles.

Théorème III.7 ([14]). *L'ensemble $\mathfrak{regle}_{3,d}$ est une composante irréductible de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ pour tout $2 \leq d \leq 5$.*

En bidegré $(3,3)$ (resp. $(3,4)$) il y a une seule autre composante irréductible ; en bidegré $(3,5)$ il y en a trois autres.

Avant de donner la démonstration de cet énoncé pour les transformations birationnelles de bidegré $(3,3)$, donnons une description de $\mathrm{Bir}_{3,3}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. On a déjà étudié les éléments de $\mathfrak{regle}_{3,3}$ (Lemme III.A) ; supposons donc que le système linéaire Λ_ϕ associé à $\phi \in \mathrm{Bir}_{3,3}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contienne une surface cubique sans droite double.

- Si $\mathcal{C}_1$ est lisse, alors c'est une cubique gauche ; il s'agit de la seconde famille de $\mathfrak{table\ hudson}$. Dans ce cas ϕ est dite déterminantielle, *i.e.* il existe une matrice M de taille $(4,3)$ dont les coefficients sont des formes linéaires et telle que ϕ soit donnée par les mineurs 3×3 de M. Son lieu base est une courbe de degré 6 et de genre arithmétique 3.
- Sinon $\omega_{\mathcal{C}_1} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1}$ et $\mathcal{C}_2$ est sur une quadrique décrite par la forme quadratique Q. Étant donné que $\mathrm{h}^0\omega_{\mathcal{C}_2}(h) = 5$ la courbe $\mathcal{C}_2$ est une intersection complète $(2,3)$, l'idéal de $\mathcal{C}_2$ est $(Q,\mathcal{S})$ et il existe un point p appartenant à Q, singulier pour $\mathcal{S}$ tel que $I_\phi = pQ + (\mathcal{S})$ (Proposition III.6). En termes d'invariants d'HUDSON cette famille est stratifiée comme suit (convention : L_1, $L_1' \in \mathbb{C}[z_0,z_1,z_2,z_3]_1$, $P_i \in \mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]_i$) :

(1) Description de $\mathcal{E}_3$. Le point p appartient à Q et l'élément général de Λ_ϕ a une singularité quadratique ordinaire en p ; on peut choisir $p=(z_0,z_1,z_2)$, $Q=z_0L_1+P_2$ et $\mathcal{S}$ singulière en p.

(2) Description de $\mathcal{E}_{3.5}$ (cas qui n'apparaît pas dans $\mathfrak{table\ hudson}$ mais qui devrait). Le point p appartient à Q (il est singulier ou non) et la cubique générique est singulière en p avec une forme quadratique de rang 2. En d'autres termes p est un binode et l'un des deux biplans est contenu dans T_pQ. La cubique générique est singulière en p avec une forme quadratique de rang 2. La courbe $\mathcal{C}_2$ est de degré 6 et a un point triple qui est sur Q. On peut choisir $p=(z_0,z_1,z_2)$, $Q=z_0L_1+P_2$ et $\mathcal{S}=z_0z_1L_1'+P_3$ singulière en p.

(3) Description de $\mathcal{E}_4$. Le point p est un double point de contact. On peut choisir $p=(z_0,z_1,z_2)$, Q singulière et $\mathcal{S}=(z_0z_1-z_2^2)L_1+P_3$ singulière en p.

DÉMONSTRATION. Convention : si M est une matrice 3×4, on note M_i la matrice obtenue à partir de M en rayant la $(i+1)$-ième ligne.

Montrons que $\overline{\mathcal{E}_3}\subset\overline{\mathcal{E}_2}$ alors que $\mathfrak{regle}_{3,3}\subsetneq\overline{\mathcal{E}_2}$.

Considérons la matrice A donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -z_1 & -z_2 & 0 \\ z_0 & 0 & -z_2 \\ 0 & z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

et B la matrice 3×4 à coefficients $b_{ij}\in \mathrm{H}^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_\mathbb{C}}(1)$. Désignons par $\Delta^{j,k}$ le déterminant de A_0 privée de la j-ième ligne et la k-ième colonne ; les $\Delta^{j,k}$ engendrent $\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]_2$. Par ailleurs

$$\det(A_0+tB_0)=t\cdot S \qquad (t^2)$$

où

$$S=\big(b_{21}+b_{43}\big)\Delta^{1,1}-\big(b_{31}-b_{42}\big)\Delta^{2,1}+\big(b_{33}-b_{22}\big)\Delta^{1,2}+b_{23}\Delta^{1,3}+b_{32}\Delta^{2,2}+b_{41}\Delta^{3,1}$$

est une cubique générique de $(z_0,z_1,z_2)^2$. Pour $i>0$

$$\det(A_i+tB_i)=t(z_{i+1}Q)(-1)^{i+1} \qquad (t^2)$$

est l'équation d'une quadrique générique contenant $(0,0,0,1)$. Ainsi la transformation

$$t\mapsto\left(\frac{\det(A_0+tB_0)}{t}:\frac{\det(A_1+tB_1)}{t}:\frac{\det(A_2+tB_2)}{t}:\frac{\det(A_3+tB_3)}{t}\right)$$

permet de passer de $\mathcal{E}_2$ à un élément général de $\overline{\mathcal{E}_3}$.

La Proposition III.B permet de conclure. □

On peut aussi se demander si les adhérences de ces différentes composantes irréductibles se coupent ; on a l'énoncé suivant :

Proposition III.8 ([**14**]). *L'adhérence de* $\mathfrak{regle}_{3,3}$ *intersecte l'adhérence de chaque composante irréductible de* $\overline{\mathrm{Bir}_{3,4}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})}$.

DÉMONSTRATION. D'après (2.1) il suffit de montrer que $\mathfrak{regle}_{3,3}$ intersecte l'adhérence des transformations birationnelles de bidegré $(3,4)$ qui ne sont pas réglées.

Considérons un élément $\phi \in \mathrm{Bir}_{3,4}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ tel que $\mathcal{C}_2$ soit l'union des quatre droites suivantes

$$\delta = (z_0, z_1^2), \quad (z_0 - \varepsilon z_2, z_1), \quad \ell_1 = (z_0, z_3), \quad \ell_2 = (z_1, z_2).$$

Posons $\mathcal{J}_\varepsilon = (z_0, z_1^2) \cap (z_0 - \varepsilon z_2, z_1) \cap (z_0, z_3) \cap (z_1, z_2)$. On peut vérifier que $\mathcal{J}_\varepsilon = (z_0 z_1, z_0^2 z_2 + \varepsilon z_0 z_2^2, z_1^2 z_3)$. Soit $I_\varepsilon = z_0 z_1 (z_0, z_1, z_2) + (z_0^2 z_2 + \varepsilon z_0 z_2^2, z_1^2 z_3)$. Pour p_2 général la transformation ϕ_ε donnée par $I_\varepsilon \cap p_2$ est birationnelle. Or ϕ_0 appartient à $\mathfrak{regle}_{3,3}$ et pour $\varepsilon \neq 0$ on a $\phi_\varepsilon \in \mathrm{Bir}_{3,4} \smallsetminus \mathfrak{regle}_{3,4}$ d'où le résultat. □

Notons $\mathrm{Bir}_{3,d,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{Bir}_{3,d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) \smallsetminus \mathfrak{regle}_{3,d}$ tels que $\mathfrak{p}_a(\mathcal{C}_2) = \mathfrak{p}_2$. On a l'énoncé suivant :

Théorème III.9 ([14]). *Lorsque $\mathfrak{p}_2 \in \{3, 4\}$, alors $\mathrm{Bir}_{3,3,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ est non vide et irréductible ; sinon $\mathrm{Bir}_{3,3,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) = \emptyset$.*

Si $\mathfrak{p}_2 \in \{1, 2\}$, alors $\mathrm{Bir}_{3,4,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ est non vide et irréductible ; sinon $\mathrm{Bir}_{3,4,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) = \emptyset$.

Si $\mathfrak{p}_2 \in \{-1, 1\}$, alors $\mathrm{Bir}_{3,5,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ est non vide et irréductible. Par contre $\mathrm{Bir}_{3,5,0}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ est non vide et a deux composantes irréductibles ; une de ses deux composantes est contenue dans $\overline{\mathrm{Bir}_{3,5,-1}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})}$. Pour les autres valeurs de $\mathfrak{p}_2$ on a $\mathrm{Bir}_{3,5,\mathfrak{p}_2}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) = \emptyset$.

3. Le groupe des transformations birationnelles engendré par le groupe linéaire et l'involution standard

Considérons le sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ introduit par COBLE dans [Cob16]

$$G_n(\mathbb{C}) = \langle \sigma_n, \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \rangle$$

où σ_n désigne l'involution $\left(\frac{1}{z_0} : \frac{1}{z_1} : \ldots : \frac{1}{z_n}\right)$. Ce groupe est aussi évoqué dans [Hud27] :

> "For a general space transformation, there is nothing to answer either to a plane characteristic or NŒTHER's theorem. There is however a group of transformations, called punctual because each is determined by a set of points, which are defined to satisfy an analogue of NŒTHER's theorem, and possess characteristics, and for which we can set up parallels to a good deal of the plane theory."

Remarquons qu'en fait les éléments de $G_3(\mathbb{C})$ ne sont pas « ponctuels » ([BH14]). Le théorème de NOETHER ([AC02, ŠAV+65]) assure que $G_2(\mathbb{C})$ coïncide avec $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$; ce n'est pas le cas en dimension supérieure : $G_n(\mathbb{C})$ est alors un sous-groupe strict de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ (*voir* [Hud27, Pan99]). Néanmoins comme nous allons le voir par la suite $G_n(\mathbb{C})$ partage de nombreuses propriétés avec $G_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.

3.1. Le groupe $G_n(\mathbb{C})$ n'est pas linéaire.

Proposition III.10 ([7]). *Le groupe $G_n(\mathbb{C})$ n'est pas linéaire : si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, il n'y a pas de représentation linéaire fidèle de $G_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(V)$.*

Plus précisément on a l'énoncé suivant dû à CORNULIER en dimension 2 (*voir* [Cor]) et dont la démonstration s'adapte en dimension supérieure :

Proposition III.11 ([7]). *Le groupe $G_n(\mathbb{C})$ n'a pas de représentation non triviale de dimension finie.*

Remarque 5. Ces résultats sont aussi valables pour $G_n(\Bbbk)$ où $\Bbbk$ désigne un corps algébriquement clos.

Lemme III.D. *La transformation* $\big(z_0z_{n-1}:z_1z_{n-1}:\ldots:z_{n-2}z_{n-1}:z_{n-1}z_n:z_n^2\big)$ *appartient à* $G_n(\mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION. Désignons par ϕ la transformation $\big(z_0z_{n-1}:z_1z_{n-1}:\ldots:z_{n-2}z_{n-1}:z_{n-1}z_n:z_n^2\big)$; elle s'écrit aussi $\mathfrak{a}_1\sigma_n\mathfrak{a}_2\sigma_n\mathfrak{a}_3$ où

$$\mathfrak{a}_1=\big(z_2-z_1:z_3-z_1:\ldots:z_n-z_1:z_1:z_1-z_0\big),$$
$$\mathfrak{a}_2=\big(z_{n-1}+z_n:z_n:z_0:z_1:\ldots:z_{n-2}\big),$$
$$\mathfrak{a}_3=\big(z_0+z_n:z_1+z_n:\ldots:z_{n-2}+z_n:z_{n-1}-z_n:z_n\big).$$

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III.11. On adapte la démonstration de CORNULIER ([**Cor**]).

Il y a une copie naturelle de $H=(\mathbb{C}^*)^n\rtimes\mathbb{Z}$ dans $G_n(\mathbb{C})$, où $\mathbb{Z}$ agit par

$$\phi=\big(z_0z_{n-1}:z_1z_{n-1}:\ldots:z_{n-2}z_{n-1}:z_{n-1}z_n:z_n^2\big);$$

ceci correspond en coordonnées affines au groupe des transformations du type

$$(\alpha_0z_0z_{n-1}^k,\alpha_1z_1z_{n-1}^k,\ldots,\alpha_{n-2}z_{n-2}z_{n-1}^k,\alpha_{n-1}z_{n-1})$$

avec $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},k)\in(\mathbb{C}^*)^n\times\mathbb{Z}$.

Considérons une représentation linéaire $\rho\colon H\to\mathrm{GL}(k;\mathbb{C})$. Si p est premier et si ξ_p est une racine primitive p-ième de l'unité, alors on pose

$$\mathfrak{g}_p=(z_0:z_1:\ldots:z_{n-1}:\xi_p^{-1}z_n),\quad \mathfrak{h}_p=(\xi_pz_0:\xi_pz_1:\ldots:\xi_pz_{n-1}:z_n)$$

On remarque que $\mathfrak{h}_p=[\phi,\mathfrak{g}_p]$ commute avec ϕ et $\mathfrak{g}_p$. Si $\rho(\mathfrak{g}_p)\neq 1$, alors $k>p$ (*voir* [**Bir36**, Lemme 1]).

Soit p un entier supérieur à k ; si on a une représentation arbitraire $\varsigma\colon G_n(\mathbb{C})\to\mathrm{GL}(k;\mathbb{C})$, la restriction $\varsigma_{|\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})}$ de ς à $\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ n'est pas fidèle. Comme $\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ est simple, ς est trivial sur $\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$. On conclut grâce au fait que les involutions $-\mathrm{id}$ et σ_n sont conjuguées via l'application birationnelle ψ définie par

$$\Big((z_0+z_n)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 0}}^n(z_i-z_n):(z_1+z_n)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^n(z_i-z_n):\ldots:(z_{n-1}+z_n)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-1}}^n(z_i-z_n):\prod_{i=0}^n(z_i-z_n)\Big)$$

qui appartient à $G_n(\mathbb{C})$; en effet ψ s'écrit aussi $\mathfrak{a}_1\sigma_n\mathfrak{a}_2$ où $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ désignent les automorphismes de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ suivants :

$$\mathfrak{a}_1=\big(z_0+z_n:z_1+z_n:\ldots:z_{n-1}+z_n:z_n\big),$$
$$\mathfrak{a}_2=\big(z_0-z_n:z_1-z_n:\ldots:z_{n-1}-z_n:2z_n\big).$$

□

3.2. Quelques sous-groupes de $G_n(\mathbb{C})$. Un ***automorphisme polynomial*** ϕ de $\mathbb{C}^n$ est une transformation du type

$$(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1})\mapsto\big(\phi_0(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}),\phi_1(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}),\ldots,\phi_{n-1}(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1})\big),$$

avec $\phi_i\in\mathbb{C}[z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}]$, qui est bijective ; on désigne ϕ par $\phi=(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1})$. L'ensemble des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^n$ forment un groupe noté $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$.

Les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^n$ de la forme $(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1})$, où $\phi_i=\phi_i(z_i,z_{i+1},\ldots,z_{n-1})$ dépend uniquement de z_i, z_{i+1}, …, z_{n-1}, forment le sous-groupe de JONQUIÈRES $\mathrm{J}_n\subset\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$. Un automorphisme polynomial $(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1})$ avec tous les ϕ_i linéaires est une ***transformation affine***. Désignons par Aff_n le ***groupe des transformations affines***. On a les inclusions suivantes

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})\subset\mathrm{Aff}_n\subset\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n).$$

Le sous-groupe $\mathrm{Tame}_n\subset\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ engendré par J_n et Aff_n est appelé ***groupe des automorphismes modérés***. Pour $n=2$ on a $\mathrm{Tame}_2=\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ (*voir* [**Jun42**]). On a $\mathrm{Tame}_3\subsetneq\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^3)$; en effet l'automorphisme de NAGATA n'est pas modéré ([**SU04**]).

DERKSEN a donné un système de générateurs de Tame_n (*voir par exemple* [**vdE00**]) : soit $n\geq 3$ un entier. Le groupe Tame_n est engendré par Aff_n et par la transformation de JONQUIÈRES

$$\big(z_0+z_1^2,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}\big).$$

Proposition III.12 ([**7**])**.** *Le groupe $G_n(\mathbb{C})$ contient* Tame_n.

En suivant la démonstration de [**5**, Proposition 5.7] on montre que :

Proposition III.13 ([**7**])**.** *Soient $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, …, $\mathfrak{g}_k$ des éléments génériques de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Le sous-groupe de $G_n(\mathbb{C})$ engendré par $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, …, $\mathfrak{g}_k$ et σ_n est un produit libre*

$$\overbrace{\mathbb{Z}*\ldots*\mathbb{Z}}^{k+1}*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

En particulier $\langle\mathfrak{g}_0\sigma_n,\,\mathfrak{g}_1\sigma_n,\,\ldots,\,\mathfrak{g}_k\sigma_n\rangle$ est un sous-groupe libre de $G_n(\mathbb{C})$.

3.3. Le groupe $G_n(\mathbb{C})$ est parfait. Si G est un groupe et g un élément de G, on désigne par

$$\mathrm{N}(g;\mathrm{G})=\langle fgf^{-1}\,|\,f\in\mathrm{G}\rangle$$

le sous-groupe normal engendré par g dans G. On peut établir les propriétés suivantes ([**7**]) :

(1) $\mathrm{N}(\mathfrak{g};\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C}))=\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ pour tout $\mathfrak{g}\in\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})\smallsetminus\{\mathrm{Id}\}$;

(2) $\mathrm{N}(\sigma_n;G_n(\mathbb{C}))=G_n(\mathbb{C})$;

(3) $\mathrm{N}(\mathfrak{g};G_n(\mathbb{C}))=G_n(\mathbb{C})$ pour tout $\mathfrak{g}\in\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})\smallsetminus\{\mathrm{Id}\}$;

qui nous permettent d'établir que :

Corollaire III.14 ([**7**])**.** (1) *Le groupe $G_n(\mathbb{C})$ est parfait,* i.e. $[G_n(\mathbb{C}),G_n(\mathbb{C})]=G_n(\mathbb{C})$ *;*

(2) *pour tout ϕ dans $G_n(\mathbb{C})$ il existe des automorphismes $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, …, $\mathfrak{g}_k$ de $\mathbb{P}^n_\mathbb{C}$ tels que*

$$\phi=(\mathfrak{g}_0\sigma_n\mathfrak{g}_0^{-1})(\mathfrak{g}_1\sigma_n\mathfrak{g}_1^{-1})\ldots(\mathfrak{g}_k\sigma_n\mathfrak{g}_k^{-1}).$$

3.4. À propos des automorphismes de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Considérons une variété complexe projective M et son groupe de transformations birationnelles $\mathrm{Bir}(M)$. Le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$ agit sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (resp. $\mathrm{Bir}(M)$) : si g est dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (resp. $\mathrm{Bir}(M)$) et si κ est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ on désigne par ${}^\kappa g$ l'élément obtenu en faisant agir κ sur les coefficients de g.

En 2006, on a décrit le groupe d'automorphismes de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$:

Théorème III.E ([**8**])**.** *Soit φ un automorphisme de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Il existe un automorphisme polynomial ψ de $\mathbb{C}^2$ et un automorphisme de corps κ tels que*

$$\varphi(f)={}^\kappa(\psi f\psi^{-1})\qquad\forall\, f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2).$$

Puis, en 2011, KRAFT et STAMPFLI ont montré que la restriction à Tame_n de tout automorphisme de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ s'écrit de même à l'aide de conjugaisons intérieures et d'automorphismes du corps $\mathbb{C}$ (*voir* [**KS13**]).

Même si $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ ne possède pas de structure de produit amalgamé comme $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ (*voir* Appendice de [**CL13**]) le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}))$ peut être décrit et un énoncé similaire à celui du Théorème III.E est obtenu dans [**9**]. Il n'y a pas de résultats analogues en dimension supérieure ; néanmoins dans [**Can14**] CANTAT classifie tous les morphismes (abstraits) de $\mathrm{PGL}(k+1;\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Bir}(M)$ dès que $k \geq \dim_{\mathbb{C}} M$. Avant de rappeler l'énoncé introduisons quelques notations. Si $\mathfrak{g}$ appartient à $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})$ on désigne par ${}^{t}\mathfrak{g}$ la transposée de $\mathfrak{g}$. L'involution $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^{\vee} = ({}^{t}\mathfrak{g})^{-1}$ est l'unique automorphisme algébrique extérieur de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ (*voir* [**Die63**]).

Théorème III.F ([**Can14**]). *Soit M une variété projective, complexe, connexe et lisse de dimension n. Soient k un entier positif et $\rho\colon \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Bir}(M)$ un morphisme de groupes injectif. Alors $n \geq k$; si $n = k$ il existe un morphisme de corps $\kappa\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et une application birationnelle $\psi\colon M \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ tels que*

$$\psi\rho(\mathfrak{g})\psi^{-1} = {}^{\kappa}\mathfrak{g} \quad \forall \mathfrak{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \qquad \textit{ou} \qquad \psi\rho(\mathfrak{g})\psi^{-1} = ({}^{\kappa}\mathfrak{g})^{\vee} \quad \forall \mathfrak{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}});$$

en particulier M est rationnelle. De plus si ρ est un isomorphisme, κ est un automorphisme de corps.

On en déduit l'énoncé suivant :

Théorème III.15 ([7]). *Soit φ un automorphisme de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$. *Il existe une transformation birationnelle ψ de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et un automorphisme $\kappa\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que*

$$\varphi(g) = {}^{\kappa}(\psi g \psi^{-1}) \qquad \forall g \in G_n(\mathbb{C}).$$

DÉMONSTRATION. Le Théorème III.F implique que modulo l'action d'un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ et conjugaison birationnelle

$$\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \quad \forall \mathfrak{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\vee} \quad \forall \mathfrak{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}).$$

Déterminons $\varphi(\sigma_n)$. Pour $0 \leq i \leq n-2$ désignons par τ_i l'automorphisme de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui permute z_i et z_{n-1}

$$\tau_i = \big(z_0 : z_1 : \ldots : z_{i-1} : z_{n-1} : z_{i+1} : z_{i+2} : \ldots : z_{n-2} : z_i : z_n\big).$$

Soit η la transformation birationnelle donnée en coordonnées homogènes par

$$\big(z_0 z_{n-1} : z_1 z_{n-1} : \ldots : z_{n-2} z_{n-1} : z_n^2 : z_n z_{n-1}\big).$$

On a

$$\sigma_n = \big(\tau_0 \eta \tau_0\big)\big(\tau_1 \eta \tau_1\big) \ldots \big(\tau_{n-2} \eta \tau_{n-2}\big)\eta$$

d'où

$$\varphi(\sigma_n) = \big(\varphi(\tau_0)\varphi(\eta)\varphi(\tau_0)\big)\big(\varphi(\tau_1)\varphi(\eta)\varphi(\tau_1)\big) \ldots \big(\varphi(\tau_{n-2})\varphi(\eta)\varphi(\tau_{n-2})\big)\varphi(\eta)$$

On peut vérifier que $\varphi(\tau_i) = \tau_i$.

Déterminons maintenant $\varphi(\eta)$. Supposons que $\varphi_{|\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})} = \mathrm{id}$. Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ dans $(\mathbb{C}^*)^n$; posons $\mathfrak{d}_\alpha = (\alpha_0 z_0, \alpha_1 z_1, \ldots, \alpha_{n-1} z_{n-1})$. L'involution η satisfait la relation suivante $\mathfrak{d}_\beta \xi = \xi \mathfrak{d}_\alpha$ où $\beta = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}^{-1})$. Il en résulte que $\varphi(\eta) = \Big(\pm z_0, \pm z_1, \ldots, \pm z_{n-2}, \frac{\alpha}{z_{n-1}}\Big)$ pour un certain α dans $\mathbb{C}^*$. Comme ξ commute à

$$\mathfrak{t} = (z_0 + 1, z_1 + 1, \ldots, z_{n-2} + 1, z_{n-1}),$$

l'image de η par φ commute à $\varphi(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. Par suite $\varphi(\eta) = \left(z_0, z_1, \ldots, z_{n-2}, \frac{\alpha}{z_{n-1}}\right)$. Si $\mathfrak{h}_n$ désigne l'automorphisme

$$\left(z_0 : z_0 - z_1 : z_0 - z_2 : \ldots : z_0 - z_n\right)$$

alors $\varphi(\mathfrak{h}_n) = \mathfrak{h}_n$ et la relation $\left(\mathfrak{h}_n\sigma_n\right)^3 = \mathrm{id}$ entraîne que $\varphi(\sigma_n) = \sigma_n$. Si $\varphi_{|\mathrm{PGL}(n+1;\mathbb{C})}$ coïncide avec $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^\vee$, un argument similaire montre que la relation $\left(\varphi(\mathfrak{h}_n)\varphi(\sigma_n)\right)^3 = \mathrm{id}$ ne peut pas être satisfaite. $\square$

3.5. Simplicité de $G_n(\mathbb{C})$. Une ***famille algébrique*** de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est la donnée d'une application rationnelle $\phi\colon M \times \mathbb{P}^n_\mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{P}^n_\mathbb{C}$, où M est une $\mathbb{C}$-variété, définie sur un ouvert dense $\mathcal{U}$ de $M \times \mathbb{P}^n_\mathbb{C}$ telle que

- pour tout $m \in M$ l'intersection $\mathcal{U}_m = \mathcal{U} \cap (\{m\} \times \mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\{m\} \times \mathbb{P}^n_\mathbb{C}$,
- la restriction de $\mathrm{id} \times \phi$ à $\mathcal{U}$ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ sur un ouvert dense de $M \times \mathbb{P}^n_\mathbb{C}$.

Pour tout $m \in M$ la transformation birationnelle $z \dashrightarrow \phi(m,z)$ représente un élément $\phi_m(z)$ de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ appelé ***morphisme*** de M dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. La topologie de ZARISKI sur $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$, introduite par DEMAZURE ([**Dem70**]) et SERRE ([**Ser10**]), est définie de la façon suivante : le sous-ensemble Ω de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ est ***fermé*** si pour toute $\mathbb{C}$-variété M, et tout morphisme $M \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ la préimage de Ω dans M est fermée. Notons qu'en restriction à $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ on retrouve la topologie de ZARISKI usuelle sur le groupe algébrique $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$. Rappelons que si $n \geq 2$ et si G un sous-groupe non-trivial, normal, et fermé de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$, alors G contient $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C})$ et $\mathrm{PGL}\big(2;\mathbb{C}(z_0,z_1,\ldots,z_{n-2})\big)$ (*voir* [**Bla10**]). En combinant le fait que $-\mathrm{id}$ et σ_n sont conjuguées via un élément de $G_n(\mathbb{C})$ (*voir* Démonstration de la Proposition III.11) et la démonstration de [**Pan99**, Théorème 1] on obtient que

$$G_n(\mathbb{C}) \subset \langle \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_\mathbb{C}), \mathrm{PGL}\big(2;\mathbb{C}(z_0,z_1,\ldots,z_{n-2})\big)\rangle.$$

On en déduit l'énoncé suivant.

Proposition III.16 ([7])**.** *Le groupe $G_n(\mathbb{C})$, muni de la topologie de* ZARISKI*, est simple.*

3.6. Dynamique des éléments de $G_n(\mathbb{C})$. Comme on l'a vu il y a un lien très fort entre les automorphismes des surfaces rationnelles d'entropie positive et les transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$; on a désormais de nombreux exemples de tels automorphismes (Chapitre II). Construire des automorphismes sur des variétés rationnelles M de dimension n semble bien plus compliqué dès que $n \geq 3$. Les seuls exemples connus qui sont de plus d'entropie positive apparaissent dans [**OT13**]. Tout automorphisme d'une variété rationnelle de dimension n obtenue en éclatant $\mathbb{P}^n_\mathbb{C}$ en un nombre fini de points est d'entropie nulle ([**Tru12**, **BC13a**]), on introduit donc la notion un peu plus souple de pseudo-automorphisme. Une transformation birationnelle $\Phi_M\colon M \dashrightarrow M$ est un ***pseudo-automorphisme*** s'il existe deux sous-ensembles S_1, S_2 de M de codimension ≥ 2 tels que $\Phi_M\colon M \smallsetminus S_1 \to M \smallsetminus S_2$ soit birégulière ([**DO88**]). De manière équivalente, Φ_M est un pseudo-automorphisme si et seulement si Φ_M et Φ_M^{-1} ne contractent pas d'hypersurface. L'existence de pseudo-automorphismes provenant de transformations de $G_n(\mathbb{C})$ a été prouvée dans [**PZ14**, **BDK14**].

Soient M une variété kählerienne de dimension n et $\phi\colon M \dashrightarrow M$ une application rationnelle. Pour tout $0 \leq p \leq n$ on considère l'application induite $\phi^*\colon \mathrm{H}^{p,p}(M) \to \mathrm{H}^{p,p}(M)$. En général $(\phi^*)^k \neq (\phi^k)^*$. On dit que ϕ est p-***stable*** si l'application $\phi^*\colon \mathrm{H}^{p,p}(M) \to \mathrm{H}^{p,p}(M)$ satisfait $(\phi^*)^k = (\phi^k)^*$ pour tout entier k. Toute transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2_\mathbb{C}$ est 1-stable après modification ; ce n'est plus le cas en dimension supérieure ([**Lin12**, Thm 4.7]). Rappelons aussi que $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_\mathbb{C})$ est 1-stable si et seulement si ϕ^{-1} est 1-stable. Cette propriété n'est plus valable en dimension supérieure comme l'atteste l'exemple suivant (non publié) dû à GUEDJ : l'automorphisme polynomial ϕ de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$\phi = \left(z_0^2+\lambda z_1+az_2, \lambda^{-1}z_0^2+z_1, z_0\right) \qquad a,\lambda\in\mathbb{C}^*$$

est 1-stable, mais ϕ^{-1} ne l'est pas.

En s'inspirant de [5, Proposition 4.2] on obtient l'énoncé suivant.

Proposition III.17 ([7]). *Soit $\mathfrak{g}$ un automorphisme de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors $\mathfrak{g}\sigma_n$ (resp. $(\mathfrak{g}\sigma_n)^{-1}$) est 1-stable.*

DÉMONSTRATION. On désigne par e_i le point de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème et par E_i l'hypersurface $\{z_i=0\}$. Chaque E_i est contracté par σ_n sur e_i ; pour tout $j>0$ le sous-espace linéaire $E_{i_0}\cap E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_j}$ de codimension i_j+1 est "flopped" via σ_n sur un espace linéaire de dimension i_j+1 passant par e_{i_0}, e_{i_1}, $\ldots$, e_{i_j}.

Soit $\mathfrak{g}=(\mathfrak{g}_{00}z_0+\mathfrak{g}_{01}z_1+\ldots+\mathfrak{g}_{0n}z_n:\mathfrak{g}_{10}z_0+\mathfrak{g}_{11}z_1+\ldots+\mathfrak{g}_{1n}z_n:\ldots:\mathfrak{g}_{n0}z_0+\mathfrak{g}_{n1}z_1+\ldots+\mathfrak{g}_{nn}z_n)$ un automorphisme de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ tels que les $\mathfrak{g}_{ij}$ soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Supposons que $\mathcal{H}$ soit un hyperplan contracté par $(\mathfrak{g}\sigma_n)^{\ell+1}$ sur un point p, l'entier ℓ étant minimal. Par suite $\widetilde{\mathcal{H}}=(\mathfrak{g}\sigma_n)^{\ell}\mathcal{H}$ est contracté sur $\mathfrak{g}\sigma_n$, et $\mathcal{H}\subset\{z_0=0\}\cup\{z_1=0\}\cup\ldots\cup\{z_n=0\}$. Supposons par exemple que $\widetilde{\mathcal{H}}=\{z_n=0\}$; alors $p=(\mathfrak{g}_{0n}:\mathfrak{g}_{1n}:\ldots:\mathfrak{g}_{nn})$. Pour tout $k\geq 0$, on peut écrire $(\mathfrak{g}\sigma_n)^k$ sous la forme $(\phi_0:\phi_1:\ldots:\phi_n)$, les ϕ_i désignant des polynômes en les z_i ; les coefficients des ϕ_i sont des polynômes universels dont les coefficients dépendent des variables $\mathfrak{g}_{00}$, $\mathfrak{g}_{01}$, $\ldots$, $\mathfrak{g}_{nn}$. Puisque les g_{ij} sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $(\mathfrak{g}\sigma_n)^k(p)$ n'est contenu dans aucun $E_{i_0}\cap E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_j}$, $k\geq 0$, et $\mathfrak{g}\sigma_n$ est 1-stable.

Un argument similaire permet d'obtenir l'énoncé pour $(g\sigma_n)^{-1}$. $\square$

ANNEXE A

Classification des transformations birationnelles cubiques d'après HUDSON

nombre	bidegré	D.p. de contact	binode	D. p.	point d'osculation	point de contact	pts ordinaires	F-courbes
1	3–2	·	·	·	·	·	·	l^2, l_1, l_2, l_3
2	3–3	·	·	·	·	·	·	ω_6 (genre 3)
3		·	·	1	·	·	·	$\omega_6 \equiv O^2$ (genre 3)
4		1	·	·	·	·	·	$\omega_6 \equiv O^4$ (rationnelle)
5		·	·	·	·	·	2	l^2, l_1, l_2
6	3–4	·	·	·	·	·	1	ω_5 (genre 1)
7		·	·	1	·	·	1	$\omega_5 \equiv O_1^2$ (genre 1)
8		·	1	·	·	·	1	$\omega_5 \equiv O_1^3(2)$ (rationnelle)
9		1	·	·	·	·	1	$\omega_3 \equiv O_1^2$, $l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$
10		1	1	·	·	·	1	$\omega_2 \equiv O_1 O_2$, $l \equiv O_1 O_2$ (osculation)
11		·	·	·	·	·	4	l^2, l_1

Transformations birationnelles de bidegrés $(3,2)$, $(3,3)$ et $(3,4)$

nombre	D.p. de contact	binode	D. p.	point d'osculation	point de contact	pts ordinaires	F-courbes
12	·	·	·	·	·	2	ω_3 (rationnelle), l
13	·	·	1	·	·	2	$\omega_4 \equiv O_1$ (genre 1)
14	·	·	1	·	·	2	$\omega_3 \equiv O_1$ (rationnelle), $l \equiv O_1$
15	·	1	·	·	·	2	$\omega_4 \equiv O_1^2(2)$
16	·	1	·	·	·	2	$\omega_2 \equiv O_1(1)$, $l_1 \equiv O_1(1)$, $l_2 \equiv O_1$
17	1	·	·	·	·	2	$\omega_3 \equiv O_1(2)$, $l_1 \equiv O_1$
18	1	·	·	·	·	2	$l \equiv O_1$ (contact), $l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$
19	·	·	2	·	·	2	$\omega_3 \equiv O_1O_2$ (rationnelle), $l \equiv O_1O_2$
20	·	1	1	·	·	2	$\omega_3 \equiv O_1^2$, $l_1 \equiv O_1$
21	1	·	1	·	·	2	$l \equiv O_1O_2$ (contact), $l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$
22	1	1	·	·	·	2	$l \equiv O_1O_2(1)$ (osculation), $l_1 \equiv O_1$
23	·	·	·	·	1	·	ω_4 (rationnelle)
24	·	·	1	·	1	·	$\omega_4 \equiv O_1^2$
25	·	1	·	·	1	·	$\omega_3 \equiv O_1^2(1)$, $l \equiv O_1(1)$
26	1	·	·	·	1	·	$l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$, $l_3 \equiv O_1$, $l_4 \equiv O_1$
27	·	·	·	·	·	6	l^2

Transformations birationnelles de bidegré $(3,5)$

nombre	D.p. de contact	binode	D. p.	point d'osculation	point de contact	pts ordinaires	F-courbes
28	·	·	·	·	·	3	l (contact), l_1
29	·	·	1	·	·	3	ω_3 (plane, genre 1)
30	·	·	1	·	·	3	ω_2, $l \equiv O_1$
31	·	·	1	·	·	3	$l \equiv O_1$ (contact), l_1
32	·	·	1	·	·	3	$l \equiv O_1$ (osculation)
33	·	1	·	·	·	3	$\omega_2 \equiv O_1(1)$, $l \equiv O_1$
34	1	·	·	·	·	3	$\omega_3 \equiv O_1^2$
35	1	·	·	·	·	3	$l \equiv O_1$ (contact), $l_1 \equiv O_1$
36	·	·	2	·	·	3	$\omega_2 \equiv O_1$, $l \equiv O_1O_2$
37	·	1	1	·	·	3	$\omega_2 \equiv O_1(1)O_2$, $l \equiv O_1O_2$
38	·	1	1	·	·	3	$l \equiv O_1O_2$, $l_1 \equiv O_1(1)$, $l_2 \equiv O_1(1)$
39	1	·	1	·	·	3	$l \equiv O_1O_2$ (contact), $l_1 \equiv O_1$
40	1	1	·	·	·	3	$l \equiv O_1O_2(1)$ osculation
41	·	·	·	·	1	1	l_1, l_2, l_3
42	·	·	1	·	1	1	$\omega_3 \equiv O_1$ (rationnelle)
43	·	·	1	·	1	1	$l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$, l_3
44	·	1	·	·	1	1	$\omega_3 \equiv O_1^2(1)$
45	·	1	·	·	1	1	$\omega_2 \equiv O_1(1)$, $l \equiv O_1(1)$
46	·	1	·	·	1	1	$l \equiv O_1(1)$ (contact), $l_1 \equiv O_1$
47	1	·	·	·	1	1	$l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$, $l_3 \equiv O_1$
48	·	·	2	·	1	1	$l \equiv O_1O_2$, $l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_2$
49	·	1	1	·	1	1	$l \equiv O_1(1)O_2$ (contact), $l_2 \equiv O_1$
50	·	·	3	·	1	1	$l_1 \equiv O_2O_3$, $l_2 \equiv O_3O_1$, $l_3 \equiv O_1O_2$
51	·	·	·	1	·	·	ω_3 (rationnelle)
52	·	·	1	1	·	·	$\omega_3 \equiv O_1^2$

Transformations birationnelles de bidegré $(3,6)$

nombre	bidegrés	D.p. de contact	binode	D. p.	point d'osculation	point de contact	pts ordinaires	F-courbes
53	3–7	1	·	·	·	·	4	$l \equiv O_1$ (contact)
54		·	·	2	·	·	4	$l \equiv O_1O_2$, l_1
55		·	1	1	·	·	4	$l \equiv O_1O_2$, $l_1 \equiv O_1(1)$
56		1	·	1	·	·	4	$l \equiv O_1O_2$ (contact)
57		·	·	1	·	1	2	ω_2
58		·	1	·	·	1	2	$\omega_2 \equiv O_1(1)$
59		1	·	·	·	1	2	$l_1 \equiv O_1$, $l_2 \equiv O_1$
60		·	·	1	·	2	·	$l \equiv O_1$, l_1
61		·	1	·	·	2	·	$l_1 \equiv O_1(1)$, $l_2 \equiv O_1$
62		·	1	·	·	2	·	$l \equiv O_1(1)$ (contact)
63		·	·	2	·	2	·	$l \equiv O_1O_2$, $l_1 \equiv O_1$
64		·	1	1	·	2	·	$l_1 \equiv O_1(1)O_2$ (contact)
65		·	·	1	1	·	1	$\omega_2 \equiv O_1$
66		·	1	·	1	·	1	$l_1 \equiv O_1(1)$, $l_2 \equiv O_1(1)$
67	3–8	·	1	1	·	·	5	$l \equiv O_1O_2$
68		1	·	·	·	1	3	$l \equiv O_1$
69		·	1	·	·	2	1	$l \equiv O_1$
70		·	·	1	1	·	2	l
71		·	1	·	1	·	2	$l \equiv O_1(1)$
72	3–9	1	·	·	·	1	4	
73		·	1	·	·	3	·	
74		·	1	·	1	·	3	
75		·	·	1	1	·	2	

Transformations birationnelles de bidegrés $(3,7)$, $(3,8)$ et $(3,9)$

ANNEXE B

Construction explicite de familles de transformations birationnelles cubiques de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

Encore merci, merci, merci Fred ! ! !

```
restart
k=ZZ/101
R=k[z_0..z_3]
ordipt=()->minors(1,random(R^1,R^{3:-1}))
ordipt()
```

Famille $\mathcal{E}_3$

```
p=ideal(z_0,z_1,z_2)
Q2=minors(1,(gens p)*random(R^3,R^{1:-1}))
Q3=minors(1,(gens p^2)*random(R^6,R^{1:-1}))
I=ideal(z_0*Q2,z_1*Q2,z_2*Q2,Q3)
```

Famille $\mathcal{E}_{3.5}$

```
p=ideal(z_0,z_1,z_2)
Q2=z_0*z_3-z_1*z_2
l2=(random(R^1,R^{1:-1}))_{(0,0)}
l1=((gens p)*random(k^3,k^1))_{(0,0)}
P3=((gens p^3)*random(k^{10},k^1))_{(0,0)}
Q3=z_0*l1*l2+P3
C2=ideal(Q2,Q3)
decompose C2
I=Q2*p+ideal(Q3)
```

Famille $\mathcal{E}_4$

```
p=ideal(z_0,z_1,z_2)
Q2=((gens p^2)*random(k^6,k^1))_{(0,0)}
l2=(random(R^1,R^{1:-1}))_{(0,0)}
P3=((gens p^3)*random(k^{10},k^1))_{(0,0)}
Q3=(z_0*z_1-z_2^2)*l2+P3
C2=ideal(Q2,Q3)
I=Q2*p+ideal(Q3)
```

Famille $\mathcal{E}_5$

```
l=ideal(z_0,z_1)
l1=ideal(z_0,z_2)
l2=ideal(z_1,z_3)
p1=ordipt()
p2=ordipt()
I=intersect(l^2,l1,l2,p1,p2)
```

Famille $\mathcal{E}_7$

```
p=ideal(z_0,z_1,z_2)
Q2=ideal(z_0*z_3-z_1*z_2)
Q3=((gens p^2)*random(k^6,k^1))_{(0,0)}
Q4=((gens p^2)*random(k^6,k^1))_{(0,0)}
S1=ideal(z_3*Q3+z_2*Q4)
S2=ideal(z_1*Q3+z_0*Q4)
p1=ordipt()
I=intersect(Q2*p+S1+S2,p1)
```

Famille $\mathcal{E}_8$

```
p=ideal(z_0,z_1,z_2)
Q2=z_0^2-z_1*z_2
Q3=z_2*z_3
Q4=((gens p^2)*random(k^6,k^1))_{(0,0)}
S1=z_0*Q3+z_1*Q4
S2=z_2*Q3+z_0*Q4
C2=ideal(Q2,S1,S2)
p1=ordipt()
I=intersect(ideal(Q2*p,C2_1,C2_2),p1)
```

Famille $\mathcal{E}_9$

```
p=ideal(z_0,z_1,z_2)
l=ideal(z_3,z_1)
Q2=z_1*z_0
Q3=((gens p^2)*random(k^6,k^1))_(0,0)
Q4=((gens p^2)*random(k^6,k^1))_(0,0)
S1=z_3*Q3+z_1*Q4
S2=z_0*Q3
C2=ideal(Q2,S1,S2)
p1=ordipt()
I=intersect(ideal(Q2*p,C2_1,C2_2),p1)
```

Famille $\mathcal{E}_{10}$

```
p1=ideal(z_0,z_1,z_2)
l=ideal(z_0,z_1)
I1=l^3+ideal(z_1)
C=ideal(z_0,z_1*z_3-(z_0+random(k)*z_1)*z_2+z_2^2)
```

```
C2=intersect(C,I1)
I0=C2_0*p1+ideal(C2_1,C2_2)
p2=ordipt()
I=intersect(I0,p2)
```

Références

[1] J. Blanc and J. Déserti. Embeddings of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ into the Cremona group. *Transform. Groups*, 17(1) :21–50, 2012.

[2] J. Blanc and J. Déserti. Degree growth of birational maps of the plane. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, À paraître.

[3] D. Cerveau and J. Déserti. Itération d'applications rationnelles dans les espaces de matrices. *Conform. Geom. Dyn.*, 15 :72–112, 2011.

[4] D. Cerveau and J. Déserti. Centralisateurs dans le groupe de Jonquières. *Michigan Math. J.*, 61(4) :763–783, 2012.

[5] D. Cerveau and J. Déserti. *Transformations birationnelles de petit degré*, volume 19 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2013.

[6] J. Déserti. Jonquières maps and $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-cocycles. *arXiv :1304.6242*.

[7] J. Déserti. Some properties of the group of regular birational maps. *arXiv :1403.0346*.

[8] J. Déserti. Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine. *J. Algebra*, 297(2) :584–599, 2006.

[9] J. Déserti. Sur les automorphismes du groupe de Cremona. *Compos. Math.*, 142(6) :1459–1478, 2006.

[10] J. Déserti. Le groupe de Cremona est hopfien. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(3) :153–156, 2007.

[11] J. Déserti. Sur les sous-groupes nilpotents du groupe de Cremona. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3) :377–388, 2007.

[12] J. Déserti. Expériences sur certaines transformations birationnelles quadratiques. *Nonlinearity*, 21(6) :1367–1383, 2008.

[13] J. Déserti and J. Grivaux. Special automorphisms of rational surfaces with positive topological entropy. *Indiana Univ. Math. J.*, 60(5) :1589–1622, 2011.

[14] J. Déserti and F. Han. On cubic birational maps of $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. *arXiv :1311.1891*.

Bibliographie

[AC02] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Avi13a] A. Avila. Global theory of one-frequency Schrödinger operators I : stratified analyticity of the Lyapunov exponent and the boundary of nonuniform hyperbolicity, http ://w3.impa.br/∼avila/papers.html. 2013.

[Avi13b] A. Avila. Global theory of one-frequency Schrödinger operators II : acriticality and finiteness of phase transitions for typical potentials, http ://w3.impa.br/∼avila/papers.html. 2013.

[BB70] P. F. Baum and R. Bott. On the zeros of meromorphic vector-fields. In *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, pages 29–47. Springer, New York, 1970.

[BB00] L. Bayle and A. Beauville. Birational involutions of $\mathbf{P}^2$. *Asian J. Math.*, 4(1) :11–17, 2000. Kodaira's issue.

[BC13a] T. Bayraktar and S. Cantat. Constraints on automorphism groups of higher dimensional manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, 405(1) :209–213, 2013.

[BC13b] J. Blanc and S. Cantat. Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces, `arXiv:1307.0361`. 2013.

[BCMar] C. Bisi, A. Calabri, and M. Mella. On plane Cremona transformations of fixed degree. *J. Geom. Anal.*, to appear.

[BD05] E. Bedford and J. Diller. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math. J.*, 128(2) :331–368, 2005.

[BDK14] E. Bedford, J. Diller, and K. Kim. Pseudoautomorphisms with invariant elliptic curves, `arXiv:1401.2386`. 2014.

[Ber77] E. Bertini. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. *Annali di Mat.*, 8 :244–286, 1877.

[BH14] J. Blanc and I. Hedén. The group of Cremona transformations generated by linear maps and the standard involution, `arXiv:1405.2746`. 2014.

[Bir36] G. Birkhoff. Lie groups simply isomorphic with no linear group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42(12) :883–888, 1936.

[BK09] E. Bedford and K. Kim. Dynamics of rational surface automorphisms : linear fractional recurrences. *J. Geom. Anal.*, 19(3) :553–583, 2009.

[BK10] E. Bedford and K. Kim. Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy. *Math. Ann.*, 348(3) :667–688, 2010.

[BL96] F. Berteloot and J. J. Lœb. Holomorphic equivalence between basins of attraction in $\mathbf{C}^2$. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(2) :583–589, 1996.

[Bla09] J. Blanc. Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane. *Groups Geom. Dyn.*, 3(2) :215–266, 2009.

[Bla10] J. Blanc. Groupes de Cremona, connexité et simplicité. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(2) :357–364, 2010.

[BPV08] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust. Sur un théorème de Castelnuovo. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 39(1) :61–80, 2008.

[BPV09] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust. On birational transformations of pairs in the complex plane. *Geom. Dedicata*, 139 :57–73, 2009.

[Can99] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10) :901–906, 1999.

[Can01] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.

[Can11] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 174(1) :299–340, 2011.

[Can14] S. Cantat. Morphisms between Cremona groups, and characterization of rational varieties. *Compos. Math.*, 150(7) :1107–1124, 2014.

[CL13] S. Cantat and S. Lamy. Normal subgroups in the Cremona group. *Acta Math.*, 210(1) :31–94, 2013. With an appendix by Yves de Cornulier.

[Cob16] A. B. Coble. Point sets and allied Cremona groups. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17(3) :345–385, 1916.

[Cob61] A. B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*. Revised printing. American Mathematical Society Colloquium Publication, vol. X. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[Cor] Y. Cornulier. Nonlinearity of some subgroups of the planar Cremona group. *Unpublished manuscript, 2013, http://www.normalesup.org/~cornulier/crelin.pdf*.

[Cre73] L. Cremona. Sulle trasformazioni razionali nello spazio. *Annali di Mat.*, V :131–162, 1871-1873.

[Dem70] M. Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :507–588, 1970.

[DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.

[DI09] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[Die63] J. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Seconde édition, revue et corrigée. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[DJS07] J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) :2793–2991 (electronic), 2007.

[DO88] I. Dolgachev and D. Ortland. Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque*, (165) :210 pp. (1989), 1988.

[Duj06] R. Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J.*, 131(2) :219–247, 2006.

[Fri95] S. Friedland. Entropy of algebraic maps. In *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, number Special Issue, pages 215–228, 1995.

[GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[Giz80] M. H. Gizatullin. Rational G-surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1) :110–144, 239, 1980.

[GML97] X. Gómez-Mont and I. Luengo. The Bott Polynomial of a Holomorphic Foliation by Curves. *Ecuaciones Diferenciales y Singularidades (Colloque Medina 1995)*, Universidad de Valladolid (1997).

[God53] L. Godeaux. *Les transformations birationnelles du plan*. Mémor. Sci. Math., no. 122. Gauthier-Villars, Paris, 1953. 2nd ed.

[Gro03] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.

[Hal82] G. Halphén. Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles. *Bull. Soc. Math. France*, 10 :162–172, 1882.

[Har87] B. Harbourne. Rational surfaces with infinite automorphism group and no antiplurican onical curve. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99(3) :409–414, 1987.

[Hud27] H. P. Hudson. *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press. 1927.

[Isk83] V. A. Iskovskikh. Generators and relations in a two-dimensional Cremona group. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (5) :43–48, 1983.

[Jul22] G. Julia. Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 39 :131–215, 1922.

[Jul68] G. Julia. *Œuvres de Gaston Julia. Vol. I*. Gauthier-Villars, Paris, 1968. Edited by Michel Hervé.

[Jun42] H. W. E. Jung. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184 :161–174, 1942.

[KS13] H. Kraft and I. Stampfli. On automorphisms of the affine cremona group. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 63(3) :1535–1543, 2013.

[Lin12] J.-L. Lin. Algebraic stability and degree growth of monomial maps. *Math. Z.*, 271(1-2) :293–311, 2012.

[Man86] Yu. I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[McM02] C. T. McMullen. Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :201–233, 2002.

[McM07] C. T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :49–89, 2007.

[Nag60] M. Nagata. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32 :351–370, 1960.

[Ogu10] K. Oguiso. The third smallest Salem number in automorphisms of $K3$ surfaces. In *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, volume 60 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 331–360. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[OT13] K. Oguiso and T. T. Truong. Salem number in dynamics of kähler threefolds and complex tori, `arXiv:1309.4851`. 2013.

[Pan97] I. Pan. Sur les transformations de Cremona de bidegré $(3,3)$. *Enseign. Math. (2)*, 43(3-4) :285–297, 1997.

[Pan99] I. Pan. Une remarque sur la génération du groupe de Cremona. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(1) :95–98, 1999.

[Pan05] I. Pan. Sur le degré dynamique des transformations de Cremona du plan qui stabilisent une courbe irrationnelle non-elliptique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(7) :439–443, 2005.

[Pro11] Y. Prokhorov. p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[Pro12] Y. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. *J. Algebraic Geom.*, 21(3) :563–600, 2012.

[Pro13] Yu. G. Prokhorov. On birational involutions of $\mathbb{P}^3$. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 77(3) :199–222, 2013.

[PRV01] I. Pan, F. Ronga, and T. Vust. Transformations birationnelles quadratiques de l'espace projectif complexe à trois dimensions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) :1153–1187, 2001.

[PS74] C. Peskine and L. Szpiro. Liaison des variétés algébriques. I. *Invent. Math.*, 26 :271–302, 1974.

[PY89] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(1) :99–108, 1989.

[PZ14] F. Perroni and D.-Q. Zhang. Pseudo-automorphisms of positive entropy on the blowups of products of projective spaces. *Math. Ann.*, 359(1-2) :189–209, 2014.

[Rit23] J. F. Ritt. Permutable rational functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 25(3) :399–448, 1923.

[RS97] A. Russakovskii and B. Shiffman. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3) :897–932, 1997.

[ŠAV+65] I. R. Šafarevič, B. G. Averbuh, Ju. R. Vaĭnberg, A. B. Žižčenko, Ju. I. Manin, B. G. Moĭšezon, G. N. Tjurina, and A. N. Tjurin. Algebraic surfaces. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 75 :1–215, 1965.

[Ser10] J.-P. Serre. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis. *Astérisque*, (332) :Exp. No. 1000, vii, 75–100, 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.

[Sil91] J. H. Silverman. Rational points on $K3$ surfaces : a new canonical height. *Invent. Math.*, 105(2) :347–373, 1991.

[SU04] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(1) :197–227 (electronic), 2004.

[Tru12] T. T. Truong. On automorphisms of blowups of $\mathbb{P}^3$, `arXiv:1202.4224`. 2012.

[vdE00] A. van den Essen. *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, volume 190 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[Wan95] L. Wang. Rational points and canonical heights on $K3$-surfaces in $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. In *Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993)*, volume 186 of *Contemp. Math.*, pages 273–289. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Yom87] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.