SUR LES SOUS-GROUPES NILPOTENTS DU GROUPE DE CREMONA

par

Julie Déserti

Résumé. — We describe the nilpotent subgroups of the group $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ of birational transformations of the complex projective plane. Let N be a nilpotent subgroup of class $k > 1$ and ρ an embedding from N to $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; then either each element of N has finite order, or N is virtually metabelian.

1. Introduction

Dans [**8**] Ghys montre que *tout sous-groupe nilpotent de* $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ *est métabélien* et en déduit que *si* Γ *est un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z})$*, avec* $n \geq 4$*, alors tout morphisme de* Γ *dans* $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ *est d'image finie.* Nous étudions ici, via des techniques complètement différentes, les sous-groupes nilpotents du groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe ; ce groupe, que nous noterons $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, est aussi appelé groupe de Cremona.

Soit G un groupe nilpotent ; posons $\mathsf{G}^{(0)} := \mathsf{G}$ et $\mathsf{G}^{(i)} := [\mathsf{G}, \mathsf{G}^{(i-1)}]$ pour $i \geq 1$. On appelle longueur de G le plus petit entier k pour lequel $\mathsf{G}^{(k)} = \{\mathsf{id}\}$. Nous dirons qu'un groupe est nilpotent fortement de longueur k (n. f. de longueur k) s'il est nilpotent de longueur k et non virtuellement de longueur $k-1$. Rappelons qu'un groupe G est métabélien si son premier groupe dérivé $[\mathsf{G}, \mathsf{G}]$ est abélien et que le groupe de de Jonquières est le sous-groupe des transformations birationnelles qui préservent la fibration rationnelle $y = \text{cte}$ (*voir* 2.1).

Théorème 1.1. — *Soient* N *un groupe n. f. de longueur* $k > 1$ *et* ρ *un morphisme injectif de* N *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$*. Le groupe* N *vérifie l'une des propriétés suivantes :*

- N *est virtuellement métabélien ;*
- N *est de torsion.*

Mots clefs. — Birational transformations, nilpotent groups. *Classification* : 14E07 (primary), 20D15 (secondary).

Corollaire 1.2. — *Soit* G *un groupe contenant un sous-groupe n. f. de longueur* $k > 1$ *sans torsion et non virtuellement métabélien. Alors il n'existe pas de représentation fidèle de* G *dans le groupe de* CREMONA.

En particulier nous avons, dans l'esprit de **[14]**, la conséquence suivante : *soit* Γ *un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z})$ *; dès que* $n \geq 5$ *le groupe* Γ *ne se plonge pas dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Notons que nous avions obtenu un résultat plus précis ($n \geq 4$) dans **[5]** mais en utilisant des techniques plus complexes.

2. Quelques rappels

2.1. Sur le groupe de DE JONQUIÈRES. — Si f_S est une famille de transformations birationnelles, alors $\langle f_S \rangle$ est le groupe engendré par la famille f_S. Dans une carte affine (x, y) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, si f est un élément de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ nous notons f par ses deux composantes $(f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Tout groupe de transformations birationnelles qui préserve une fibration rationnelle est isomorphe au groupe J de DE JONQUIÈRES, *i.e.* isomorphe à $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})$.

2.2. Dynamique et distorsion. — Soit X une surface complexe compacte. Le premier degré dynamique d'une transformation birationnelle $f : X \dashrightarrow X$ est défini par :

$$\lambda(f) := \limsup_{n \to +\infty} |(f^n)^*|^{1/n}$$

où f^* désigne l'application linéaire induite par f de $\mathsf{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ dans lui-même (**[6]**) et $|\,.\,|$ une norme sur $\mathsf{End}(\mathsf{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}))$. Ce nombre est minoré par 1 (*voir* **[7, 12]**).

Définition. — Soit S une surface complexe compacte. La transformation birationnelle $f : S \dashrightarrow S$ est dite virtuellement isotope à l'identité s'il existe une surface X, une transformation birationnelle $\eta : S \dashrightarrow X$ et un entier $k > 0$ tels que $\eta f^k \eta^{-1}$ soit un automorphisme de X isotope à l'identité.
Deux transformations birationnelles f et g sur S sont dites simultanément virtuellement isotopes à l'identité si le couple (η, X) est commun à f et g.

Rappelons le résultat suivant dû à DILLER et FAVRE.

Théorème 2.1 **([6], théorème 0.2).** — *Soit* f *une transformation birationnelle. Supposons que* $\lambda(f) = 1$ *; alors* f *satisfait une et une seule des conditions suivantes :*
- *la suite* $|(f^n)^*|$ *est bornée et* f *est virtuellement isotope à l'identité ;*
- *la suite* $|(f^n)^*|$ *est à croissance linéaire,* f *laisse une unique fibration rationnelle invariante et n'est pas conjuguée à un automorphisme ;*
- *la suite* $|(f^n)^*|$ *est à croissance quadratique et* f *est, à conjugaison birationnelle près, un automorphisme qui préserve une unique fibration elliptique.*

Définition. — Soient G un groupe de type fini, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie génératrice de G et f un élément de G.

(i) La longueur de f, notée $\|f\|$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une suite $(s_1, \ldots, s_k)$ d'éléments de $\{a_1, \ldots, a_n, a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\}$ telle que $f = s_1 \ldots s_k$.

(ii) La quantité $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|f^k\|/k$ est la longueur stable de f (*voir* [**4**]).

(iii) Un élément f de G est distordu s'il est d'ordre infini et si sa longueur stable est nulle.

Remarque 2.2. — Soit $\langle \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h} \mid [\mathsf{f}, \mathsf{h}] = [\mathsf{g}, \mathsf{h}] = \mathsf{id},\ [\mathsf{f}, \mathsf{g}] = \mathsf{h}\rangle$ un groupe de Heisenberg ; le générateur h est distordu.

Lemme 2.3 ([**5**]). — *Soient f un élément distordu d'un groupe de type fini G et τ un morphisme de G dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Le premier degré dynamique de $\tau(f)$ vaut 1.*

2.3. Automorphismes isotopes à l'identité et surfaces minimales. —

Lemme 2.4 ([**5**]). — *Soient f et g deux transformations birationnelles sur une surface S virtuellement isotopes à l'identité. Supposons que f et g commutent ; alors f et g sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité.*

Remarque 2.5. — Un automorphisme f d'une surface S isotope à l'identité fixe chaque courbe d'auto-intersection négative ; pour toute suite de contractions ψ de S vers un modèle minimal X de S, l'élément $\psi f \psi^{-1}$ est donc un automorphisme de X isotope à l'identité.

Rappelons que les surfaces rationnelles minimales sont $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et les surfaces de Hirzebruch F_n, $n \geq 2$. Dans des cartes affines bien choisies $\mathsf{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ coïncide avec

$$(\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})) \rtimes (y, x)$$

et $\mathsf{Aut}(\mathsf{F}_n)$ se décrit, pour $n \geq 2$, comme suit ([**1**] chapitre 5, [**11**]) :

$$\left\{ \left(\frac{\alpha x + P(y)}{(cy+d)^n}, \frac{ay+b}{cy+d} \right) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}),\ \alpha \in \mathbb{C}^*,\ P \in \mathbb{C}[y],\ \deg P \leq n \right\}.$$

3. Sous-groupes nilpotents de groupes d'automorphismes de surfaces minimales

Dans la suite du texte, chaque fois que nous dirons que N est contenu dans le groupe de de Jonquières il sera sous-entendu que c'est à conjugaison près.

Proposition 3.1. — *Soient N un sous-groupe n. f. de longueur k de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ et S une surface rationnelle minimale. Supposons que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ ne soit pas de torsion et soit, à conjugaison birationnelle près, un sous-groupe de $\mathsf{Aut}(S)$. Alors N est, à conjugaison birationnelle et indice fini près, contenu dans le groupe de* de Jonquières.

Avant de démontrer cette proposition rappelons l'énoncé suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises :

Théorème 3.2 **(Théorème de Kolchin-Chevalley).** — *Soient* G *un sous-groupe de* Lie *algébrique de* $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* g *un élément de* G*. Les parties semi-simple et unipotente de* g *appartiennent à* G*.*

Démonstration. — Remarquons que, puisque N n'est pas virtuellement de longueur $k-1$, le groupe $\mathsf{N}^{(k-1)}$ n'est pas fini.

1. Commençons par considérer le cas où $S=\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Le groupe $\mathsf{N}^{(k-1)}$ est, à conjugaison près, contenu dans l'un des groupes suivants :

a. $\{(x+\alpha,y+\beta)\mid \alpha,\ \beta\in\mathbb{C}\}$; *c.* $\{(\alpha x,y+\beta)\mid \alpha\in\mathbb{C}^*,\ \beta\in\mathbb{C}\}$;

b. $\{(\alpha x,\beta y)\mid \alpha,\ \beta\in\mathbb{C}^*\}$; *d.* $\{(\alpha x+\beta y,\alpha y)\mid \alpha\in\mathbb{C}^*,\beta\in\mathbb{C}\}$.

Nous allons considérer ces éventualités au cas par cas.

1.a. Soient $g=(x+\alpha,y+\beta)$ un élément non trivial de $\mathsf{N}^{(k-1)}$ et f une transformation birationnelle qui commute à g. Quitte à conjuguer g par (y,x) nous pouvons supposer que $\alpha\neq 0$; alors f commute, à conjugaison près, à $(x+1,y+\beta)$ et est donc du type $(x+b(y),\nu(y))$. Il en résulte que N est un sous-groupe de :

$$\{(x+b(y),\nu(y))\mid b\in\mathbb{C}(y),\ \nu\in\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})\}\subset\mathsf{J}.$$

1.b. Supposons que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ contienne un élément $(\alpha x,\beta y)$ non périodique ; soit h une fonction rationnelle satisfaisant $h(\alpha x,\beta y)=h(x,y)$. Si α et β sont « non résonants », alors h est constante. S'il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\alpha^p\beta^q=1$, la fonction h est invariante par $\overline{\langle(\alpha x,\beta y)\rangle}^{\mathsf{Z}}$, où l'adhérence est prise au sens de Zariski ; ce groupe est engendré par le flot du champ :

$$\chi:=qx\frac{\partial}{\partial x}-py\frac{\partial}{\partial y}.$$

Les niveaux de h sont les trajectoires de χ donc $h=h(x^py^q)$. Nous en déduisons ce qui suit.
Soit $f=(f_1,f_2)$ une transformation birationnelle qui commute à $(\alpha x,\beta y)$; alors f commute à $\overline{\langle(\alpha x,\beta y)\rangle}^{\mathsf{Z}}$. Si α et β sont « non résonants », f est de la forme $(\gamma x,\delta y)$ et N est contenu dans le groupe de de Jonquières. S'il existe p et q deux entiers premiers entre eux tels que $\alpha^p\beta^q=1$, alors f commute à tous les $(\lambda x,\mu y)$ satisfaisant $\lambda^p\mu^q=1$, *i.e.* f est du type $(xa(x^py^q),yb(x^py^q))$. Les entiers p et q étant premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que $uq-pv=1$. À conjugaison près par (x^uy^v,x^py^q) la transformation f est de la forme $(c(y)x,\nu(y))$; par suite N est un sous-groupe de J.
Supposons que tous les éléments de $\mathsf{N}^{(k-1)}$ soient périodiques ; comme $\mathsf{N}^{(k-1)}$ n'est pas fini, nous parvenons au même résultat en considérant l'adhérence de Zariski de $\mathsf{N}^{(k-1)}$.

1.c. Le groupe $\mathsf{N}^{(k-1)}$ n'étant pas fini, nous avons l'alternative suivante :

– $\mathsf{N}^{(k-1)}$ contient un élément de la forme $(\alpha x, y+\beta)$ avec $\beta \neq 0$;
– $\{\alpha \in \mathbb{C}^* \mid (\alpha x, y) \in \mathsf{N}^{(k-1)}\}$ n'est pas fini.

Considérons le premier cas. Soit f dans N ; le groupe $G = \{g \in \mathsf{N}^{(k-1)} \mid fg = gf\}$, qui contient $(\alpha x, y+\beta)$, s'identifie à un sous-groupe algébrique d'un groupe linéaire. Le théorème de Kolchin-Chevalley assure alors que f commute à $(x, y+\frac{\beta}{\alpha})$; ainsi f est du type $(\nu(x), y+b(x))$ et

$$\mathsf{N} \subset \{(\nu(x), y+b(x)) \mid \nu \in \mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}),\ b \in \mathbb{C}(x)\} ;$$

quitte à conjuguer par (y, x) nous constatons que N est inclus dans J.

Pour la deuxième éventualité, voir *1.b.*

1.d. Puisque $\mathsf{N}^{(k-1)}$ n'est pas fini, nous avons l'alternative suivante :

– ou bien $\mathsf{N}^{(k-1)}$ contient un élément du type $(\alpha x+\beta y, \alpha y)$ avec $\beta \neq 0$;
– ou bien $\{\alpha \in \mathbb{C}^* \mid (\alpha x, \alpha y) \in \mathsf{N}^{(k-1)}\}$ n'est pas fini.

Considérons la première éventualité ; le théorème de Kolchin-Chevalley assure encore qu'un élément qui commute à $(\alpha x+\beta y, \alpha y)$ commute à $(x+\frac{\beta}{\alpha}y, y)$. Nous en déduisons que N est un sous-groupe de J.

Dans le second cas nous obtenons, par *1.b.*, que N est contenu dans le groupe de de Jonquières.

2. Etudions le cas où $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. À indice fini près, nous pouvons supposer que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ est un sous-groupe abélien de $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})$; il en résulte que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ est inclus, à conjugaison près, dans l'un des groupes suivants :

$$\{(x+\alpha, y+\beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}\}, \qquad \{(\alpha x, y+\beta) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \beta \in \mathbb{C}\}, \qquad \{(\alpha x, \beta y) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}^*\} ;$$

le *1.* permet donc de conclure.

3. Pour finir nous nous intéressons au cas $S = \mathsf{F}_n$, $n \geq 2$. Notons π la projection de $\mathsf{Aut}(\mathsf{F}_n)$ sur $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})$; puisque le groupe $\pi(\mathsf{N}^{(k-1)})$ est abélien, nous pouvons supposer, à indice fini près, que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ est contenu dans l'un des groupes suivants :

a. $\{(\alpha x+P(y), y) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*,\ P \in \mathbb{C}[y]\}$;
b. $\{(\alpha x+P(y), y+\beta) \mid \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \beta \in \mathbb{C},\ P \in \mathbb{C}[y]\}$;
c. $\{(\alpha x+P(y), \beta y) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}^*,\ P \in \mathbb{C}[y]\}$;

Considérons chacune de ces éventualités.

3.a. Supposons que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ soit un sous-groupe de $\{(x+P(y), y) \mid P \in \mathbb{C}[y]\}$. Soit g dans $\mathsf{N}^{(k-1)} \setminus \{\mathsf{id}\}$; à conjugaison près, g s'écrit $(x+1, y)$ et *1.a.* permet de conclure.
Supposons que $\mathsf{N}^{(k-1)}$ contienne un élément g de la forme $(\alpha x+P(y), y)$ avec $\alpha \neq 1$. Si α est d'ordre fini q, alors g^q est du type $(x+Q(y), y)$ et nous concluons comme précédemment.

Si α est d'ordre infini, g est conjugué à $(\alpha x, y)$ et *1.c.* assure que N est inclus dans le groupe de DE JONQUIÈRES.

3.b. Un élément $(\alpha x+P(y), y+\beta)$ de $\mathsf{N}^{(k-1)}$, avec $\beta\neq 0$, est conjugué à $(\alpha x, y+\beta)$; par *1.c.* nous obtenons donc que N est un sous-groupe de J.

3.c. Si $\{\beta\in\mathbb{C}^*\mid \beta y\in\pi(\mathsf{N}^{(k-1)})\}$ est fini, il existe dans $\mathsf{N}^{(k-1)}$ un élément de la forme $(\alpha x+P(y), y)$ et *3.a.* permet de conclure. Supposons donc que g désigne un élément de $\mathsf{N}^{(k-1)}$ du type $(\alpha x+P(y), \beta y)$ avec β d'ordre infini. Si $\beta^i-\alpha\neq 0$ pour tout $0\leq i\leq \deg P$, la transformation g est conjuguée à $(\alpha x, \beta y)$ et, par *1.b.*, nous avons le résultat annoncé. Reste à considérer le cas où il existe un unique i tel que $\beta^i-\alpha=0$ (l'unicité résulte du fait que β est d'ordre infini) ; g est alors conjugué à $(\beta^i x+\gamma y^i, \beta y)$. Il s'en suit qu'une transformation birationnelle qui commute à g commute à $(\beta^i x, \beta y)$ (théorème de KOLCHIN-CHEVALLEY appliqué dans les espaces de jets) ; nous concluons à l'aide de *1.b.* □

4. Dynamique et groupes nilpotents de génération finie

Nous allons utiliser le résultat suivant dû à CANTAT :

Théorème 4.1 **([3])**. — *Soit f une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte S dont le premier degré dynamique est strictement plus grand que 1. Si g est une transformation birationnelle de S qui commute avec f il existe deux entiers $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{Z}$ tels que $g^m=f^n$.*

Lemme 4.2. — *Soient N un groupe nilpotent non abélien de longueur de nilpotence k et ρ un morphisme injectif de N dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Nous sommes dans l'une des situations suivantes :*
- *ou bien pour tout g dans $\rho(\mathsf{N})$, nous avons $\lambda(g)=1$;*
- *ou bien $\mathsf{N}^{(k-1)}$ est de torsion.*

Démonstration. — Soient f dans N et g dans $\mathsf{N}^{(k-2)}$; considérons l'élément h défini par $\mathsf{h}=[\mathsf{f},\mathsf{g}]$. Supposons que h soit non périodique. Puisque N est de longueur de nilpotence k, nous avons $[\mathsf{f},\mathsf{h}]=[\mathsf{g},\mathsf{h}]=\mathsf{id}$. La remarque 2.2 et le lemme 2.3 assurent que le premier degré dynamique de $\rho(\mathsf{h})$ vaut 1. Montrons que pour tout ℓ dans N, nous avons $\lambda(\rho(\ell))=1$. La transformation $\rho(\mathsf{h})$ satisfait l'alternative suivante ([6]) :
- $\rho(\mathsf{h})$ préserve une unique fibration rationnelle ou elliptique ;
- $\rho(\mathsf{h})$ est virtuellement isotope à l'identité.

Dans le premier cas, $\rho(\ell)$ laisse, par commutation, une fibration invariante donc $\rho(\ell)$ est de premier degré dynamique 1. Considérons la seconde éventualité ; plaçons nous sur la surface S où $\rho(\mathsf{h})$ est un automorphisme et notons encore $\rho(\mathsf{h})$ (resp. $\rho(\ell)$) le conjugué de $\rho(\mathsf{h})$ (resp. $\rho(\ell)$). Supposons $\lambda(\rho(\ell))>1$. Notons $G=\overline{\langle\rho(\mathsf{h})\rangle}^{\mathsf{Z}}\subset\mathsf{Aut}(S)$; comme $\rho(\mathsf{h})$ est d'ordre infini G est un groupe de LIE abélien qui commute à $\rho(\ell)$ ce qui est exclu d'après le théorème 4.1.

Supposons que tous les commutateurs du type $[f,g]$ où f désigne un élément de $\rho(\mathsf{N})$ et g un élément de $\rho(\mathsf{N}^{(k-2)})$ soient périodiques ; alors $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$ étant abélien, il est de torsion. $\square$

Exemples. — *1.* Posons $H_0 = \langle(-x,-y)\rangle$ et pour tout $j \geq 1$:

$$\alpha_j = \beta_j = \exp(\mathrm{i}\pi/2^j), \qquad g_j = (y, c_j y^{2j+1} + x),$$
$$\varphi_j = g_1^2 \circ \ldots \circ g_j^2, \qquad H_j = \varphi_j \langle(\alpha_j x, \beta_j y)\rangle \varphi_j^{-1}$$

où c_j appartient à $\mathbb{C}^*$. Alors $H = \cup_{j \geq 0} H_j$ est un groupe abélien dénombrable dont tous les éléments sont périodiques ([**9, 13**]).

2. Le groupe $\mathsf{N} = \langle(\exp(-2\mathrm{i}\pi/p)x, y), (x, xy), (x, \exp(2\mathrm{i}\pi/p)y)\rangle$ est nilpotent de longueur 2 et $\mathsf{N}^{(1)} = \langle(x, \exp(2\mathrm{i}\pi/p)y)\rangle$ est de torsion.

Lemme 4.3. — *Soient* N *un groupe n. f. de longueur* $k > 1$ *et* ρ *un morphisme injectif de* N *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$*. Supposons que* $\mathsf{N}^{(k-1)}$ *ne soit pas de torsion. Le groupe* $\rho(\mathsf{N})$ *satisfait l'une des propriétés suivantes :*

- *ou bien* $\rho(\mathsf{N})$ *préserve une fibration rationnelle ou elliptique ;*
- *ou bien les éléments de* $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$ *sont virtuellement isotopes à l'identité.*

Démonstration. — Soit h un élément non trivial de $\mathsf{N}^{(k-1)}$; le lemme 4.2 assure que $\lambda(\rho(h)) = 1$. D'après [**6**] ou bien $\rho(h)$ est virtuellement isotope à l'identité, ou bien $\rho(h)$ préserve une unique fibration $\mathcal{F}$ rationnelle ou elliptique. Plaçons nous dans cette seconde éventualité ; comme $\rho(\mathsf{N})$ commute à $\rho(h)$, tout élément de $\rho(\mathsf{N})$ préserve $\mathcal{F}$ (c'est l'unicité). $\square$

Rappelons que tout sous-groupe d'un groupe nilpotent de génération finie est nilpotent de génération finie ([**10**], théorème 9.16).

Proposition 4.4. — *Soit* N *un groupe n. f. de longueur* k *non abélien et de génération finie. Soit* ρ *un morphisme injectif de* N *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$*. Supposons que* $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$ *ne soit pas de torsion et que ses éléments soient virtuellement isotopes à l'identité ; alors* $\rho(\mathsf{N})$ *est, à indice fini et conjugaison près, contenu dans le groupe de* DE JONQUIÈRES.

Démonstration. — Le groupe $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$ est de génération finie ; notons $\{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie génératrice de $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$. Comme $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$ est abélien le lemme 2.4 assure que les a_i sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité. D'après la remarque 2.5 le groupe $\langle a_1^q, \ldots, a_n^q\rangle$ est, pour un certain entier q (entier pour lequel les a_i^q sont isotopes à l'identité), contenu dans le groupe d'automorphismes d'une surface rationnelle minimale à conjugaison près ; la proposition 3.1 permet de conclure. $\square$

Proposition 4.5. — *Soient* N *un groupe n. f. de longueur* $k > 1$ *de génération finie et* ρ *un morphisme injectif de* N *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$*. Supposons que* $\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})$ *soit de torsion. Alors* $\rho(\mathsf{N})$ *vérifie l'une des propriétés suivantes :*

– $\rho(\mathsf{N})$ *laisse une fibration elliptique ou rationnelle invariante ;*
– $\rho(\mathsf{N})$ *est fini.*

Démonstration. — Le groupe $\mathsf{N}^{(k-1)}$ est un groupe abélien, de génération finie, dont tous les éléments sont périodiques donc fini. Il existe une surface M et une transformation birationnelle $\eta : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow M$ telles que $\eta\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})\eta^{-1}$ soit inclus dans $\mathsf{Aut}(M)$. Soit S le quotient de M par $\eta\rho(\mathsf{N}^{(k-1)})\eta^{-1}$; notons $\tilde{S}$ la désingularisée de S. La surface $\tilde{S}$ est unirationnelle donc rationnelle (*voir* [**2**]). Par suite $\mathsf{N}_1 := \mathsf{N}/\mathsf{N}^{(k-1)}$ se plonge dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; notons ρ_1 ce plongement. Le groupe N_1 est nilpotent de longueur de nilpotence $k-1$. D'après le lemme 4.2 nous avons l'alternative suivante :

a. pour tout g dans N_1 nous avons $\lambda(\rho_1(g)) = 1$;
b. $\mathsf{N}_1^{(k-2)}$ est de torsion.

a. D'après le lemme 4.3 et la proposition 4.4, le groupe $\rho_1(\mathsf{N}_1)$ préserve une fibration elliptique ou rationnelle ; montrons qu'il en est de même pour $\rho(\mathsf{N})$. Notons p la projection de M sur S et F la fibration invariante par $\rho_1(\mathsf{N}_1)$. La fibration $\mathcal{F} = F \circ p$ est invariante par $\rho(\mathsf{N})$; à tout élément f de $\rho(\mathsf{N})$ nous pouvons donc associer ν_f dans $\mathsf{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ satisfaisant : $\mathcal{F} \circ f = \nu_f \circ \mathcal{F}$. Soit ν le morphisme défini par :

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \rho(\mathsf{N}) & \to & \mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}) \\ & f & \mapsto & \nu_f \end{array}$$

Comme $\rho(\mathsf{N})$ n'est pas virtuellement abélien, $\ker \nu$ n'est pas fini ; la fibre générique de $\mathcal{F}$ a donc un groupe d'automorphismes non fini. Il en résulte que $\mathcal{F}$ est rationnelle ou elliptique.

b. Si $\mathsf{N}_1^{(k-2)}$ est de torsion, $\mathsf{N}_2 = \mathsf{N}_1/\mathsf{N}_1^{(k-2)}$ se plonge dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$; notons ρ_2 ce plongement. Nous pouvons alors reprendre le même raisonnement... ainsi :

– ou bien il existe $1 \leq i \leq k-1$ tel que $\rho_i(\mathsf{N}_i)$ soit virtuellement contenu dans le groupe de DE JONQUIÈRES et, par suite, $\rho(\mathsf{N})$ l'est aussi ;
– ou bien N_{k-1} est de torsion donc fini et N aussi.

□

5. Conclusion

Remarque 5.1. — Un sous-groupe nilpotent non fini de $\mathsf{PGL}_2(\mathbf{k})$, avec $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}(y)$, est nécessairement virtuellement abélien.

Avant de donner une preuve du théorème 1.1 nous établissons un énoncé pour les sous-groupes nilpotents, non abéliens et de génération finie de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$.

Théorème 5.2. — *Soient* N *un groupe n. f. de longueur* k *non abélien, de génération finie et* ρ *un morphisme injectif de* N *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. *Le groupe* $\rho(\mathsf{N})$ *vérifie l'une des propriétés suivantes :*

– $\rho(\mathsf{N})$ *préserve une fibration elliptique ou rationnelle ;*
– $\rho(\mathsf{N})$ *est fini.*

Démonstration. — L'énoncé découle des lemmes 4.2, 4.3, des propositions 4.4 et 4.5. □

Nous allons, pour finir, démontrer le théorème 1.1.

Démonstration du théorème 1.1. — Notons k la longueur de nilpotence de $\rho(\mathsf{N})$. Considérons Σ l'ensemble des sous-groupes n. f. de longueur k et de génération finie de $\rho(\mathsf{N})$. Si tous les éléments de Σ sont finis alors $\rho(\mathsf{N})$ est de torsion ; sinon Σ contient un élément G qui ne soit pas fini. D'après le théorème 5.2, $\rho(\mathsf{G})$ préserve une fibration elliptique ou rationnelle $\mathcal{F}$. Dans les deux cas les éléments de $\rho(\mathsf{G}^{(k-1)})$ préservent $\mathcal{F}$ fibre à fibre. Soit f dans $\rho(\mathsf{G}^{(k-1)})$; en utilisant la commutation de f à $\rho(\mathsf{N})$ nous observons l'alternative suivante :

– $\rho(\mathsf{N})$ laisse aussi la fibration $\mathcal{F}$ invariante,
– f préserve deux fibrations distinctes fibre à fibre.

On constate que dans le premier cas N est virtuellement métabélien. En effet un groupe de transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui préservent une fibration elliptique est virtuellement métabélien. Si $\mathcal{F}$ est rationnelle, alors $\rho(\mathsf{N})$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de J. Notons π la projection de J sur $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})$; le groupe $\pi(\rho(\mathsf{N}))$ est un sous-groupe nilpotent de $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C})$, il est donc virtuellement abélien (remarque 5.1) : nous pouvons donc supposer que $\pi(\rho(\mathsf{N}^{(i)})) = \{\mathsf{id}\}$ pour $1 \leq i \leq k$. En particulier $\mathsf{N}^{(1)}$ est un sous-groupe nilpotent de $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{C}(y))$, il est donc virtuellement abélien (toujours par la remarque 5.1).

Dans la seconde éventualité f est périodique. Si cela a lieu pour tout choix de f dans $\mathsf{G}^{(k-1)}$ alors G est virtuellement de longueur $k-1$. □

Exemple. — Les groupes suivants sont des sous-groupes nilpotents non abéliens et non finis de J :

$$\langle (x+\alpha\beta, y),\ (x+\alpha y, y),\ (x, y+\beta)\rangle,$$

$$\langle (x+1, y),\ (x+y, y),\ (x+a(y), y-1)\rangle$$

où α, β appartiennent à $\mathbb{C}^*$ et a à $\mathbb{C}(y)$.

Remerciements. Je remercie S. Cantat et D. Cerveau pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Merci à Y. de Cornulier et au referee pour leurs remarques et suggestions.

Références

[1] *Algebraic surfaces.* By the members of the seminar of I. R. Šafarevič. Translated from the Russian by Susan Walker. Translation edited, with supplementary material, by K. Kodaira and D. C. Spencer. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 75 (1965). American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.

[2] A. Beauville. *Surfaces algébriques complexes.* Société Mathématique de France, Paris, 1978. Avec une sommaire en anglais, Astérisque, No. 54.

[3] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *preprint*, 2006.

[4] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[5] J. Déserti. Groupe de Cremona et dynamique complexe: une approche de la conjecture de Zimmer. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 71701, 27, 2006.

[6] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6):1135–1169, 2001.

[7] S. Friedland. Entropy of algebraic maps. In *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, number Special Issue, pages 215–228, 1995.

[8] É. Ghys. Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 24(2):137–178, 1993.

[9] S. Lamy. Automorphismes polynomiaux du plan complexe : étude algébrique et dynamique. *Thèse, Université de Rennes 1*, 2000.

[10] I. D. Macdonald. *The theory of groups.* Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, 1988. Reprint of the 1968 original.

[11] M. Nagata. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32:351–370, 1960.

[12] A. Russakovskii and B. Shiffman. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3):897–932, 1997.

[13] D. Wright. Abelian subgroups of $\mathrm{Aut}_k(k[X, Y])$ and applications to actions on the affine plane. *Illinois J. Math.*, 23(4):579–634, 1979.

[14] R. J. Zimmer. Actions of semisimple groups and discrete subgroups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 1247–1258, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.

Julie Déserti • *E-mail :* `julie.deserti@univ-rennes1.fr`, IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France