GROUPE DE CREMONA ET DYNAMIQUE COMPLEXE

par

Julie DÉSERTI

Abridged English version

Let $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ be the group of birational transformations of the complex projective plane also named CREMONA group. In our study of this group we prove a result related to the ZIMMER program ([**16**]):

Theorem 0.1. — *Let G be a simple algebraic subgroup over $\mathbf{Q}$ with $\mathbf{Q}$-rank $(G) = r$. Let Γ be a subgroup of finite index in $G(\mathbf{Z})$ and $\rho :\ \Gamma \to \mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ a morphism. If ρ has infinite image, then $r \leq 2$.*

If $r = 2$ and ρ has infinite image, then the $\mathbf{Q}$-root system of G contains a root system of type A_2; in this case $\rho(\Gamma)$ is, up to conjugacy, a subgroup of $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$.

For our purpose the following observation, used by WITTE in [**15**], is crucial: the $\mathbf{Q}$-root system of G contains a root system of type A_2 or B_2. So we only have to study morphisms from a subgroup of finite index in $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ (resp. $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$) to $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.

Theorem 0.2. — *Let Γ be a subgroup of finite index in $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ and ρ an embedding from Γ to $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Then, up to conjugacy, ρ is the canonical embedding or the involution $u \mapsto {}^{\mathrm{t}}(u^{-1})$.*

We also obtain that *there is no embedding from a subgroup of finite index in $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ to $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.*

The proofs of the two last results are “similar”. The main ingredients are the presence of HEISENBERG subgroups in $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ and $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$, we use this to prove that the first dynamical degree of the image of each “standard generator”of Γ is equal to 1; so we can use the results of DILLER and FAVRE ([**7**]), CANTAT and LAMY ([**4**]).

1. Introduction

Les techniques de dynamique complexe permettent parfois d'établir des propriétés algébriques pour certains groupes de transformations, c'est le cas dans [**3**], [**4**], [**8**] et [**12**] ; il en va ainsi pour cette note.

Afin de généraliser les travaux de Margulis sur les représentations linéaires des réseaux de groupes de Lie réels simples ([**13**]) aux représentations non linéaires, Zimmer propose d'étudier les actions des réseaux sur les variétés compactes ([**16**]). L'une des conjectures principales dans ce programme est la suivante : *soient G un groupe de* Lie *réel simple connexe et Γ un réseau de G ; s'il existe un morphisme d'image infinie de Γ dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte M, le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension de M.*

Rappelons quelques résultats obtenus dans cette direction. En 1993, Ghys étudie les groupes engendrés par des difféomorphismes analytiques réels proches de l'identité sur une variété compacte ; il obtient en particulier que *tout sous-groupe nilpotent de $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ est métabélien* et que *si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$, avec $n \geq 4$, alors tout morphisme de Γ dans $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ est d'image finie* ([**10**]). Dans [**15**], Witte considère un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique $\mathbf{Q}$-simple de $\mathbf{Q}$-rang supérieur ou égal à 2 et Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$; il montre qu'*il n'existe pas de relation d'ordre total sur Γ préservée par la multiplication à droite.* Il en déduit que *toute action continue de Γ sur $\mathbb{S}^1$ ou sur la droite réelle est d'image finie.* Le théorème de Witte s'applique à une classe restreinte de réseaux, classe dont il est question ici, contrairement à l'énoncé qui suit dû à Ghys ([**11**]). *Soit G un groupe de* Lie *semi-simple, connexe, de rang réel supérieur ou égal à 2 et n'ayant pas de facteur simple isomorphe à $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})$. Si Γ est un réseau irréductible de G et ρ un morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{S}^1$ qui préservent l'orientation, alors l'image de ρ est finie.* Un cas particulier de cet énoncé a été démontré par Burger et Monod lors de leur étude de la cohomologie bornée des réseaux ([**2**]).

Notons $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe encore appelé groupe de Cremona. Dans l'esprit des énoncés précédents, nous montrons le :

Théorème 1.1. — *Soit G un $\mathbf{Q}$-groupe algébrique $\mathbf{Q}$-simple de $\mathbf{Q}$-rang r. Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si ρ est d'image infinie, alors $r \leq 2$.*

De plus, si $r = 2$ et ρ est d'image infinie, alors G possède un système de $\mathbf{Q}$-racines de type A_2 et l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$, le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$.

Supposons $r \geq 3$. Reprenons un argument utilisé par Witte dans [**15**] ; puisque G est simple, son système de $\mathbf{Q}$-racines possède un sous-système irréductible de rang 3, *i.e.* un système de racines de type A_3, B_3 ou C_3 (*voir* [**1**], page 197, théorème 3). Or C_3 (resp. B_3) possède un sous-système de type A_3 (resp. B_2) donc le système de $\mathbf{Q}$-racines de G possède un sous-système de type A_3 ou B_2. Commençons par supposer qu'il s'agit d'un sous-système de type A_3. Dans ce cas Γ contient un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$; si G possède un sous-système de type B_2, alors Γ contient un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude des morphismes d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$ et de $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.

Théorème 1.2. — *Soient* Γ *un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ *et* ρ *un morphisme injectif de* Γ *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. *Alors* ρ *coïncide, à conjugaison près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution* $u \mapsto {}^{\mathrm{t}}(u^{-1})$.

Théorème 1.3. — *Il n'existe pas de morphisme injectif d'un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ *dans le groupe de* CREMONA.

Comme conséquence du théorème 1.1 nous obtenons le :

Corollaire 1.4. — *Soit* G *un* $\mathbf{Q}$*-groupe algébrique* $\mathbf{Q}$*-simple de* $\mathbf{Q}$*-rang supérieur ou égal à* 3. *Soient* Γ *un sous-groupe d'indice fini de* $G(\mathbf{Z})$ *et* S *une surface kählerienne compacte. Tout morphisme de* Γ *dans le groupe des transformations birationnelles de* S *est d'image finie.*

Nous donnons ici une esquisse de preuve des théorèmes 1.1 et 1.2, la démarche pour le théorème 1.3 étant similaire à celle du théorème 1.2. L'idée est la suivante : la présence de nombreux groupes de HEISENBERG dans Γ, sur laquelle s'appuient aussi FRANKS et HANDEL dans [**9**], assure que tout « générateur standard » de Γ est distordu. Après avoir remarqué que le premier degré dynamique d'un élément distordu vaut 1, nous pouvons combiner les idées de [**7**] aux résultats de [**4**]. Les détails paraîtront ultérieurement.

Notations. Si M désigne une variété complexe alors $\mathsf{Aut}(M)$ est le groupe des automorphismes de M ; nous notons $\mathsf{Aut}[\mathbf{C}^2]$ le groupe des automorphismes polynomiaux du plan complexe.

2. Représentations des groupes de Heisenberg

Soit k un entier. Nous appellerons *k-groupe de* HEISENBERG le groupe défini par la présentation : $\mathcal{H}_k = \langle \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h} \mid [\mathsf{f}, \mathsf{h}] = [\mathsf{g}, \mathsf{h}] = \mathsf{id},\ [\mathsf{f}, \mathsf{g}] = \mathsf{h}^k \rangle$. Par convention $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$; c'est le groupe de HEISENBERG des matrices 3×3 à coefficients entiers. Remarquons que $\mathcal{H}_{k^2}$ est inclus dans $\mathcal{H}_k \ldots$ Soit X une surface complexe compacte. La transformation birationnelle $f : X \dashrightarrow X$ est dite *virtuellement isotope à l'identité* s'il existe une transformation birationnelle $\eta : X \dashrightarrow \tilde{X}$ et un entier $n > 0$ tels que $\eta f^n \eta^{-1}$ soit un automorphisme de $\tilde{X}$ isotope à l'identité.

A l'aide de techniques de dynamique complexe nous montrons la :

Proposition 2.1. — *Soit* ς *une représentation de* $\mathcal{H}_k$ *dans le groupe de* CREMONA. *Supposons que* $\varsigma(\mathsf{f})$, $\varsigma(\mathsf{g})$ *et* $\varsigma(\mathsf{h})$ *soient virtuellement isotopes à l'identité. Il existe* $\mathcal{H}_{k'} \subset \mathcal{H}_k$, *une surface* $\tilde{X}$ *et une transformation birationnelle* $\eta : \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \dashrightarrow \tilde{X}$ *tels que* $\eta\varsigma(\mathcal{H}_{k'})\eta^{-1}$ *soit un sous-groupe de* $\mathsf{Aut}(\tilde{X})$.

Remarque 1. — *Un automorphisme* f *d'une surface* S *isotope à l'identité fixe chaque courbe d'auto-intersection négative ; pour toute suite de contractions* ψ *de* S *vers un modèle minimal* $\tilde{S}$ *de* S, *l'élément* $\psi f \psi^{-1}$ *est donc un automorphisme de* $\tilde{S}$ *isotope à l'identité.*

Soient S une surface minimale et ς un morphisme injectif de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathsf{Aut}(S)$. Trois cas sont possibles.

1. Si $S=\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, alors, à conjugaison linéaire près, nous avons
$$\varsigma(\mathsf{f})=(x+\zeta y,y+\beta),\quad \varsigma(\mathsf{g})=(x+\gamma y,y+\delta)\quad \text{et}\quad \varsigma(\mathsf{h}^k)=(x+k,y)\quad \text{avec}\quad \zeta\delta-\beta\gamma=k.$$
2. Si S est une surface de HIRZEBRUCH F_m, alors $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe de $\mathsf{Aut}[\mathbf{C}^2]$. De plus, $\varsigma(\mathsf{h}^{2k})$ est de la forme $(x+P(y),y)$ avec P dans $\mathbf{C}[y]$.
3. Il n'existe pas de morphisme injectif de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathsf{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$.

3. Quasi-rigidité de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$

3.1. Groupes de congruence et présentation de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ (*voir* [14]). — Pour tout entier q introduisons le morphisme $\Theta_q\,:\,\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})\to\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ qui à une matrice à coefficients entiers associe sa réduite modulo q. Soient $\Gamma_n(q)$ le noyau de Θ_q et $\tilde{\Gamma}_n(q)$ l'image réciproque du groupe diagonal de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ par Θ_q ; les $\Gamma_n(q)$ sont des sous-groupes distingués appelés groupes de congruence. *Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et Γ un sous-groupe de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$. Si Γ est d'indice fini, il existe un entier q tel que Γ contienne un groupe $\Gamma_n(q)$ et soit contenu dans $\tilde{\Gamma}_n(q)$. Si Γ est d'indice infini, alors Γ est fini* (*voir* [14]).

Notons δ_{ij} la matrice de KRONECKER 3×3 et $e_{ij}=\mathsf{Id}+\delta_{ij}$. *Le groupe $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ a pour présentation*
$$\langle e_{ij},\ i\neq j\mid [e_{ij},e_{kl}]=\mathsf{id}\ \textit{si}\ i\neq l\ \textit{et}\ j\neq k,\ e_{il}\ \textit{si}\ i\neq l\ \textit{et}\ j=k,\ e_{kj}^{-1}\ \textit{si}\ i=l\ \textit{et}\ j\neq k;\ (e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4=\mathsf{id}\rangle.$$
Les e_{ij}^q engendrent $\Gamma_3(q)$ et vérifient des relations similaires aux e_{ij} (voir [14]) ; nous les appellerons *générateurs standards* de $\Gamma_3(q)$. Remarquons que chaque $e_{ij}^{q^2}$ s'écrit comme le commutateur de deux $e_{k\ell}^q$ avec lesquels il commute. Les $\Gamma_3(q)$ contiennent donc de nombreux k-groupes de HEISENBERG ; par exemple le sous-groupe $\langle e_{12}^q,e_{13}^q,e_{23}^q\rangle$ de $\Gamma_3(q)$ en est un (pour $k=q$).

3.2. Dynamique de l'image d'un groupe de congruence. — Soient G un groupe de type fini, $\{a_1,\ldots,a_n\}$ une partie génératrice de G et f un élément de G. La *longueur* de f, notée $\|f\|$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une suite $(s_1,\ldots,s_k)$ d'éléments de $\{a_1,\ldots,a_n,a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1}\}$ telle que $f=s_1\ldots s_k$. Un élément f de G est *distordu* s'il est d'ordre infini et si la quantité $\lim_{k\to\infty}\frac{\|f^k\|}{k}$ est nulle. Remarquons que la puissance k-ième du générateur standard h d'un k-groupe de HEISENBERG $\mathcal{H}_k$ est distordue. En particulier les générateurs standards de tout sous-groupe de congruence de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$ sont distordus.

Le *premier degré dynamique* d'une application birationnelle $g\,:\,X\dashrightarrow X$ est défini par $\lambda(g)=\limsup_{n\to+\infty}|(g^n)^*|^{1/n}$ où $|\,.\,|$ désigne une norme sur $\mathsf{End}(\mathsf{H}^{1,1}(X,\mathbf{R}))$ (*voir* [5]).

Lemme 3.1. — *Soient f un élément d'un groupe de type fini G et ς un morphisme de G dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si f est distordu, le degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut 1.*

Démonstration. — Notons $\deg g$ le degré algébrique d'une transformation birationnelle g et $\{a_1,\ldots,a_n\}$ une partie génératrice de G. Les inégalités $\lambda(\varsigma(f))^n\leq\deg\varsigma(f)^n\leq\max_i(\deg\varsigma(a_i))^{\|f^n\|}$ conduisent à
$$0\leq\log\lambda(\varsigma(f))\leq\frac{\|f^n\|}{n}\log(\max_i(\deg\varsigma(a_i))).$$
Si f est distordu, la quantité $\lim_{k\to\infty}\frac{\|f^k\|}{k}$ est nulle et le degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut 1. $\square$

Dans la suite de cette partie, ρ désigne un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Nous déduisons de ce qui précède l'égalité $\lambda(\rho(e_{ij}^q)) = 1$. D'après le théorème 0.2 de [**7**], nous avons l'alternative suivante : ou bien l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, rationnelle ou elliptique ; ou bien tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. Nous allons traiter séparément ces deux éventualités.

Proposition 3.2. — *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, alors l'image de ρ est finie.*

La preuve de cette proposition consiste à montrer que $\Gamma_3(q)$ préserve la fibration et nous concluons en utilisant que *l'image de tout morphisme d'un groupe de type fini ayant la propriété (T) de* Kazhdan *dans* $\mathsf{PGL}_2(\mathbf{C}(y))$ *(resp.* $\mathsf{PGL}_2(\mathbf{C})$*) est finie.*

Etudions le cas où tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. Alors les images de e_{12}^{qn}, e_{13}^{qn} et e_{23}^{qn} par ρ sont, pour un certain n, des automorphismes d'une même surface minimale (proposition 2.1). En utilisant [**4**] nous obtenons l'énoncé suivant.

Proposition 3.3. — *Soit ρ un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n, simultanément conjugués à des éléments de $\mathsf{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ (resp. $\mathsf{Aut}(\mathsf{F}_m)$ avec $m \geq 1$), alors l'image d'un sous-groupe de congruence de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$.*

3.3. Rigidité de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$: démonstration du théorème 1.2. —
La proposition 3.2 assure que tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité. D'après la proposition 2.1 et la remarque 1 les transformations $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n, conjuguées à des automorphismes d'une surface minimale S ; seuls les cas $S = \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et $S = \mathsf{F}_m$, avec $m \geq 1$, sont à considérer. Nous obtenons finalement que $\rho(\Gamma_3(p))$ est, pour un certain p, conjugué à un sous-groupe de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$ (proposition 3.3). Nous pouvons donc supposer que $\rho(\Gamma_3(p))$ est un sous-groupe de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. La restriction de ρ à $\Gamma_3(p)$ se prolonge alors en un morphisme de groupe de Lie de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$ dans lui-même ([**14**]) ; par simplicité de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$, ce prolongement est injectif et donc surjectif. Or d'après le chapitre IV de [**6**] les automorphismes lisses de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$ s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs et de la contragrédiente ; ainsi, à conjugaison linéaire près, la restriction de ρ à $\Gamma_3(p)$ coïncide avec le plongement canonique ou la contragrédiente. Soit f un élément de $\rho(\Gamma) \setminus \rho(\Gamma_3(p))$ dont le lieu exceptionnel, que nous noterons $\mathcal{C}$, n'est pas vide. Le groupe $\Gamma_3(p)$ est distingué dans Γ ; la courbe $\mathcal{C}$ est donc invariante par tous les éléments de $\rho(\Gamma_3(p))$ donc par tous ceux de $\overline{\rho(\Gamma_3(p))}^Z = \mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$, où l'adhérence est prise au sens de Zariski, ce qui est impossible. Donc f est dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. □

4. Application aux représentations des groupes $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$

Théorème 4.1. — *Tout morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}_n(\mathbf{Z})$ dans le groupe de* Cremona *est d'image finie si $n \geq 4$.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas d'un sous-groupe d'indice fini Γ de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$ et d'un morphisme ρ de Γ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Le sous-groupe Γ de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$ contient un sous-groupe de congruence $\Gamma_4(q)$. Notons encore e_{ij} les générateurs standards de $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$. Le morphisme ρ induit une représentation fidèle $\tilde{\rho}$ de $\Gamma_3(q) = \langle e_{ij}^q \mid 1 \leq i, j \leq 3\rangle$ dans $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Le théorème 1.2 assure qu'à conjugaison près $\tilde{\rho}$ est le plongement canonique ou la contragrédiente. Plaçons nous dans la première éventualité. L'élément $\rho(e_{34}^q)$ commute à $\rho(e_{31}^q) = (x, y, qx + z)$ et le lieu des courbes contractées par $\rho(e_{34}^q)$, noté $\mathsf{Exc}(\rho(e_{34}^q))$, est invariant par $(x, y, qx + z)$. Par ailleurs $\rho(e_{34}^q)$ commute à $\rho(e_{12}^q)$ et $\rho(e_{21}^q)$, autrement dit au $\Gamma_2(q)$ suivant

$$\Gamma \supset \left(\begin{array}{c|c} \Gamma_2(q) & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right) \to \mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})).$$

Or l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{C}^2$ ne laisse pas de courbe invariante ; les éventuelles courbes contractées par $\rho(e_{34}^q)$ sont donc contenues dans la droite à l'infini. L'image de celle-ci par $(x, y, qx + z)$ intersecte $\mathbf{C}^2$; par suite $\mathsf{Exc}(\rho(e_{34}^q))$ est vide et $\rho(e_{34}^q)$ appartient à $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. Nous montrons de la même manière que $\rho(e_{43}^q)$ est un élément de $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$. Les relations assurent alors que $\rho(\Gamma_4(q))$ est dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbf{C})$; l'image de ρ est donc finie. Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque $\tilde{\rho}$ est la contragrédiente. $\square$

Remerciements.

Merci à S. Cantat, D. Cerveau, E. Ghys et D. Witte pour leurs remarques et suggestions.

Références

[1] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6., Masson, Paris, 1981, 290.

[2] M. Burger, N. Monod, Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1, 1999, 2, 199–235. Erratum, 1, 1999, 3, 338.

[3] S. Cantat, Version kählérienne d'une conjecture de Robert J. Zimmer, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 37, 2004, 5, 759–768.

[4] S. Cantat, S. Lamy, Groupes d'automorphismes polynomiaux du plan, preprint.

[5] D. Cerveau, E. Ghys, N. Sibony, J.C. Yoccoz, Dynamique et géométrie complexes, Panoramas et Synthèses, 8, Société Mathématique de France, Paris, 1999.

[6] J.A. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[7] J. Diller, C. Favre, Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, Amer. J. Math., 123, 2001, 6, 1135–1169.

[8] T.C. Dinh, N. Sibony, Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte, Duke Math. J., 123, 2004, 2, 311–328.

[9] J. Franks, M. Handel, Area preserving group actions on surfaces, Geom. Topol., 7, 2003, 757–771 (electronic).

[10] E. Ghys, Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 24, 1993, 2, 137–178.

[11] E. Ghys, Actions de réseaux sur le cercle, Invent. Math., 137, 1999, 1, 199–231.

[12] S. Lamy, L'alternative de Tits pour Aut[$\mathbb{C}^2$], J. Algebra, 239, 2001, 2, 413–437.

[13] G. Margulis, Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[14] R. Steinberg, Some consequences of the elementary relations in SL_n, Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982), Contemp. Math., 45, 335–350, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[15] D. Witte, Arithmetic groups of higher $\mathbf{Q}$-rank cannot act on 1-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 122, 1994, 2, 333–340.

[16] R.J. Zimmer, Actions of semisimple groups and discrete subgroups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 1247–1258, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

Julie Déserti, IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France.
E-mail : julie.deserti@univ-rennes1.fr