
GROUPE DE CREMONA ET DYNAMIQUE COMPLEXE : UNE APPROCHE DE LA CONJECTURE DE ZIMMER

par

Julie DÉSERTI

1. Introduction

Les techniques de dynamique complexe permettent parfois d'établir des propriétés algébriques pour certains groupes de transformations, c'est le cas dans [11, 12, 19, 28] ; il en va ainsi pour cet article.

Notons $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe encore appelé groupe de CREMONA. Rappelons le théorème de NETHER sur la structure du groupe de CREMONA.

Théorème 1.1 ([13, 2]). — *Le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe est engendré par $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}_3(\mathbf{C})$ et l'involution de CREMONA*

$$\sigma : (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy).$$

Nous connaissons aussi le groupe de CREMONA par ses relations ([26]) et par ses groupes finis ([5]). Nous nous intéressons ici aux représentations de certains sous-groupes discrets classiques dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$; cette étude ainsi que les résultats de [5] conduisent à penser qu'il se comporte comme un groupe de rang 2.

Afin de généraliser les travaux de MARGULIS sur les représentations linéaires des réseaux de groupes de LIE réels simples de rang réel strictement supérieur à 1 (voir [31, 39]) aux représentations non linéaires, ZIMMER propose d'étudier les actions des réseaux sur les variétés compactes ([41, 42, 43, 44]). L'une des principales conjectures du programme est la suivante : *soient G un groupe de LIE réel simple connexe et Γ un réseau de G . S'il existe un morphisme d'image infinie de Γ dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte M , le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension de M .*

Il y a eu de nombreux travaux dans cette direction. En 1993, dans [23], GHYS étudie les groupes engendrés par des difféomorphismes analytiques réels proches de l'identité sur une variété compacte ; il obtient en particulier que *tout sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ est métabélien et en déduit que si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$, avec $n \geq 4$, alors tout morphisme de Γ dans $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ est d'image finie.*

Dans [40], WITTE considère un \mathbf{Q} -groupe algébrique \mathbf{Q} -simple de \mathbf{Q} -rang supérieur ou égal à 2 et Γ un sous-groupe arithmétique de G ; il montre qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur Γ préservée par la multiplication à droite. La preuve de cette propriété algébrique repose en partie sur des résultats de AULT ([3]) et RHEMTULLA ([36]) concernant les ordres totaux dans les groupes nilpotents ; elle est aussi basée sur l'étude des \mathbf{Q} -systèmes de racines de G et sur les sous-groupes nilpotents de Γ engendrés par un sous-groupe de \mathbf{Q} -racines de G intersecté avec Γ . Il en déduit que toute action continue d'un sous-groupe arithmétique de G sur \mathbb{S}^1 ou sur la droite réelle est d'image finie. Le théorème de WITTE s'applique à une classe restreinte de réseaux, classe dont il est question ici, contrairement à l'énoncé suivant dû à GHYS ([24]). Soit G un groupe de LIE semi-simple, connexe, de rang réel supérieur ou égal à 2 et n'ayant pas de facteur simple isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Si Γ est un réseau irréductible de G et ρ un morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{S}^1 qui préservent l'orientation, alors l'image de ρ est finie. Notons qu'un cas particulier de cet énoncé a été démontré par BURGER et MONOD lors de leur étude de la cohomologie bornée des réseaux ([8, 9]). En 2002, dans le même esprit, NAVAS obtient que si Γ est un groupe de KAZHDAN discret et φ un morphisme de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$, avec $\alpha > 1/2$, alors $\varphi(\Gamma)$ est fini ([33]).

Dans le reste de cette partie, S est une surface orientée, fermée et Ω une forme volume lisse. POLTEROVICH se place dans le cadre suivant : soient G un groupe de LIE réel, semi-simple, connexe, sans facteur compact, de centre fini et de rang réel supérieur ou égal à 2 et Γ un réseau irréductible non co-compact de G . Supposons que le genre de S soit supérieur ou égal à 2 ; tout morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes \mathcal{C}^∞ de S qui préservent Ω est d'image finie ([34]). Soit Γ un groupe presque simple, i.e. dont tous les sous-groupes distingués sont finis ou d'indice fini. Supposons que Γ contienne un sous-groupe isomorphe au groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients entiers ; FRANKS et HANDEL ont prouvé que tout morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes de S qui préservent Ω est d'image finie ([20]).

Plus récemment, en 2004, CANTAT a résolu la conjecture de ZIMMER dans le cas particulier des actions holomorphes sur les variétés kählériennes compactes : soient M une variété complexe compacte kählérienne et $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe de ses difféomorphismes holomorphes ; soient G un groupe de LIE réel, simple, connexe et Γ un réseau de G . S'il existe un morphisme de Γ dans $\mathrm{Aut}(M)$ dont l'image est infinie, alors le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension complexe de M (voir [11]). Pour montrer cet énoncé il utilise les propriétés des groupes de difféomorphismes des variétés complexes compactes ([6, 30]), des réseaux et sous-groupes de CARTAN de G (voir [35]) et des groupes abéliens d'automorphismes d'une variété kählérienne ([19]).

Nous montrons, dans l'esprit des résultats précédents, le :

Théorème 1.2. — Soit G un \mathbf{Q} -groupe algébrique \mathbf{Q} -simple de \mathbf{Q} -rang r . Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si ρ est d'image infinie, alors $r \leq 2$.

De plus, si $r = 2$ et ρ est d'image infinie, alors G possède un système de \mathbf{Q} -racines de type A_2 et l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$.

Comme conséquence du théorème 1.2, nous obtenons à l'aide de [10] le :

Corollaire 1.3. — Soit G un \mathbf{Q} -groupe algébrique \mathbf{Q} -simple de \mathbf{Q} -rang supérieur ou égal à 3. Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $G(\mathbf{Z})$ et M une surface de KÄHLER compacte. Tout morphisme de Γ dans le groupe des transformations birationnelles de M est d'image finie.

La preuve du théorème 1.4 repose en particulier sur l'observation suivante, utilisée par WITTE dans [40]. Le système de \mathbf{Q} -racines d'un \mathbf{Q} -groupe algébrique \mathbf{Q} -simple de \mathbf{Q} -rang supérieur ou égal à 3 contient un sous-système de type A_3 ou B_2 ; nous nous ramenons donc à l'étude des morphismes d'un sous-groupe d'indice fini de $SO_{2,3}(\mathbf{Z})$ et de $SL_3(\mathbf{Z})$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Pour ces groupes nous obtenons les trois théorèmes qui suivent.

Théorème 1.4. — 1) L'image d'un morphisme injectif d'un sous-groupe d'indice fini de $SL_3(\mathbf{Z})$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $PGL_3(\mathbf{C})$.

2) Si un morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $SL_n(\mathbf{Z})$ dans le groupe de CREMONA est d'image infinie, alors $n \leq 3$.

Théorème 1.5. — Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL_3(\mathbf{Z})$ et ρ un morphisme injectif de Γ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Alors la restriction de ρ à Γ coïncide, à conjugaison près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution $u \mapsto {}^t(u^{-1})$.

Théorème 1.6. — Il n'existe pas de morphisme injectif d'un sous-groupe d'indice fini de $SO_{2,3}(\mathbf{Z})$ dans le groupe de CREMONA.

Pour démontrer ces résultats nous utiliserons, comme FRANKS et HANDEL, les groupes de matrices triangulaires supérieures à coefficients entiers dans $SL_3(\mathbf{Z})$ et $SO_{2,3}(\mathbf{Z})$.

Soit τ un automorphisme du corps \mathbf{C} ; à une transformation birationnelle f nous associons l'automorphisme $\tau(f)$ obtenu en faisant agir τ sur les coefficients de f exprimé dans un système de coordonnées homogènes fixé au préalable. Le théorème 1.4 permet de redémontrer le résultat suivant :

Théorème 1.7 ([16]). — Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Il existe un élément ψ de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ et un automorphisme τ du corps \mathbf{C} tels que, pour toute transformation birationnelle f , nous ayons :

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Remarque 1.8. — Dans [16] nous avons obtenu ce théorème par des techniques complètement différentes : la preuve repose essentiellement sur l'étude des sous-groupes abéliens maximaux du groupe de CREMONA. Alors que la première preuve est quasiment « self-contained » (hormis quelques résultats de géométrie algébrique élémentaire et de la théorie des feuilletages), la seconde utilise des résultats difficiles et profonds ; en un certain sens les deux preuves sont étrangères.

Organisation. Le second paragraphe du texte se compose d'un résultat récent de CANTAT et LAMY que nous utiliserons à plusieurs reprises, de rappels sur les transformations rationnelles sur les surfaces ainsi que sur les groupes $SL_n(\mathbf{Z})$ et $SO_{2,3}(\mathbf{Z})$. Ces groupes contiennent des groupes de HEISENBERG ; nous étudions donc, dans une troisième partie, les représentations de ceux-ci dans le groupe de CREMONA. La quatrième partie commence par une remarque qui nous permet d'utiliser les travaux de DILLER et FAVRE ([18]) et d'obtenir la première assertion du théorème 1.4. Dans un cinquième paragraphe nous montrons la seconde partie du théorème 1.4 ; en reprenant et adaptant la démarche utilisée pour $SL_3(\mathbf{Z})$, nous obtenons le théorème 1.6. Puisque que tout \mathbf{Q} -groupe algébrique \mathbf{Q} -simple de \mathbf{Q} -rang supérieur ou égal à trois possède un

sous-système de \mathbf{Q} -racines irréductible de rang 3, nous établissons le théorème 1.2. Pour finir nous redémontrons le théorème 1.7.

2. Préliminaires

2.1. La conjecture de ZIMMER pour le groupe $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$. —

Rappelons l'énoncé suivant :

Théorème 2.1 ([12]). — *Soient G un groupe de LIE réel simple et Γ un réseau de G . S'il existe un morphisme injectif de Γ dans le groupe des automorphismes polynomiaux du plan complexe, le groupe G est isomorphe à $\text{PSO}(1, n)$ ou à $\text{PSU}(1, n)$ pour un certain entier n .*

Esquisse de démonstration (pour les détails voir [12]). Ce résultat repose en partie sur la structure de produit amalgamé du groupe $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux de \mathbf{C}^2 . Notons

$$A = \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbf{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$$

le groupe des automorphismes affines et

$$E = \{(x, y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}^*, \gamma \in \mathbf{C}, P \in \mathbf{C}[y]\}$$

le groupe élémentaire. Nous avons le

Théorème 2.2 (Jung, [27, 29]). — *Le groupe $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$ est le produit amalgamé de A et E le long de $A \cap E$.*

La théorie de BASS-SERRE assure l'existence d'un arbre sur lequel $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$ agit par translation à gauche ; les stabilisateurs des sommets de l'arbre sont conjugués au groupe affine ou au groupe élémentaire ([28]). Ainsi si un groupe G se plonge dans $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$, alors

- ou bien G agit sur un arbre sans fixer de sommet ;
- ou bien G se plonge dans A ou E .

A partir de cette remarque, CANTAT et LAMY étudient les plongements des groupes de KAZHDAN (voir [15], chapitre I ou [31], chapitre III), qui ont la propriété (FA), et, par suite, des réseaux des groupes de LIE de rang réel supérieur ou égal à 2.

2.2. Rappels sur les transformations rationnelles des surfaces. — (voir [18])

Soient X, Y deux surfaces complexes compactes et $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe dominante ; notons $\text{Ind}(f)$ le lieu d'indétermination de f et $\text{Exc}(f)$ l'union des courbes contractées par f . Soient Γ_f le graphe de f , $\pi_1 : \Gamma_f \rightarrow X$ et $\pi_2 : \Gamma_f \rightarrow Y$ les projections naturelles ; si Γ_f est une sous-variété singulière de $X \times Y$, nous considérons une désingularisée de Γ_f sans changer de notation. Si β est une forme différentielle de bidegré $(1, 1)$ sur Y , alors $\pi_2^*\beta$ détermine une forme de bidegré $(1, 1)$ sur Γ_f qui peut être poussée en un courant $f^*\beta := \pi_{1*}\pi_2^*\beta$ sur X à l'aide de la première projection. Remarquons que f^* induit un opérateur entre $H^{1,1}(Y, \mathbf{R})$ et $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$: si β et γ sont homologues, alors $f^*\beta$ et $f^*\gamma$ le sont aussi.

Supposons désormais que $X = Y$. La transformation f est dite *algébriquement stable* s'il n'existe pas de courbe V dans X telle que $f^k(V)$ appartienne à $\text{Ind}(f)$ pour un certain entier $k \geq 0$. DILLER et FAVRE ont montré le résultat qui suit.

Théorème 2.3 ([18], **théorème 0.1**). — Soient X une surface rationnelle et $f : X \dashrightarrow X$ une application birationnelle. Il existe un morphisme birationnel $\varepsilon : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que $\varepsilon^{-1}f\varepsilon$ soit algébriquement stable.

Enfin le premier degré dynamique de f est défini par

$$\lambda(f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |(f^n)^*|^{1/n}$$

où $|\cdot|$ désigne une norme sur $\text{End}(H^{1,1}(X, \mathbf{R}))$; ce nombre est minoré par 1 (voir [37, 21]). Notons que, pour toute transformation birationnelle f , nous avons l'inégalité

$$\lambda(f)^n \leq \text{deg } f^n$$

où $\text{deg } f$ désigne le degré algébrique de f (le degré algébrique de $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ est le degré des polynômes homogènes f_i).

Théorème 2.4 ([18], **théorème 0.2**). — Soit f une transformation birationnelle telle que $\lambda(f) = 1$. Alors f satisfait une et une seule des conditions suivantes :

- la suite $|(f^n)^*|$ est bornée, alors f^n est, à conjugaison birationnelle près, un automorphisme isotope à l'identité pour un certain $n > 0$;
- la suite $|(f^n)^*|$ est à croissance linéaire, alors f laisse, à conjugaison birationnelle près, une unique fibration rationnelle invariante et n'est pas conjuguée à un automorphisme ;
- la suite $|(f^n)^*|$ est à croissance quadratique, alors f est, à conjugaison birationnelle près, un automorphisme qui préserve une unique fibration elliptique.

Définition 1. — Soit X une surface complexe compacte. La transformation birationnelle $f : X \dashrightarrow X$ est dite *virtuellement isotope à l'identité* s'il existe une transformation birationnelle $\eta : X \dashrightarrow \tilde{X}$ et un entier $n > 0$ tels que $\eta f^n \eta^{-1}$ soit un automorphisme de \tilde{X} isotope à l'identité.

Deux transformations birationnelles f et g sur X sont dites *simultanément virtuellement isotopes* à l'identité si le couple (η, \tilde{X}) est commun à f et g .

2.3. Les groupes $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$. —

Nous allons rappeler quelques propriétés sur les groupes $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$; pour un exposé plus complet, on renvoie à [38].

Pour tout entier q introduisons le morphisme $\Theta_q : \text{SL}_n(\mathbf{Z}) \rightarrow \text{SL}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ qui à une matrice à coefficients entiers associe sa réduite modulo q . Soient $\Gamma_n(q)$ le noyau de Θ_q et $\tilde{\Gamma}_n(q)$ l'image réciproque du groupe diagonal de $\text{SL}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ par Θ_q ; les $\Gamma_n(q)$ sont des sous-groupes distingués appelés groupes de congruence.

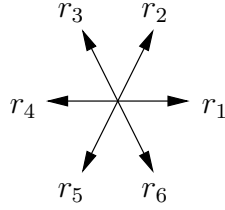
Théorème 2.5. — Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et Γ un sous-groupe de $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$. Si Γ est d'indice fini, il existe un entier q tel que Γ contienne un groupe $\Gamma_n(q)$ et soit contenu dans $\tilde{\Gamma}_n(q)$. Si Γ est d'indice infini, alors Γ est fini.

Notons δ_{ij} la matrice de KRONECKER 3×3 et $e_{ij} = \text{Id} + \delta_{ij}$.

Proposition 2.6. — *Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ a pour présentation :*

$$\langle e_{ij}, i \neq j \mid [e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si } i \neq l \text{ et } j \neq k \\ e_{il} & \text{si } i \neq l \text{ et } j = k \\ e_{kj}^{-1} & \text{si } i = l \text{ et } j \neq k \end{cases}, (e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \mathrm{Id} \rangle$$

Les e_{ij}^q engendrent $\Gamma_3(q)$ et vérifient des relations similaires aux e_{ij} (la relation $(e_{12}e_{21}^{-1}e_{12})^4 = \mathrm{id}$ n'a pas d'analogue) ; nous les appellerons *générateurs standards* de $\Gamma_3(q)$. Le système de racines de $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ est de type A_2 (voir [22]) :

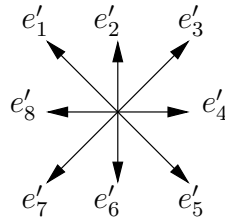


Chacun des générateurs standards d'un $\Gamma_3(q)$ est un élément du groupe à un paramètre associé à une racine r_i du système ; le système de racines permet donc de retrouver la plupart des relations apparaissant dans la présentation de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$. Par exemple $r_1 + r_3 = r_2$ correspond à $[e_{12}, e_{23}] = e_{13}$, la relation $r_2 + r_4 = r_3$ à $[e_{13}, e_{21}] = e_{23}^{-1}$ et le fait que $r_1 + r_2$ ne soit pas une racine à $[e_{12}, e_{13}] = \mathrm{Id}$.

2.4. Le groupe $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$. —

On peut aussi pour $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})$ considérer le morphisme Θ_q qui à une matrice associe sa réduite modulo q et définir des sous-groupes de congruence. Le théorème 2.5 est valable pour $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})$ avec $n \geq 2$ (voir [4]) donc, en particulier, pour $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$.

L'algèbre $\mathfrak{so}_{2,3}(\mathbf{Q})$ admet pour système de racines un système de type B_2 (voir [22])



Avec la convention $\alpha_i = \alpha_{i \bmod 8}$, les générateurs α_i d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} [\alpha_i, \alpha_{i+1}] &= [\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i+1}] = \mathrm{Id}, & [\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i+2}] &= \alpha_{2i}^{p_i}, \\ [\alpha_{2i}, \alpha_{2i+2}] &= \alpha_{2i+1}^{q_i}, & [\alpha_{2i}, \alpha_{2i+3}] &= \alpha_{2i+2}^{r_i} \end{aligned}$$

où les p_i , q_i et r_i désignent des entiers non nuls.

2.5. Groupes de HEISENBERG. —

Définition 2. — Soit k un entier. Nous appellerons k -groupe de HEISENBERG un groupe qui a pour présentation :

$$\mathcal{H}_k = \langle f, g, h \mid [f, h] = [g, h] = \text{id}, [f, g] = h^k \rangle.$$

Par convention $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$; c'est un groupe de HEISENBERG.

Notons que le groupe de HEISENBERG engendré par f , g et h^k est un sous-groupe d'indice k de \mathcal{H}_k . Nous appellerons f , g et h les *générateurs standards* de \mathcal{H}_k .

Remarque 2.7. — Chaque e_{ij}^q s'écrit comme le commutateur de deux $e_{k\ell}^q$ avec lesquels il commute ; autrement dit tout générateur standard de $\Gamma_n(q)$ est contenu dans le groupe dérivé d'un sous-groupe de $\Gamma_n(q)$. Les $\Gamma_3(q)$ contiennent donc de nombreux k -groupes de HEISENBERG ; par exemple le sous-groupe $\langle e_{12}^q, e_{13}^q, e_{23}^q \rangle$ de $\Gamma_3(q)$ en est un (pour $k = q$).

Remarque 2.8. — Notons que le sous-groupe $\langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ de $\text{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ est un q_1 -groupe de HEISENBERG.

3. Représentations des groupes de HEISENBERG

Comme nous l'avons noté précédemment les groupes $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$ et $\text{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ contiennent des groupes de HEISENBERG, nous sommes donc naturellement amenés à étudier les représentations de ceux-ci dans le groupe des automorphismes des surfaces de HIRZEBRUCH et de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. Commençons par établir quelques propriétés.

Remarque 3.1. — Si C_1 et C_2 désignent deux courbes irréductibles d'auto-intersection négative homologues alors C_1 et C_2 coïncident. Ainsi un automorphisme f d'une surface S isotope à l'identité fixe chaque courbe d'auto-intersection négative ; pour toute suite de contractions ψ de S vers un modèle minimal \tilde{S} de S , l'élément $\psi f \psi^{-1}$ est un automorphisme de \tilde{S} isotope à l'identité.

Lemme 3.2. — Soient f et g deux transformations birationnelles sur une surface S virtuellement isotopes à l'identité. Supposons que f et g commutent ; alors f et g sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité.

Démonstration. — Par hypothèse il existe une surface \tilde{S} , une transformation birationnelle $\zeta : \tilde{S} \dashrightarrow S$ et un entier n tels que $\zeta^{-1} f^n \zeta$ soit un automorphisme de \tilde{S} isotope à l'identité. Plaçons nous sur \tilde{S} ; pour simplifier nous noterons encore f l'automorphisme $\zeta^{-1} f^n \zeta$ et g la transformation $\zeta^{-1} g \zeta$.

Nous allons commencer par montrer qu'il existe $\eta : Y \dashrightarrow \tilde{S}$ birationnel tel que $\eta^{-1} f^\ell \eta$ soit un automorphisme de Y isotope à l'identité pour un certain ℓ et $\eta^{-1} g \eta$ soit algébriquement stable. Notons $N(g)$ le nombre minimum d'éclatements nécessaires pour rendre g algébriquement stable. La preuve procède par induction sur $N(g)$.

Si $N(g)$ est nul, alors $\eta = \text{id}$ convient.

Supposons le lemme démontré pour les transformations f et g satisfaisant $N(g) \leq j$; considérons (\tilde{f}, \tilde{g}) satisfaisant les hypothèses de l'énoncé et $N(\tilde{g}) = j + 1$. Puisque \tilde{g} n'est pas algébriquement stable, il existe une courbe V dans $\text{Exc}(\tilde{g})$ et un entier q tels que $\tilde{g}^q(V)$ soit un point

d'indétermination p de \tilde{g} . Comme \tilde{f} et \tilde{g} commutent, \tilde{f}^k fixe les composantes irréductibles de $\text{Ind}(\tilde{g})$ pour un certain entier k . Pour rendre \tilde{g} algébriquement stable, considérons κ l'éclatement au point p ; ce point étant fixé par \tilde{f}^k , d'une part $\kappa^{-1}\tilde{f}^k\kappa$ est un automorphisme, d'autre part $N(\kappa^{-1}\tilde{g}\kappa) = j$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe $\eta : Y \dashrightarrow \tilde{S}$ et ℓ tels que $\eta^{-1}\tilde{f}^\ell\eta$ soit un automorphisme isotope à l'identité et $\eta^{-1}\tilde{g}\eta$ soit algébriquement stable.

Notons $\bar{f} = \eta^{-1}\tilde{f}^\ell\eta$ et $\bar{g} = \eta^{-1}\tilde{g}\eta$. En reprenant la démonstration du lemme 4.1 de [18], nous constatons que f et g sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité. En effet, la première étape pour rendre \bar{g} automorphisme consiste à considérer ε_1 la contraction d'une courbe de $\text{Exc}(\bar{g}^{-1})$; comme les courbes contractées par \bar{g}^{-1} sont, d'après [18], d'auto-intersection négative et que \bar{f} est isotope à l'identité, elles sont fixées par \bar{f} donc par $\varepsilon_1\bar{f}\varepsilon_1^{-1}$. La i -ème étape consistant à répéter la première avec $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_1\bar{f}\varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{i-1}^{-1}$ et $\varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_1\bar{g}\varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{i-1}^{-1}$, nous obtenons le résultat souhaité. D'après [18] le procédé termine. Toujours par l'argument de DILLER et FAVRE, une puissance de $\varepsilon g \varepsilon^{-1}$ est isotope à l'identité. \square

Nous allons montrer le même genre de résultat pour les générateurs standards d'un k -groupe de HEISENBERG.

Proposition 3.3. — *Soit ς une représentation de \mathcal{H}_k dans le groupe de CREMONA. Supposons que tout générateur standard de $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ soit virtuellement isotope à l'identité. Alors $\varsigma(\mathbf{f})$, $\varsigma(\mathbf{g})$ et $\varsigma(\mathbf{h})$ sont simultanément virtuellement isotopes à l'identité.*

Démonstration. — Le lemme 3.2 assure que $\varsigma(\mathbf{f})$ et $\varsigma(\mathbf{h})$ sont simultanément isotopes à l'identité. Comme \mathbf{g} et \mathbf{h} commutent, $\text{Exc}(\varsigma(\mathbf{g}))$ et $\text{Ind}(\varsigma(\mathbf{g}))$ sont invariants, à conjugaison birationnelle près, par $\varsigma(\mathbf{h})$. La relation $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \mathbf{h}^k$ qui s'écrit aussi $\mathbf{f}\mathbf{g} = \mathbf{h}^k\mathbf{g}\mathbf{f}$ assure que les ensembles $\text{Exc}(\varsigma(\mathbf{g}))$ et $\text{Ind}(\varsigma(\mathbf{g}))$ sont invariants par $\varsigma(\mathbf{f})$. En reprenant le raisonnement de la démonstration du lemme 3.2 et en utilisant le lemme 4.1 de [18], nous obtenons le résultat souhaité. \square

Dans la suite nous nous intéressons aux représentations de \mathcal{H}_k dans les groupes d'automorphismes des surfaces minimales qui sont $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$, $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et les surfaces de HIRZEBRUCH F_m , $m \geq 2$. Dans une carte affine (x, y) d'une telle surface S , si f est un élément de $\text{Bir}(S)$, nous notons f par ses deux composantes $(f_1(x, y), f_2(x, y))$. Rappelons que dans des cartes affines bien choisies

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})) = (\text{PGL}_2(\mathbf{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbf{C})) \rtimes (y, x)$$

et $\text{Aut}(F_m)$ se décrit, pour $m \geq 2$, comme suit ([1] chapitre V, [32])

$$(3.1) \quad \left\{ \left(\frac{\zeta x + P(y)}{(cy + d)^m}, \frac{ay + b}{cy + d} \right) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbf{C}), \zeta \in \mathbf{C}^*, P \in \mathbf{C}[y], \deg P \leq m \right\}.$$

Lemme 3.4. — *Il n'existe pas de morphisme injectif de \mathcal{H}_k dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$.*

Démonstration. — Soit ς un morphisme de \mathcal{H}_k dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$. Quitte à considérer $\mathcal{H}_{2k} \subset \mathcal{H}_k$ nous pouvons supposer que $\varsigma(\mathbf{f})$, $\varsigma(\mathbf{g})$ et $\varsigma(\mathbf{h})$ fixent les deux fibrations standards, i.e. que ς est à valeurs dans $\text{PGL}_2(\mathbf{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbf{C})$. Pour $j = 1, 2$ notons π_j la j -ième projection. L'image de $\varsigma(\mathcal{H}_{2k})$ par π_j est un sous-groupe résoluble de $\text{PGL}_2(\mathbf{C})$ et comme $\pi_j(\varsigma(\mathbf{h}^k))$ est un commutateur, cette homographie est conjuguée à la translation $z + \beta_j$. Supposons que β_j soit non nul ; alors, par commutation, $\pi_j(\varsigma(\mathbf{f}))$ et $\pi_j(\varsigma(\mathbf{g}))$ sont des translations. Dans ce cas la relation

$[\pi_j(\varsigma(\mathbf{f})), \pi_j(\varsigma(\mathbf{g}))] = \pi_j(\varsigma(\mathbf{h}^k))$ entraîne que β_j est nul : contradiction. Les β_j sont donc nuls et l'image de \mathbf{h}^k par ς est triviale : ς n'est pas injectif. \square

Pour les morphismes de \mathcal{H}_k à valeurs dans $\text{Aut}(\mathbf{F}_m)$, $m \geq 2$, nous obtenons un résultat essentiellement différent. Notons qu'on peut voir $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$ comme un sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$; en effet tout automorphisme $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ de \mathbf{C}^2 se prolonge naturellement en une transformation birationnelle $(z^n f_1(x/z, y/z) : z^n f_2(x/z, y/z) : z^n)$ où $n = \max(\deg f_1, \deg f_2)$.

Lemme 3.5. — *Soit ς un morphisme de \mathcal{H}_k dans $\text{Aut}(\mathbf{F}_m)$ avec $m \geq 2$. Alors $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe de \mathbf{E} . De plus, $\varsigma(\mathbf{h}^{2k})$ est de la forme $(x + P(y), y)$ où P désigne un polynôme.*

Remarque 3.6. — Les sous-groupes abéliens de $\text{PGL}_2(\mathbf{C})$ sont, à conjugaison près, des groupes d'homothéties, de translations et des sous-groupes de $\{-y, y, \frac{1}{y}, -\frac{1}{y}\}$.

Démonstration. — Notons π la projection de $\text{Aut}(\mathbf{F}_m)$ sur $\text{PGL}_2(\mathbf{C})$. Quitte à considérer \mathcal{H}_{2k} , ce qu'ici nous faisons, l'image de $\varsigma(\mathcal{H}_{2k})$ par π n'est pas conjuguée à $\{y, -y, \frac{1}{y}, -\frac{1}{y}\}$. Par conséquent, à conjugaison près, $\pi(\varsigma(\mathcal{H}_{2k}))$ est un sous-groupe du groupe des transformations affines de la droite. Il s'en suit (voir (3.1)) que $\varsigma(\mathcal{H}_{2k})$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de \mathbf{E} . Les relations satisfaites par les générateurs assurent que $\varsigma(\mathbf{h}^{2k})$ est du type $(x + P(y), y)$. \square

Enfin nous mentionnons un résultat sans doute bien classique.

Lemme 3.7. — *Soit ς un morphisme injectif de \mathcal{H}_k dans $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$. A conjugaison linéaire près, nous avons $\varsigma(\mathbf{f}) = (x + \zeta y, y + \beta)$, $\varsigma(\mathbf{g}) = (x + \gamma y, y + \delta)$ et $\varsigma(\mathbf{h}^k) = (x + k, y)$ avec $\zeta\delta - \beta\gamma = k$.*

Démonstration. — L'adhérence de ZARISKI $\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}$ de $\varsigma(\mathcal{H}_k)$ est un sous-groupe algébrique unipotent de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$; comme ς est injective, l'algèbre de LIE de $\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}$ est isomorphe à :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \zeta & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \zeta, \beta, \gamma \in \mathbf{C} \right\}.$$

Notons π la projection canonique de $\text{SL}_3(\mathbf{C})$ sur $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$. L'algèbre de LIE de $\pi^{-1}(\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)})$ est, à conjugaison près, égale à \mathfrak{h} . L'application exponentielle envoie \mathfrak{h} dans le groupe \mathbf{H} des matrices triangulaires supérieures qui est un groupe algébrique connexe. Il s'en suit que la composante neutre de $\pi^{-1}(\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)})$ coïncide avec \mathbf{H} . Tout élément \mathbf{g} de $\pi^{-1}(\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)})$ agit par conjugaison sur \mathbf{H} donc appartient au groupe engendré par \mathbf{H} et $\mathbf{j} \cdot \text{Id}$ où $\mathbf{j}^3 = 1$. Puisque $\pi(\mathbf{j} \cdot \text{Id})$ est trivial, la restriction de π à \mathbf{H} est surjective sur $\overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)}$; or elle est injective, c'est donc un isomorphisme. Par conséquent ς se relève en une représentation $\tilde{\varsigma}$ de \mathcal{H}_k dans \mathbf{H}

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_k & \xrightarrow{\tilde{\varsigma}} & \mathbf{H} \\ & \searrow \varsigma & \downarrow \pi|_{\mathbf{H}} \\ & & \overline{\varsigma(\mathcal{H}_k)} \end{array}$$

Comme $\tilde{\varsigma}(\mathbf{h}^k)$ s'écrit comme un commutateur, il est unipotent. En écrivant les relations satisfaites par les générateurs nous obtenons à conjugaison près dans $\text{SL}_3(\mathbf{C})$

$$\tilde{\varsigma}(\mathbf{h}^k) = (x + k, y), \quad \tilde{\varsigma}(\mathbf{f}) = (x + \zeta y, y + \beta) \quad \text{et} \quad \tilde{\varsigma}(\mathbf{g}) = (x + \gamma y, y + \delta)$$

avec $\zeta\delta - \beta\gamma = k$ ce qui implique le lemme. \square

4. Quasi-rigidité de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$

4.1. Dynamique de l'image d'un groupe de congruence. —

Définition 3. — Soient G un groupe de type fini, $\{a_1, \dots, a_n\}$ une partie génératrice de G et f un élément de G .

- (i) La *longueur* de f , notée $\|f\|$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une suite (s_1, \dots, s_k) d'éléments de $\{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$ telle que $f = s_1 \dots s_k$.
- (ii) La quantité $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f^k\|}{k}$ est la *longueur stable* de f (voir [14]).
- (iii) Un élément f de G est *distordu* s'il est d'ordre infini et si sa longueur stable est nulle. Cette notion est invariante par conjugaison.

Lemme 4.1. — La puissance k -ième du générateur standard \mathfrak{h} d'un k -groupe de HEISENBERG \mathcal{H}_k est distordu. En particulier les générateurs standards de tout sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ sont distordus.

Démonstration. — Puisque $[f, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \mathrm{id}$, pour tout couple d'entiers (n, m) , nous avons $\mathfrak{h}^{knm} = [f^n, \mathfrak{g}^m]$. Pour $n = m$ nous obtenons $\mathfrak{h}^{kn^2} = [f^n, \mathfrak{g}^n]$; il s'en suit que $\|\mathfrak{h}^{kn^2}\| \leq 4n$. Tout générateur standard d'un $\Gamma_n(q)$ s'écrit comme le commutateur de deux autres et commute à chacun d'eux (remarque 2.7). \square

Lemme 4.2. — Soient f un élément d'un groupe de type fini G et ς un morphisme de G dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Il existe une constante positive ou nulle m telle que

$$1 \leq \lambda(\varsigma(f)) \leq \exp\left(m \frac{\|f^n\|}{n}\right).$$

En particulier, si f est distordu, la longueur stable de f est nulle et le premier degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut 1.

Démonstration. — Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une partie génératrice de G . Les inégalités $\lambda(\varsigma(f))^n \leq \deg \varsigma(f)^n \leq \max_i (\deg \varsigma(a_i))^{\|f^n\|}$ conduisent à

$$0 \leq \log \lambda(\varsigma(f)) \leq \frac{\|f^n\|}{n} \log(\max_i (\deg \varsigma(a_i))).$$

Si f est distordu, la quantité $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f^k\|}{k}$ est nulle et le degré dynamique de $\varsigma(f)$ vaut 1. \square

4.2. Notations. —

Dans la suite de cette partie, ρ désigne un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Nous déduisons des lemmes 4.1 et 4.2 l'égalité $\lambda(\rho(e_{ij}^q)) = 1$. D'après le théorème 2.4, nous avons l'alternative suivante :

- l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, rationnelle ou elliptique ;
- tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ est virtuellement isotope à l'identité.

Nous allons traiter séparément ces deux éventualités.

4.3. Fibration invariante. —

Lemme 4.3. — Soient Γ un groupe de KAZHDAN de type fini et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}(y))$ (resp. $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$). Alors l'image de ρ est finie.

Démonstration. — Notons γ_i les générateurs de Γ et $\begin{pmatrix} a_i(y) & b_i(y) \\ c_i(y) & d_i(y) \end{pmatrix}$ leur image par ρ . Un \mathbf{Q} -groupe de type fini est isomorphe à un sous-corps de \mathbf{C} donc $\mathbf{Q}(a_i(y), b_i(y), c_i(y), d_i(y))$ est isomorphe à un sous-corps de \mathbf{C} et nous pouvons supposer que ρ est à valeurs dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}_3)$. Comme Γ est de KAZHDAN, toute action continue de Γ par isométries d'un espace hyperbolique réel ou complexe possède un point fixe ; l'image de ρ est donc, à conjugaison près, un sous-groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$. D'après un théorème de ZIMMER, l'image de ρ est finie (voir [15]). \square

Proposition 4.4. — Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si l'un des $\rho(e_{ij}^q)$ préserve une unique fibration, alors l'image de ρ est finie.

Démonstration. — Notons \tilde{e}_{ij}^q les images des e_{ij}^q par ρ ; d'après la remarque 2.7, les différents générateurs jouent un rôle identique, nous pouvons donc supposer, sans perdre de généralité, que \tilde{e}_{12}^q préserve une unique fibration \mathcal{F} .

Les relations entraînent que \mathcal{F} est invariante par tous les $\tilde{e}_{ij}^{q^2}$. En effet, puisque \tilde{e}_{12}^q commute à \tilde{e}_{13}^q et \tilde{e}_{32}^q , les éléments \tilde{e}_{13}^q et \tilde{e}_{32}^q préservent \mathcal{F} (c'est l'unicité) ; puis, la relation $[\tilde{e}_{12}^q, \tilde{e}_{23}^q] = \tilde{e}_{13}^{q^2}$, qui s'écrit aussi $\tilde{e}_{23}^q \tilde{e}_{12}^q \tilde{e}_{23}^{-q} = \tilde{e}_{13}^{-q^2} \tilde{e}_{12}$, entraîne que \tilde{e}_{23}^q laisse \mathcal{F} invariante. De même $[\tilde{e}_{12}^q, \tilde{e}_{31}^q] = \tilde{e}_{32}^{-q^2}$ assure que \mathcal{F} est invariante par \tilde{e}_{31}^q . Enfin comme $[\tilde{e}_{23}^q, \tilde{e}_{31}^q] = \tilde{e}_{21}^{q^2}$, l'élément $\tilde{e}_{21}^{q^2}$ préserve \mathcal{F} . Ainsi, pour tout $\tilde{e}_{ij}^{q^2}$, il existe h_{ij} dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ et $F : \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ définissant \mathcal{F} tels que $F \circ \tilde{e}_{ij}^{q^2} = h_{ij} \circ F$. Soit ς le morphisme défini par

$$\begin{aligned} \Gamma_3(q^2) &\rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}) \\ \tilde{e}_{ij}^{q^2} &\mapsto h_{ij} \end{aligned}$$

Puisque $\Gamma_3(q^2)$ est un groupe de KAZHDAN, le groupe $\Gamma = \ker \varsigma$ est d'indice fini (lemme 4.3) donc est de KAZHDAN. Si \mathcal{F} est rationnelle, nous pouvons supposer que $\mathcal{F} = (y = \text{cte})$ où y est une coordonnée d'une carte affine de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$; comme le groupe des transformations birationnelles qui préservent la fibration $y = \text{cte}$ s'identifie à $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}(y)) \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$, la restriction de ρ à Γ est « à valeurs » dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}(y))$, elle ne peut donc être injective. Dans ce cas $\rho(\Gamma)$ est donc fini ce qui implique que $\rho(\Gamma_3(q^2))$ et $\rho(\Gamma_3(q))$ le sont. La fibration \mathcal{F} ne peut être elliptique ; en effet le groupe des transformations birationnelles qui préservent une fibration elliptique fibre à fibre est métabélien et un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_3(q^2)$ ne peut pas l'être. \square

4.4. Factorisation dans un groupe d'automorphismes. —

Supposons que tout générateur standard de $\Gamma_3(q)$ soit virtuellement isotope à l'identité. D'après la remarque 3.1, la proposition 3.3, les lemmes 4.1 et 4.2, les images de e_{12}^{qn} , e_{13}^{qn} et e_{23}^{qn} par ρ sont, pour un certain n , des automorphismes d'une surface minimale S . Commençons par considérer le cas où $S = \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$.

Lemme 4.5. — Soit ρ un morphisme injectif d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n , des éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$, alors $\rho(\Gamma_3(q^2n^2))$ est un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$.

Avant de démontrer ce résultat, montrons le lemme suivant.

Lemme 4.6. — Soit f une transformation birationnelle telle que $\mathrm{Exc}(f)$, $\mathrm{Exc}(f^2)$ soient non vides et contenus dans la droite à l'infini. Si les points d'indétermination de f sont aussi sur la droite à l'infini, alors f est un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 .

Démonstration. — Comme l'intersection du lieu d'indétermination de f avec \mathbf{C}^2 est vide, $f|_{\mathbf{C}^2} : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ est holomorphe. Commençons par montrer que l'image de \mathbf{C}^2 par f est contenue dans \mathbf{C}^2 . Supposons que ce ne soit pas le cas ; alors il existe m dans \mathbf{C}^2 tel que $f(m)$ soit sur la droite à l'infini que nous noterons L_∞ . Écrivons f sous la forme $(P : Q : R)$; notons γ le lieu des zéros de R . Comme m appartient à γ , cette courbe intersecte le plan affine \mathbf{C}^2 . Soit $\tilde{\gamma}$ une composante irréductible de γ contenant m ; elle n'est pas contractée par f . Il s'en suit que $f(\tilde{\gamma}) = L_\infty$. Soit m_∞ l'image de L_∞ par f ; l'image de $\tilde{\gamma}$ par f^2 et m_∞ coïncident : contradiction avec l'hypothèse sur $\mathrm{Exc}(f^2)$.

Puisque $f(\mathbf{C}^2)$ est inclus dans \mathbf{C}^2 le lieu des zéros de R est contenu dans L_∞ , i.e. $R = z^n$. Par suite f est un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 . \square

Démonstration du lemme 4.5. — Notons $\tilde{e}_{ij} = \rho(e_{ij})$. Le lemme 3.7 permet de supposer que $\tilde{e}_{13}^{qn} = (x + qn, y)$, $\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + \zeta y, y + \beta)$ et $\tilde{e}_{23}^{qn} = (x + \gamma y, y + \delta)$ avec $\zeta\delta - \beta\gamma = q^2n^2$.

Commençons par considérer le cas où le produit $\beta\delta$ est non nul. La relation $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{21}^{kqn}] = \tilde{e}_{23}^{-kq^2n^2}$ assure que les éventuelles courbes contractées par \tilde{e}_{21}^{kqn} sont de la forme $y = \text{cte}$. Puisque \tilde{e}_{21}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} commutent, les ensembles $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{21}^{kqn})$ et $\mathrm{Ind}(\tilde{e}_{21}^{kqn})$ sont invariants par \tilde{e}_{23}^{qn} . Nous en déduisons que $\mathrm{Ind}(\tilde{e}_{21}^{qn})$, $\mathrm{Exc}(\tilde{e}_{21}^{qn})$ et $\mathrm{Exc}((\tilde{e}_{21}^{qn})^2)$ sont contenus dans la droite à l'infini. Ainsi ou bien \tilde{e}_{21}^{qn} est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$ ou bien \tilde{e}_{21}^{qn} est, d'après le lemme 4.6, un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 . Remarquons que si \tilde{e}_{21}^{qn} est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$ il laisse, par commutation avec \tilde{e}_{23}^{qn} , la droite à l'infini invariante ; il est donc dans $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. De même nous montrons, à l'aide des égalités $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{qn}] = \tilde{e}_{12}^{q^2n^2}$ et $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{qn}] = \mathrm{Id}$, que \tilde{e}_{32}^{qn} appartient à $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. Ainsi tous les $\tilde{e}_{ij}^{q^2n^2}$ sont des automorphismes polynomiaux de \mathbf{C}^2 ; d'après le théorème 2.1, le morphisme ρ ne peut pas être injectif.

Si $\beta\delta$ est nul, l'égalité $\zeta\delta - \beta\gamma = q^2n^2$ assure que β et δ ne sont pas tous les deux nuls. Considérons le cas où β est nul. La conjugaison par $(x + \frac{\gamma}{2}y - \frac{\gamma}{2\delta}y^2, y)$ laisse \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{12}^{qn} invariants et envoie \tilde{e}_{23}^{qn} sur $(x, y + \delta)$; supposons donc que \tilde{e}_{23}^{qn} s'écrive $(x, y + \delta)$. La transformation \tilde{e}_{21}^{qn} satisfait les relations $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{21}^{qn}] = \tilde{e}_{23}^{-q^2n^2}$ et $[\tilde{e}_{21}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}] = \mathrm{Id}$; notons que l'élément $\xi = (x, \delta nx + y)$ de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$ vérifie aussi ces égalités (c'est le fait de rendre γ nul par conjugaison qui permet une telle construction). Remarquons que l'application f définie par $f = \tilde{e}_{21}^{qn}\xi^{-1}$ commute à \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} ; nous en déduisons que f s'écrit $(x + a, y + b)$ et, qu'à conjugaison près par $(x + \frac{b}{\delta}, y)$, la transformation \tilde{e}_{21}^{qn} est de la forme $(x + a, \delta x + y)$; en particulier \tilde{e}_{21}^{qn} est linéaire. De même, si η désigne $(\frac{x}{1+\zeta y}, \frac{y}{1+\zeta y})$, alors l'application g définie par $g = \tilde{e}_{32}^{qn}\eta^{-1}$ commute à \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{12}^{qn} . Il s'en

suit que g s'écrit $(x + b(y), y)$ et que \tilde{e}_{32}^{qn} est du type

$$\left(\frac{x}{1 + \zeta y} + b \left(\frac{y}{1 + \zeta y} \right), \frac{y}{1 + \zeta y} \right).$$

Les relations $[\tilde{e}_{23}^{qn}, \tilde{e}_{31}^{qn}] = \tilde{e}_{21}^{q^2 n^2}$, $[\tilde{e}_{21}^{qn}, \tilde{e}_{31}^{qn}] = \text{id}$ et $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{31}^{qn}] = \tilde{e}_{32}^{-q^2 n^2}$ assurent que \tilde{e}_{21}^{qn} s'écrit $(x, \delta x + y)$ et que

$$\tilde{e}_{31}^{qn} = \left(\frac{x}{1 + \delta x}, \frac{y}{1 + \delta x} \right).$$

Finalement, puisque \tilde{e}_{31}^{qn} et \tilde{e}_{32}^{qn} commutent, b est nul : l'image de ρ est un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$.

Nous constatons, en reprenant le même raisonnement, que le cas $\delta = 0$ n'arrive pas. \square

Le lemme qui suit traite le cas des surfaces de HIRZEBRUCH.

Lemme 4.7. — *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence $\Gamma_3(q)$ de $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Supposons que $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ soient, pour un certain n , simultanément conjugués à des éléments de $\text{Aut}(\mathbf{F}_m)$ avec $m \geq 2$; alors l'image de ρ est finie ou contenue, à conjugaison près, dans $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$.*

Démonstration. — Posons $\tilde{e}_{ij} = \rho(e_{ij})$. D'après le lemme 3.5, nous pouvons supposer, à conjugaison près, que $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2}$ s'écrit $(x + P(y), y)$; remarquons que si P est nul, alors l'image de ρ est finie. Sinon nous constatons que \tilde{e}_{12}^{qn} est du type $(\beta x + Q(y), \xi_1(y))$ et \tilde{e}_{23}^{qn} de la forme $(\delta x + R(y), \xi_2(y))$ où β, δ désignent deux complexes non nuls et ξ_1, ξ_2 deux transformations affines qui commutent. Nous pouvons donc supposer, quitte à reprendre l'argument du lemme 3.4, que le groupe engendré par les ξ_i n'est pas le groupe abélien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et donc que ξ_1 et ξ_2 sont simultanément soit des homothéties, soit des translations.

Considérons le cas où ξ_1 et ξ_2 sont des homothéties. Si elles sont toutes deux d'ordre fini, alors, quitte à prendre une puissance de \tilde{e}_{12}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} , nous pouvons supposer, à conjugaison birationnelle près, que $\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + F(y), y)$ et $\tilde{e}_{23}^{qn} = (x + G(y), y)$; par suite $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2} = [\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}]$ est trivial : ρ n'est pas injectif. Supposons, par exemple, que ξ_1 ne soit pas d'ordre fini ; alors, à conjugaison par un automorphisme près, \tilde{e}_{12}^{qn} est de la forme $(\beta x, \zeta y)$ ou $(\zeta^{i_0} x + \mu y^{i_0}, \zeta y)$. Dans le premier cas, nous obtenons, en écrivant la commutation de \tilde{e}_{12}^{qn} et $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2}$, que $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2}$ est trivial ce qui implique encore que ρ est d'image finie. Dans le second cas, puisque \tilde{e}_{23}^{qn} et $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2}$ commutent, nous avons l'une des deux possibilités suivantes : $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2}$ est trivial ou $\tilde{e}_{23}^{qn} = (\nu^{i_0} x + R(y), \nu y)$ et $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2} = (x + p_{i_0} y^{i_0}, y)$. La première éventualité entraîne que l'image de ρ est finie ; la seconde aussi en écrivant l'égalité $\tilde{e}_{13}^{q^2 n^2} = [\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}]$. Remarquons que pour montrer que l'image de ρ est finie, nous nous sommes uniquement servis des relations du qn -groupe de HEISENBERG $\langle \tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn} \rangle$. Notons π la projection de $\text{Aut}(\mathbf{F}_m)$ sur $\text{PGL}_2(\mathbf{C})$; puisque $\pi(\tilde{e}_{13}^{qn})$ est trivial, $\pi(\tilde{e}_{12}^{qn})$ et $\pi(\tilde{e}_{23}^{qn})$ jouent des rôles identiques dans le qn -groupe de HEISENBERG $\langle \pi(\tilde{e}_{12}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{13}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{23}^{qn}) \rangle$: le cas où ξ_2 est d'ordre infini se traite de la même manière.

Enfin étudions le cas où les ξ_i sont des translations. Si les deux sont triviales, nous concluons comme ci dessus. Supposons ξ_1 non triviale, à normalisation près nous avons $\xi_1(y) = y + 1$. Ecrivons les relations satisfaites par \tilde{e}_{12}^{qn} , \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} ; nous obtenons : $\tilde{e}_{13}^{qn} = (x + 1, y)$, $\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + Q(y), y + 1)$ et $\tilde{e}_{23}^{qn} = (x + R(y), y + \beta)$. Les égalités $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{qn}] = \text{Id}$ et $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{32}^{qn}] = \tilde{e}_{12}^{kq^2 n^2}$

assurent que $\text{Exc}(\tilde{e}_{32}^{qn})$ et $\text{Ind}(\tilde{e}_{32}^{qn})$ sont invariants par \tilde{e}_{12}^{qn} et \tilde{e}_{13}^{qn} . Il s'en suit que $\text{Ind}(\tilde{e}_{32}^{qn})$, $\text{Exc}(\tilde{e}_{32}^{qn})$ et $\text{Exc}((\tilde{e}_{32}^{qn})^2)$ sont contenus dans la droite à l'infini. Alors \tilde{e}_{32}^{qn} est ou bien dans $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ ou bien, d'après le lemme 4.6, un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 . La commutation de \tilde{e}_{12}^{qn} et \tilde{e}_{32}^{qn} assure que \tilde{e}_{32}^{qn} est dans $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$. Si ξ_2 est non triviale, alors \tilde{e}_{21}^{qn} appartient à $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$ par le même argument que ci-dessus (en utilisant cette fois $[\tilde{e}_{21}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}] = \text{Id}$ et $[\tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{21}^{qn}] = \tilde{e}_{23}^{-q^2 n^2}$). Les relations assurent alors que $\rho(\Gamma_3(q^2 n^2))$ est un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$; d'après le théorème 2.1, le morphisme ρ est d'image finie.

Considérons le cas où ξ_2 est l'identité ; alors \tilde{e}_{23}^{qn} s'écrit $(x + R(y), y)$. La commutation de \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{12}^{qn} entraîne que $\tilde{e}_{12}^{qn} = (x + Q(y), y + 1)$; posons $Q(y) = \sum_{k=0}^{\ell} q_k y^k$. Conjuguons \tilde{e}_{12}^{qn} , \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} par $(x + \sum_{j=0}^{\ell} h_j y^{j+1}, y)$ où $h_\ell = -\frac{q_\ell}{\ell+1}$ et pour tout j compris entre 0 et $\ell - 1$:

$$h_j = -\frac{1}{j+1} \left(q_j + \sum_{k=j+1}^{\ell} \mathfrak{C}_{k+1}^j h_k \right) ;$$

nous obtenons que \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} sont inchangés et que \tilde{e}_{12}^{qn} est du type $(x, y + 1)$. Finalement en écrivant que $[\tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn}] = \tilde{e}_{13}^{-q^2 n^2}$ nous constatons que R est linéaire : après conjugaison, \tilde{e}_{12}^{qn} , \tilde{e}_{13}^{qn} et \tilde{e}_{23}^{qn} sont dans $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$; le lemme 4.5 permet de conclure.

Remarquons que, dans ce dernier cas, nous avons uniquement utilisé les relations du qn -groupe de HEISENBERG $\langle \tilde{e}_{12}^{qn}, \tilde{e}_{13}^{qn}, \tilde{e}_{23}^{qn} \rangle$. La projection de \tilde{e}_{13}^{qn} par π étant triviale, $\pi(\tilde{e}_{12}^{qn})$ et $\pi(\tilde{e}_{23}^{qn})$ jouent des rôles symétriques dans le qn -groupe de HEISENBERG $\langle \pi(\tilde{e}_{12}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{13}^{qn}), \pi(\tilde{e}_{23}^{qn}) \rangle$ l'éventualité où ξ_2 est non triviale et ξ_1 triviale se traite donc de la même manière. \square

4.5. Conclusion : démonstration du théorème 1.4 1). —

La proposition 4.4 assure que tout générateur standard de $\rho(\Gamma_3(q))$ est virtuellement isotope à l'identité. D'après la proposition 3.3 les transformations $\rho(e_{12}^{qn})$, $\rho(e_{13}^{qn})$ et $\rho(e_{23}^{qn})$ sont, pour un certain n , conjuguées à des automorphismes d'une surface minimale S ; seuls les cas $S = \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et $S = \mathbf{F}_m$, avec $m \geq 2$, sont à considérer (lemme 3.4). Nous obtenons finalement que $\rho(\Gamma_3(q^2 n^2))$ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ (lemmes 4.5 et 4.7). Nous pouvons donc supposer que $\rho(\Gamma_3(q^2 n^2))$ est un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$.

La restriction de ρ à $\Gamma_3(q^2 n^2)$ se prolonge alors en un morphisme de groupe de LIE de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ dans lui-même (voir [38]) ; par simplicité de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$, ce prolongement est injectif et donc surjectif. Or d'après le chapitre IV de [17] les automorphismes lisses de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs et de la contragrédiente ; ainsi, à conjugaison linéaire près, la restriction de ρ à $\Gamma_3(q^2 n^2)$ coïncide avec le plongement canonique ou la contragrédiente.

Soit f un élément de $\rho(\Gamma) \setminus \rho(\Gamma_3(q^2 n^2))$ qui contracte au moins une courbe $\mathcal{C} = \text{Exc}(f)$. Le groupe $\Gamma_3(q^2 n^2)$ est distingué dans Γ ; la courbe \mathcal{C} est donc invariante par tous les éléments de $\rho(\Gamma_3(q^2 n^2))$ donc par tous ceux de $\overline{\rho(\Gamma_3(q^2 n^2))} = \text{PGL}_3(\mathbf{C})$, où l'adhérence est prise au sens de ZARISKI, ce qui est impossible. Donc f appartient à $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ et $\rho(\Gamma)$ est inclus dans $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$.

5. Application aux groupes arithmétiques

5.1. Cas des groupes $\text{SL}_n(\mathbf{Z})$. —

Théorème 5.1. — *Tout morphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_4(\mathbf{Z})$ dans le groupe de CREMONA est d'image finie.*

Démonstration. — Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_4(\mathbf{Z})$ et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_4(\mathbf{Z})$ contient, d'après le théorème 2.5, un sous-groupe de congruence $\Gamma_4(q)$. Notons E_{ij}^q les images des générateurs standards de $\Gamma_4(q)$ par ρ . Le morphisme ρ induit une représentation fidèle $\tilde{\rho}$ de $\Gamma_3(q)$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$:

$$\Gamma \supset \left(\begin{array}{cc|c} \Gamma_3(q) & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \rightarrow \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})).$$

La première assertion du théorème 1.4 assure qu'à conjugaison près $\tilde{\rho}$ est le plongement canonique ou la contragrédiente.

Plaçons nous dans la première éventualité. L'élément E_{34}^q commute à $E_{31}^q = (x, y, qx + z)$ et $\mathrm{Exc}(E_{34}^q)$ est invariant par $(x, y, qx + z)$. Par ailleurs E_{34}^q commute à E_{12}^q et E_{21}^q , autrement dit au $\Gamma_2(q)$ suivant :

$$\Gamma \supset \left(\begin{array}{cc|cc} \Gamma_2(q) & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})).$$

Or l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur \mathbf{C}^2 ne laisse pas de courbe invariante ; les éventuelles courbes contractées par E_{34}^q sont donc contenues dans la droite à l'infini. L'image de celle-ci par $(x, y, qx + z)$ intersecte \mathbf{C}^2 ; par suite $\mathrm{Exc}(E_{34}^q)$ est vide et E_{34}^q appartient à $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$. Nous montrons de la même manière que E_{43}^q est un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$. Alors les relations assurent que $\rho(\Gamma_4(q))$ est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$; l'image de ρ est donc finie.

Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque $\tilde{\rho}$ est la contragrédiente. \square

Fin de la démonstration du théorème 1.4. — Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, avec $n \geq 4$, et ρ un morphisme de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$; notons $\Gamma_n(q)$ le sous-groupe de congruence contenu dans Γ (théorème 2.5). Le morphisme ρ induit une représentation de $\Gamma_4(q)$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. D'après le théorème 5.1 le noyau de celle-ci est infini ; il en est donc de même pour $\ker \rho$. \square

5.2. Représentation de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$. —

Remarquons que les générateurs α_i d'un groupe d'indice fini de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ sont distordus : les α_{2i+1} le sont car $\langle \alpha_{2i}, \alpha_{2i+2}, \alpha_{2i+1} \rangle$ est un q_i -groupe de HEISENBERG (lemme 4.1) ; enfin les α_{2i} sont aussi distordus puisque les α_{2i-1} le sont et que $\alpha_{2i}^{p_i^n}$ s'écrit $[\alpha_{2i-1}^n, \alpha_{2i+2}]$.

Dans cette partie nous allons montrer le théorème 1.6. Rappelons que le sous-groupe $\langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ est un q_1 -groupe de HEISENBERG ; nous pouvons alors appliquer les énoncés 3.3, 3.4, 3.5 et 3.7 à ce groupe. Il suffit donc, pour montrer le théorème 1.6, de démontrer pour $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ des résultats analogues à la proposition 4.4, aux lemmes 4.5 et 4.7 ; c'est ce que nous allons faire.

Proposition 5.2. — *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ dans le groupe de CREMONA. Si l'un des $\rho(\alpha_i)$ préserve une unique fibration, alors ρ n'est pas injectif.*

Démonstration. — Posons $\tilde{\alpha}_i = \rho(\alpha_i)$. Montrons que si un $\tilde{\alpha}_i$ préserve une unique fibration \mathcal{F} , alors tous les $\tilde{\alpha}_i$ laissent \mathcal{F} invariante. « La symétrie des relations » assure qu'il suffit de considérer les deux cas suivants : $\tilde{\alpha}_1$ ou $\tilde{\alpha}_2$ préserve une unique fibration \mathcal{F} . Commençons par supposer que $\tilde{\alpha}_1$ préserve une unique fibration \mathcal{F} ; puisque $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_7$ et $\tilde{\alpha}_8$ commutent à $\tilde{\alpha}_1$, ils préservent \mathcal{F} . Enfin les relations $[\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_2^{p^2}$, $[\tilde{\alpha}_6, \tilde{\alpha}_1] = \tilde{\alpha}_8^{r^3}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6] = \tilde{\alpha}_5^{q^2}$

impliquent que $\tilde{\alpha}_4$, $\tilde{\alpha}_6$ et $\tilde{\alpha}_5^{q_2}$ laissent \mathcal{F} invariante. Si $\tilde{\alpha}_2$ préserve une unique fibration \mathcal{F} , alors, comme $\tilde{\alpha}_3$ et $\tilde{\alpha}_1$ commutent à $\tilde{\alpha}_2$, ils préservent \mathcal{F} ; les égalités $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_3^{q_2}$, $[\tilde{\alpha}_8, \tilde{\alpha}_2] = \alpha_1^{q_4}$, $[\tilde{\alpha}_7, \tilde{\alpha}_2] = \tilde{\alpha}_8^{p_4}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_7] = \tilde{\alpha}_6^{r_2}$ assurent que $\tilde{\alpha}_4$, $\tilde{\alpha}_8$, $\tilde{\alpha}_5$, $\tilde{\alpha}_7$ et $\tilde{\alpha}_6^{r_2}$ laissent \mathcal{F} invariante. Le lemme 4.3 et un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 4.4 permettent de conclure. \square

Lemme 5.3. — *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si $\rho(\alpha_2^n)$, $\rho(\alpha_3^n)$ et $\rho(\alpha_4^n)$ sont, pour un certain n , des éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$, alors ρ n'est pas injectif.*

Démonstration. — Quitte à remplacer α_i^n par α_i , nous allons supposer que n vaut 1. Notons $\tilde{\alpha}_i$ l'image de α_i par ρ . Supposons que ρ soit injectif ; le lemme 3.7 assure que $\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + q_1, y)$, $\tilde{\alpha}_2 = (x + \zeta y, y + \beta)$ et $\tilde{\alpha}_4 = (x + \gamma y, y + \delta)$ avec $\zeta\delta - \beta\gamma = q_1$.

Si $\beta\delta$ est nul, l'égalité $\zeta\delta - \beta\gamma = q_1$ assure que β et δ sont non tous deux nuls. Supposons, par exemple, que β soit nul ; à conjugaison près nous avons $\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + nq_1, y)$, $\tilde{\alpha}_2 = (x + \zeta y, y)$ et $\tilde{\alpha}_4 = (x, y + \delta)$ avec $\zeta\delta = q_1$. Les éléments $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_5$ commutent à $\tilde{\alpha}_3$ donc s'écrivent $(x + b(y), \xi_1(y))$ et $(x + a(y), \xi_5(y))$. La relation $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_5] = \tilde{\alpha}_4^{r_1}$ implique alors que δ doit être nul ce qui est exclu. Si δ est nul, le même raisonnement conduit à $\beta = 0$ ce qui est impossible.

Supposons que le produit $\beta\delta$ soit non nul. Les relations $[\tilde{\alpha}_1^k, \tilde{\alpha}_3] = \mathrm{Id}$ et $[\tilde{\alpha}_1^k, \tilde{\alpha}_4] = \tilde{\alpha}_2^{p_1}$ assurent que $\mathrm{Exc}(\tilde{\alpha}_1)$, $\mathrm{Exc}(\tilde{\alpha}_1^2)$ et $\mathrm{Ind}(\tilde{\alpha}_1)$ sont contenus dans la droite à l'infini. Alors ou bien $\tilde{\alpha}_1$ est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$, ou bien $\tilde{\alpha}_1$ est, d'après le lemme 4.6, un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 . Remarquons que si $\tilde{\alpha}_1$ est dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$, il laisse, par commutation avec $\tilde{\alpha}_2$, la droite à l'infini invariante ; autrement dit c'est un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 . De même les relations $[\tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_5^k] = \mathrm{Id}$, $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_5^k] = \tilde{\alpha}_4^{kr_1}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5] = \mathrm{Id}$ entraînent que $\tilde{\alpha}_5$ est dans $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$; les égalités $[\tilde{\alpha}_3^{q_1}, \tilde{\alpha}_6] = \tilde{\alpha}_4^{q_1 p_2}$, $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6^k] = \tilde{\alpha}_5^{q_2}$ et $[\tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_6] = \mathrm{Id}$ impliquent que $\tilde{\alpha}_6$ est un automorphisme polynomial. Pour finir d'après $[\tilde{\alpha}_8^k, \tilde{\alpha}_3] = \tilde{\alpha}_2^{kr_4}$, $[\tilde{\alpha}_8^k, \tilde{\alpha}_2] = \tilde{\alpha}_1^{kq_4}$ et $[\tilde{\alpha}_8, \tilde{\alpha}_1] = \mathrm{Id}$ l'élément $\tilde{\alpha}_8$ appartient à $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. Par suite $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$: impossible par le théorème 2.1. \square

Lemme 5.4. — *Soit ρ un morphisme d'un sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$ dans le groupe de CREMONA. Supposons que $\rho(\alpha_2^n)$, $\rho(\alpha_3^n)$ et $\rho(\alpha_4^n)$ soient, pour un certain n , simultanément conjugués à des éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_m)$ avec $m \geq 2$; alors ρ n'est pas injectif.*

Démonstration. — Quitte à remplacer α_i^n par α_i , nous allons supposer que n vaut 1. Notons $\tilde{\alpha}_i$ l'image de α_i par ρ . Supposons que ρ soit injectif ; le lemme 3.5 assure que $\tilde{\alpha}_3^{q_1}$ s'écrit $(x + P(y), y)$, que $\tilde{\alpha}_2$ est du type $(a_2x + Q(y), \xi_2(y))$ et $\tilde{\alpha}_4$ de la forme $(a_4x + R(y), \xi_4(y))$. Si nous reprenons la démonstration du lemme 4.7 nous constatons le fait suivant : la présence d'un k -groupe de HEISENBERG permet de conclure sauf dans le cas où les ξ_i sont des translations non triviales ; nous n'envisageons donc que ce cas. Ecrivons les relations satisfaites par $\tilde{\alpha}_3^{q_1}$, $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_4$; nous obtenons : $\tilde{\alpha}_3^{q_1} = (x + 1, y)$, $\tilde{\alpha}_2 = (x + Q(y), y + \beta)$ et $\tilde{\alpha}_4 = (x + R(y), y + \gamma)$. Les égalités $[\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3^{q_1}] = \mathrm{Id}$ et $[\tilde{\alpha}_1^k, \tilde{\alpha}_4^n] = \tilde{\alpha}_2^{kp_1}$ assurent que $\mathrm{Ind}(\tilde{\alpha}_1)$, $\mathrm{Exc}(\tilde{\alpha}_1)$ et $\mathrm{Exc}(\tilde{\alpha}_1^2)$ sont contenus dans la droite à l'infini ; ainsi ou bien $\tilde{\alpha}_1$ appartient à $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{C})$, ou bien $\tilde{\alpha}_1$ est un automorphisme polynomial de \mathbf{C}^2 (voir lemme 4.6). La commutation de $\tilde{\alpha}_1$ avec $\tilde{\alpha}_2$ assure que $\tilde{\alpha}_1$ laisse la droite à l'infini invariante, *i.e.* $\tilde{\alpha}_1$ est dans $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. Remarquons que, de la même manière, $[\tilde{\alpha}_3^{q_1}, \tilde{\alpha}_5] = \mathrm{Id}$, $[\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_5^k] = \tilde{\alpha}_4^{kr_1}$ et $[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5] = \mathrm{Id}$ impliquent que $\tilde{\alpha}_5$ appartient à $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$; enfin $[\tilde{\alpha}_3^{q_1}, \tilde{\alpha}_6] = \tilde{\alpha}_4^{q_1 p_2}$,

$[\tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_6^k] = \tilde{\alpha}_5^{kq^2}$ et $[\tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_6] = \text{Id}$ entraînent qu'il en est de même pour $\tilde{\alpha}_6$. Par suite l'image de ρ est un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$; d'après le théorème 2.1, le morphisme ρ n'est pas injectif. \square

5.3. Cas des groupes arithmétiques. —

Nous finissons cette partie en démontrant le théorème 1.2. Supposons que r soit supérieur ou égal à 3. Puisque G est simple, son système de \mathbf{Q} -racines possède un sous-système irréductible de rang 3, *i.e.* un système de racines de type A_3 , B_3 ou C_3 (*voir* [7], page 197, théorème 3). Or C_3 (resp. B_3) possède un sous-système de type A_3 (resp. B_2) donc le système de \mathbf{Q} -racines de G possède un sous-système de type A_3 ou B_2 .

Commençons par supposer qu'il s'agit d'un sous-système de type A_3 . Dans ce cas Γ contient un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_4(\mathbf{Z})$; alors le théorème 1.4 assure que le noyau de $\rho|_{\tilde{\Gamma}}$ est infini, donc l'image de ρ est finie. Si G possède un sous-système de type B_2 , alors Γ contient un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $\text{SO}_{2,3}(\mathbf{Z})$; d'après le théorème 1.6 le noyau de $\rho|_{\tilde{\Gamma}}$ est infini donc le noyau de ρ aussi. Ainsi dès que $r \geq 3$, l'image de ρ est finie.

Enfin si $r = 2$, le groupe G possède un système de type A_2 ou B_2 . Si ρ est d'image infinie, il s'agit d'un système de type A_2 (théorème 1.6) ; le théorème 1.4 assure alors que l'image de ρ est, à conjugaison près, un sous-groupe de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$.

6. Automorphismes du groupe de CREMONA

Nous allons démontrer le théorème 1.7.

Lemme 6.1. — *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Si la restriction de φ à $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ est l'identité, alors, à automorphisme de corps et conjugaison linéaire près, sa restriction à $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ l'est aussi.*

Démonstration. — Notons H le groupe des matrices triangulaires supérieures

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbf{C} \right\}.$$

Les groupes H et $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ engendrent $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ donc montrer que $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ est invariant par φ revient à montrer que $\varphi(H) = H$. Posons

$$f_b(x, y) = \varphi(x + b, y), \quad g_a(x, y) = \varphi(x + ay, y) \quad \text{et} \quad h_c(x, y) = \varphi(x, y + c).$$

La transformation birationnelle f_b (resp. h_c) commute à $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$ donc f_b (resp. h_c) s'écrit $(x + \eta(b), y + \zeta(b))$ (resp. $(x + \gamma(c), y + \beta(c))$) où η et ζ (resp. γ et β) sont deux morphismes additifs de \mathbf{C} ; puisque g_a commute à $(x + y, y)$ et $(x + 1, y)$ il est de la forme $(x + A_a(y), y)$. La relation

$$(x + ay, y) \circ (x, y + c) \circ (x + ay, y)^{-1} \circ (x, y + c)^{-1} = (x + ac, y)$$

implique que, pour tous nombres complexes a et c , nous avons $g_a h_c = f_{ac} h_c g_a$. Nous en déduisons que f_b s'écrit $(x + \eta(b), y)$, g_a est de la forme $(x + \mu(a)y + \delta(a), y)$ et $\mu(a)\beta(c) = \eta(ac)$. En particulier $\varphi(H)$ est inclus dans H . L'égalité $\mu(a)\beta(c) = \eta(ac)$ conduit à $\eta = \mu = \beta$ car $\eta(1) = \mu(1) = \beta(1) = 1$; remarquons qu'alors cette même égalité assure que η est multiplicative.

Notons T le groupe des translations dans l'ouvert affine \mathbf{C}^2 ; tout élément de T s'écrit $(x + a, y) \circ (x, y + b)$. Puisque f_b et h_c sont respectivement du type $(x + \eta(b), y)$ et $(x + \eta(c), y + \eta(c))$,

l'image de \mathbf{T} par φ est un sous-groupe de \mathbf{T} . Le groupe des translations étant un sous-groupe abélien maximal de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, il en est de même pour $\varphi(\mathbf{T})$ et cette inclusion est une égalité ; l'application η est donc surjective et $\varphi(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$. Ainsi φ induit un automorphisme de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ trivial sur $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$. Or les automorphismes de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ sont engendrés par les automorphismes intérieurs, les automorphismes du corps \mathbf{C} et la contragrédiente (voir [17]) donc, à conjugaison et automorphisme de corps près, $\varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})}$ est l'identité (ceci résulte du fait que la contragrédiente sur $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ ne coïncide pas avec la restriction d'un automorphisme intérieur). \square

Corollaire 6.2. — *Soit φ un automorphisme du groupe de CREMONA. Si la restriction de φ à $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ est la contragrédiente, alors sa restriction à $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ l'est aussi.*

Démonstration. — Notons ψ la composée de $\varphi|_{\text{SL}_3(\mathbf{Z})}$ avec la restriction de la contragrédiente C à $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$. Le morphisme ψ se prolonge en un morphisme $\tilde{\psi}$ de $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ par $\tilde{\psi} = \varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})} \circ C$. Le noyau de $\tilde{\psi}$ contient $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$; le groupe $\text{PGL}_3(\mathbf{C})$ étant simple, $\tilde{\psi}$ est trivial. \square

Lemme 6.3. — *Soit φ un automorphisme du groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe tel que $\varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})}$ soit l'identité ou la contragrédiente. Il existe a, b deux complexes non nuls tels que $\varphi(\sigma) = \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}\right)$ où σ désigne l'involution de CREMONA.*

Démonstration. — Supposons que $\varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})}$ soit l'identité. Écrivons $\varphi(\sigma)$ sous la forme $\left(\frac{F}{x}, \frac{G}{y}\right)$ où F et G sont rationnelles. L'égalité $\sigma(\beta x, \mu y) = (\beta^{-1}x, \mu^{-1}y)\sigma$ conduit à $(F, G)(\beta x, \mu y) = (F, G)$; ceci étant valable pour tout couple (β, μ) de complexes non nuls, les fonctions F et G sont constantes.

La contragrédiente laissant le groupe diagonal invariant, le même raisonnement s'applique au cas où $\varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})}$ est la contragrédiente. \square

Démonstration du théorème 1.7. — Le théorème 1.4, le corollaire 6.2 et le lemme 6.1 permettent de supposer qu'à automorphisme de corps et conjugaison près, $\varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})}$ est la contragrédiente ou l'identité. Supposons que nous soyons dans le premier cas. Posons $h = (x, x - y, x - z)$; comme l'a remarqué GIZATULLIN (voir [25]), la transformation $(h\sigma)^3$ est triviale. Or $\varphi(h) = (x + y + z, -y, -z)$ et $\varphi(\sigma) = \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{1}{z}\right)$ (lemme 6.3) donc $\varphi(h\sigma)^3 \neq \text{id}$. Il s'en suit que $\varphi|_{\text{PGL}_3(\mathbf{C})}$ est trivial ; la relation $(h\sigma)^3 = \text{id}$ conduit à $\varphi(\sigma) = \sigma$ et le théorème 1.1 permet de conclure. \square

Remerciements. — Merci à S. CANTAT, D. CERVEAU, E. GHYS et D. WITTE pour leurs remarques et suggestions.

Références

- [1] *Algebraic surfaces.* By the members of the seminar of I. R. Šafarevič. Translated from the Russian by Susan Walker. Translation edited, with supplementary material, by K. Kodaira and D. C. Spencer. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 75 (1965). American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.

- [2] Maria Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [3] J. C. Ault. Right-ordered locally nilpotent groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 4:662–666, 1972.
- [4] Hyman Bass, John Milnor, and Jean-Pierre Serre. Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (33):59–137, 1967.
- [5] Arnaud Beauville. p -elementary subgroups of the Cremona group. *A paraître dans J. Algebra*, 2005.
- [6] Salomon Bochner and Deane Montgomery. Locally compact groups of differentiable transformations. *Ann. of Math. (2)*, 47:639–653, 1946.
- [7] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6.
- [8] Marc Burger and Nicolas Monod. Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(2):199–235, 1999.
- [9] Marc Burger and Nicolas Monod. Erratum: “Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups”. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(3):338, 1999.
- [10] Serge Cantat. Endomorphismes des variétés homogènes. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4):237–262, 2003.
- [11] Serge Cantat. Version kählérienne d’une conjecture de Robert J. Zimmer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(5):759–768, 2004.
- [12] Serge Cantat and Stéphane Lamy. Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan. *preprint*, 2004.
- [13] Guido Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, pages 36:861–874, 1901.
- [14] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [15] Pierre de la Harpe and Alain Valette. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger). *Astérisque*, (175):158, 1989. With an appendix by M. Burger.
- [16] Julie Déserti. Sur les automorphismes du groupe de Cremona. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(7):447–452, 2006.
- [17] Jean A. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5.
- [18] Jeffrey Diller and Charles Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6):1135–1169, 2001.
- [19] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Groupes commutatifs d’automorphismes d’une variété kählérienne compacte. *Duke Math. J.*, 123(2):311–328, 2004.
- [20] John Franks and Michael Handel. Area preserving group actions on surfaces. *Geom. Topol.*, 7:757–771 (electronic), 2003.
- [21] Shmuel Friedland. Entropy of algebraic maps. In *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, number Special Issue, pages 215–228, 1995.
- [22] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [23] Étienne Ghys. Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l’identité. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 24(2):137–178, 1993.
- [24] Étienne Ghys. Actions de réseaux sur le cercle. *Invent. Math.*, 137(1):199–231, 1999.
- [25] Marat Gizatullin. On some tensor representations of the Cremona group of the projective plane. In *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, volume 264 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 111–150. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [26] Vasilij A. Iskovskikh. Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5(245)):255–256, 1985.

- [27] Heinrich W. E. Jung. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184:161–174, 1942.
- [28] Stéphane Lamy. L’alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. *J. Algebra*, 239(2):413–437, 2001.
- [29] Stéphane Lamy. Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, 48(3-4):291–315, 2002.
- [30] David I. Lieberman. Compactness of the Chow scheme: applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, volume 670 of *Lecture Notes in Math.*, pages 140–186. Springer, Berlin, 1978.
- [31] Gregory Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [32] Masayoshi Nagata. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32:351–370, 1960.
- [33] Andrés Navas. Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(5):749–758, 2002.
- [34] Leonid Polterovich. Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry. *Invent. Math.*, 150(3):655–686, 2002.
- [35] Gopal Prasad and M. S. Raghunathan. Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups. *Ann. of Math. (2)*, 96:296–317, 1972.
- [36] Akbar. H. Rhemtulla. Right-ordered groups. *Canad. J. Math.*, 24:891–895, 1972.
- [37] Alexander Russakovskii and Bernard Shiffman. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3):897–932, 1997.
- [38] Robert Steinberg. Some consequences of the elementary relations in SL_n . In *Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982)*, volume 45 of *Contemp. Math.*, pages 335–350. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [39] Ernest B. Vinberg, Vladimir V. Gorbatsevich, and O. V. Shvartsman. Discrete subgroups of Lie groups. In *Lie groups and Lie algebras, II*, volume 21 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–123, 217–223. Springer, Berlin, 2000.
- [40] Dave Witte. Arithmetic groups of higher \mathbf{Q} -rank cannot act on 1-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(2):333–340, 1994.
- [41] Robert J. Zimmer. Kazhdan groups acting on compact manifolds. *Invent. Math.*, 75(3):425–436, 1984.
- [42] Robert J. Zimmer. On connection-preserving actions of discrete linear groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4):639–644, 1986.
- [43] Robert J. Zimmer. Actions of semisimple groups and discrete subgroups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 1247–1258, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.
- [44] Robert J. Zimmer. Lattices in semisimple groups and invariant geometric structures on compact manifolds. In *Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984)*, volume 67 of *Progr. Math.*, pages 152–210. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.