Odyssée dans le groupe de Cremona

Julie Déserti[1]

Le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est le quotient de $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par la relation d'alignement $\sim$ définie par $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ si et seulement si $(x',y',z') = \alpha(x,y,z)$ avec α dans $\mathbb{C}^*$. La notation $(p_0 : p_1 : p_2)$ représente la classe d'équivalence du point $p = (p_0, p_1, p_2)$ de $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On peut inclure $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *via* l'application $(x,y) \mapsto (x : y : 1)$; on parle alors de la carte affine $z = 1$, carte dans laquelle un point est repéré par ses coordonnées (x,y). De même on peut introduire les cartes affines $x = 1$ et $y = 1$. Le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est le groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$, *i.e.* le groupe des transformations de la forme

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$
$$(x : y : z) \mapsto (a_0x + a_1y + a_2z : a_3x + a_4y + a_5z : a_6x + a_7y + a_8z),$$
$$\det(a_i) \neq 0.$$

Une *transformation rationnelle* f du plan projectif dans lui-même est une transformation de la forme

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad (x : y : z) \mapsto (f_0(x,y,z) : f_1(x,y,z) : f_2(x,y,z)),$$

les f_i désignant des polynômes homogènes de même degré sans facteur commun ; le degré de f est le degré des f_i. Plaçons-nous dans la carte affine $z = 1$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ munie des coordonnées x et y ; une transformation rationnelle est une transformation de la forme $\left(\frac{P(x,y)}{R(x,y)}, \frac{Q(x,y)}{R(x,y)}\right) = \left(\frac{f_0(x,y,1)}{f_2(x,y,1)}, \frac{f_1(x,y,1)}{f_2(x,y,1)}\right)$ avec P, Q et R dans $\mathbb{C}(x,y)$. La transformation f est *birationnelle* s'il existe une transformation rationnelle g telle que

$$f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}.$$

Un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une transformation birationnelle. La transformation rationnelle quadratique σ définie par

$$\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$$

est une involution birationnelle (elle s'écrit $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ dans la carte $z = 1$). Le prolongement au plan projectif complexe de tout automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ est une transformation birationnelle.

L'ensemble des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même forme un groupe, le *groupe de Cremona* ; on le désigne par $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$, étant sous-entendu qu'on travaille sur $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ sont aussi appelés *transformations de Cremona*.

Revenons à l'involution $\sigma = (yz : xz : xy)$. On remarque que l'image de la droite $x = 0$ par σ est le point $(1 : 0 : 0)$, on dit que la droite $x = 0$ est *contractée* sur le point $(1 : 0 : 0)$; de même $y = 0$ (resp. $z = 0$) est contractée sur $(0 : 1 : 0)$ (resp. $(0 : 0 : 1)$). Comme σ est une involution $(1 : 0 : 0)$ est « envoyé » sur la droite $x = 0$; on dit que $(1 : 0 : 0)$ est *éclaté* sur $x = 0$. Les points $(0 : 1 : 0)$ et

[1] Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris VII

$(0:0:1)$ sont respectivement éclatés sur les droites $y=0$ et $z=0$. De manière plus générale si $f=(f_0:f_1:f_2)$ désigne une transformation birationnelle, on peut définir

– l'*ensemble d'indétermination* de f qui est le lieu d'annulation des f_i, c'est l'ensemble fini des points éclatés par f;
– l'*ensemble exceptionnel* de f qui est le lieu des zéros de $\det \mathrm{jac}\, f$, c'est l'ensemble des courbes contractées par f.

Un automorphisme du plan projectif complexe n'éclate pas de point et ne contracte pas de courbe. On peut vérifier que le prolongement $(yz : y^2-xz : z^2)$ à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de l'application de Hénon (y, y^2-x) (qui est un automorphisme du plan affine $\mathbb{C}^2$) contracte une unique droite, celle d'équation $z=0$, et a un unique point d'indétermination $(1:0:0)$.

Si $f=(f_0:f_1:f_2)$ est une transformation birationnelle du plan projectif dans lui-même le *réseau homaloïdal* associé à f est le système de courbes $\mathcal{H}_f$ défini par

$$\alpha_0 f_0+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2=0, \qquad (\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C});$$

autrement dit c'est l'image réciproque par f du réseau de droites $\alpha_0 x+\alpha_1 y+\alpha_2 z=0$. Chaque courbe de $\mathcal{H}_f$ est donc rationnelle, *i.e.* paramétrée par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Les *points bases* m_i de $\mathcal{H}_f$ sont les points par lesquels passent toutes les courbes du réseau ; ce sont aussi les points bases de f. Ils peuvent être dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou infiniment proches de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (notion dont on reparlera plus loin). Par opposition aux points infiniment proches, les points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont appelés *points propres*. Les points bases propres de f sont les points d'indétermination de f. Deux courbes génériques de $\mathcal{H}_f$ se coupent en les points bases de $\mathcal{H}_f$ et un unique autre point.

Le réseau homaloïdal associé à un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites du plan projectif. Le réseau homaloïdal associé à $A\sigma$, où A désigne un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, est l'ensemble des coniques passant par les trois points $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ et $(0:0:1)$. En effet l'image d'une droite générique $ax+by+cz=0$ par σ est la conique $ayz+bxz+cxy=0$.

On a essayé d'opter pour un langage accessible ce qui peut heurter les spécialistes...

1. de Jonquières, un mathématicien marin

Si l'on en croit Hudson ([Hud27]) c'est en 1822, dans un traité de Poncelet ([Pon22]), qu'apparaît la première transformation birationnelle (qui ne soit pas un automorphisme). Durant une quarantaine d'années environ trente mathématiciens se sont intéressés de près ou de loin à certaines transformations birationnelles. L'accès aux travaux des mathématiciens de la fin du XIXe siècle n'est pas toujours aisé mais est facilité par le travail de certains historiens dont Loria fait partie ([Lor02]). Évoquons une petite partie de la vie scientifique de Jonquières : il souhaite décrire les courbes gauches dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ qui ne sont pas intersection complète de deux surfaces, *i.e.* qui ne sont pas intersection transverse de deux surfaces.

Il pense avancer dans cette étude en généralisant la méthode utilisée par Seydewitz ([Sey47]) pour la cubique gauche $\mathcal{C}$, image du morphisme de Veronese

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), \qquad (x : y) \mapsto (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3),$$

ou bien en carte affine l'image de $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. La courbe $\mathcal{C}$ est l'intersection des trois quadriques suivantes

$$Q_1 = xz - y^2, \qquad Q_2 = xt - yz, \qquad Q_3 = yt - z^2;$$

en revanche l'intersection de deux Q_i distinctes est l'union de $\mathcal{C}$ et d'une certaine droite ℓ. On peut voir que c'est encore le cas pour tout couple de quadriques, $\mathcal{C}$ n'est donc pas l'intersection de deux quadriques ; en fait ce n'est pas une intersection complète. De Jonquières a besoin pour généraliser la méthode de Seydewitz, d'au moins une correspondance biunivoque entre les points de deux plans qui ne soit pas un automorphisme ; c'est ainsi qu'il en présente une dans [dJ64]. Un réseau homaloïdal (abstrait) est une famille de courbes à deux paramètres ayant « grosso modo » des propriétés analogues à la famille des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Sa construction commence par la remarque suivante : on se donne un point p et $2(n-1)$ points m_i en position générale ; les courbes de degré n singulières en p avec multiplicité $n-1$ (*i.e.* les courbes « passent $n-1$ fois » par p) et qui passent par les m_i forment un réseau homaloïdal. D'après le théorème de Bezout deux courbes de degré n se coupent en n^2 points qui s'organisent dans notre contexte de la façon suivante : en les m_i on obtient $2(n-1)$ points simples et le point multiple « produit » $(n-1)^2$ points d'intersection confondus de sorte qu'il reste un point d'intersection « libre ». Une telle famille de courbes a donc des propriétés analogues à la famille des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (deux droites se coupent en un point « libre »). Il établit alors une correspondance biunivoque entre ces courbes et les droites d'un plan ; en ajoutant la condition « le point d'intersection de deux droites quelconques dans le plan correspond au point variable commun aux deux courbes correspondantes » on obtient une transformation birationnelle entre les deux plans considérés. Ces transformations seront appelées *transformations de Jonquières*. De nos jours on présente les transformations de Jonquières de la façon suivante : c'est à conjugaison birationnelle près les transformations du type

$$\left(\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + d(y)}, \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right), \begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y)), \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C});$$

remarquons que la famille des droites $y =$ constante est préservée dans son ensemble par un tel élément du groupe de Cremona. Pour les spécialistes les transformations de Jonquières sont précisément celles qui préservent une fibration rationnelle[2].

À la fin de sa vie, lorsque le marin laisse définitivement place au mathématicien, de Jonquières continue à s'intéresser aux éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ (*voir* [dJ85a, dJ85b, dJ86]).

[2] Dans notre contexte une fibration rationnelle est une application rationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont les fibres sont des courbes rationnelles.

2. L'impulsion de Cremona, suivie de celle de Nœther

L'étude des transformations birationnelles est initiée par Cremona dans les années $1863 - 1865$ (*voir* [Cre64, Cre65a, Cre65b, Lor04]). Lors de son séjour à Bologne, Cremona découvre un mémoire d'un astronome italien, Schiaparelli ([Sch64]). Dans cet article Schiaparelli considère les transformations du plan pour lesquelles le réseau homaloïdal associé est un réseau de coniques passant par trois points ; Cremona démontre alors que modulo les automorphismes du plan un tel élément s'écrit

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right).$$

L'existence d'autres transformations birationnelles a déjà été évoquée par Magnus ([Ma]) et de Jonquières mais Cremona ne semble pas en avoir connaissance ; il constate que la composée d'automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et de transformations quadratiques peut être plus compliquée que les transformations évoquées précédemment. Dès lors il entreprend de décrire tous les éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Pour traiter ce problème il s'appuie sur le fait qu'à chaque transformation birationnelle on peut associer un réseau homaloïdal ; à ce moment là la réciproque n'est pas encore connue sauf dans le cas des transformations de Jonquières dont il donne une construction géométrique. Au même moment Nœther s'intéresse lui aussi à la description des transformations birationnelles du plan projectif complexe ([Noe69, Noe70, Noe72]). Notons l'existence d'une correspondance abondante entre Nœther et Cremona : ils ont échangé au moins neuf lettres en 1871 (*voir* [Men86]), en particulier au sujet du résultat suivant énoncé par Nœther cette même année.

Théorème 1. *Le groupe de Cremona est engendré par les automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et l'involution quadratique*

$$\sigma\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad (x:y:z) \mapsto (yz:xz:xy).$$

La démonstration avancée par Nœther est incomplète. C'est en 1901 qu'est donnée la première preuve complète de ce théorème ; elle est due à Castelnuovo. Expliquons la faille de la démonstration de Nœther : il sait que toutes les transformations birationnelles quadratiques n'ont pas nécessairement trois points d'indétermination propres ; autrement dit il ne suffit pas d'éclater chaque point d'indétermination pour obtenir un automorphisme sur une certaine surface rationnelle, *i.e.* un automorphisme d'une surface birationnelle à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. C'est par exemple le cas pour l'élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ donné par

$$f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad (x:y:z) \mapsto (xy:z^2:yz);$$

après avoir éclaté $(1:0:0)$ on constate qu'il y a encore un point d'indétermination p sur le diviseur exceptionnel. On dit que p est infiniment proche de $(1:0:0)$ ce que l'on note $p \succ (1:0:0)$. Nœther prend en compte ce type de transformations quadratiques mais ne traite pas le cas des éléments quadratiques de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ les plus « dégénérés », comme par exemple

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad (x:y:z) \mapsto (x^2:xy:y^2-xz)$$

qui compte un point d'indétermination $(0:0:1)$ et deux points base p et m tels que $p \succ m \succ (0:0:1)$. Segre pointe cet oubli dans [Se] et Castelnuovo y remédie dans [Cas01]. Il existe de nombreuses démonstrations du théorème 1, on trouve par exemple un panorama dans [AC02]. Dans les années 1980 Gizatullin puis Iskovskikh ont donné une présentation de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ par générateurs et relations ([Giz82, Isk85]).

À noter qu'il n'existe pas d'analogue à ce théorème en dimension supérieure ([Pan99]) : il faut une infinité non dénombrable de transformations de degré strictement supérieur à 1 pour engendrer le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dans lui-même lorsque $n \geqslant 3$. En effet étant donnée une cubique plane lisse, Pan construit une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, avec $n \geqslant 3$, qui contracte celle-ci. Or l'ensemble des classes d'isomorphismes des cubiques planes lisses est une famille à un paramètre ; il s'en suit que l'ensemble des types birationnels des composantes du lieu exceptionnel des éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ est infini ; ceci n'est pas le cas si on suppose que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ est engendré par le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et un nombre fini de transformations de degré strictement supérieur à 1.

3. Petite incursion dans le monde des transformations quadratiques

Le théorème de génération de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ conduit naturellement à l'étude des transformations de Cremona de degré 2 (*voir* [CD]) ; notons Bir_2 l'ensemble qu'elles forment. Le groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ agit sur Bir_2

$$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{Bir}_2 \times \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{Bir}_2, \qquad (A, f, B) \mapsto AfB^{-1}.$$

On désigne par $\mathcal{O}(f)$ l'*orbite* d'un élément f de Bir_2 sous cette action. C'est une sous-variété algébrique lisse de dimension finie de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$; en revanche son adhérence peut être singulière. On peut décrire Bir_2 : si

$$\begin{aligned}&\Sigma^0 = \mathcal{O}(x(x:y:z)),\\ &\Sigma^1 = \mathcal{O}(x^2 : xy : y^2 - xz), \qquad \Sigma^2 = \mathcal{O}(xy : z^2 : yz), \qquad \Sigma^3 = \mathcal{O}(yz : xz : xy),\end{aligned}$$

alors $\mathrm{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$. De plus on a les égalités

$$\dim \Sigma^0 = 10, \qquad \dim \Sigma^1 = 12, \qquad \dim \Sigma^2 = 13, \qquad \dim \Sigma^3 = 14$$

ainsi que les conditions d'incidence

$$\begin{aligned}&\overline{\Sigma^0} = \Sigma^0,\\ &\overline{\Sigma^1} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \qquad \overline{\Sigma^2} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2, \qquad \overline{\Sigma^3} = \mathrm{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3.\end{aligned}$$

Expliquons pourquoi $\dim \Sigma^3 = 14$; le groupe d'isotropie de σ est constitué des éléments A, B de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ satisfaisant $A\sigma = \sigma B$. Puisque le lieu d'indétermination de $A\sigma$ est constitué des trois points $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ et $(0:0:1)$ l'élément B permute ces trois points, il est donc modulo permutation des coordonnées de la forme $\left(\alpha x : \beta y : \frac{z}{\alpha\beta}\right)$; il s'en suit qu'à permutation des coordonnées près $A = \left(\frac{x}{\alpha} : \frac{y}{\beta} : \alpha\beta z\right)$. En particulier la dimension du groupe d'isotropie de σ est 2 et la dimension de $\Sigma^3 = \mathcal{O}(\sigma)$ est $16 - 2 = 14$.

Les éléments de Σ^i possèdent i points d'indétermination et pour i non nul $3 - i$ points base infiniment proches.

Cette description assure qu'il suffit de montrer que l'adhérence de Σ^3 est lisse le long de Σ^0 pour obtenir que l'ensemble des transformations birationnelles quadratiques est lisse dans l'ensemble des transformations rationnelles quadratiques, fait établi dans [CD].

La caractérisation, à composition à gauche et à droite près par un automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, des transformations birationnelles cubiques se fait aussi en étudiant la nature des courbes contractées ; elle est sensiblement plus compliquée (32 modèles). Alors que Bir_2 est lisse et irréductible, il n'en est pas de même pour l'ensemble des transformations birationnelles cubiques vu comme sous-ensemble de $\mathbb{P}^{29}(\mathbb{C})$ (le projectivisé de l'espace des polynômes homogènes de degré 3 en 3 variables s'identifie à $\mathbb{P}^{29}(\mathbb{C})$)(*voir*[CD]).

Notons que Pan, Ronga et Vust ont étudié les transformations birationnelles quadratiques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ dans lui-même ([PRV01]).

4. Promenade dans les groupes finis, détour par les courbes invariantes

L'impulsion donnée par Cremona dans le domaine des transformations birationnelles conduit à la naissance de la géométrie algébrique dont le groupe principal au sens de Klein, est le groupe des transformations birationnelles ([Kle91]). C'est dans un travail de Bertini que cette géométrie apparaît pour la première fois ([Ber77]) : deux transformations birationnelles sont considérées comme identiques lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Dans cet article Bertini classifie les involutions birationnelles. Il y a quatre types de telles transformations de Cremona à conjugaison birationnelle près : les automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'ordre 2, les involutions de Jonquières et les involutions de Geiser et Bertini (dont on peut trouver une définition dans [DI] par exemple). La démonstration de Bertini est considérée comme incomplète ; en 2000 Bayle et Beauville obtiennent *via* d'autres méthodes ce même résultat ([BB00]). Ils montrent de plus que les classes de conjugaison des sous-groupes finis cycliques d'ordre 2 sont uniquement déterminées par le type birationnel des courbes de points fixes de genre positif.

En 1894, Castelnuovo établit, à l'aide de la théorie des systèmes linéaires adjoints, que toute transformation de Cremona d'ordre fini préserve ou bien un pinceau de droites, ou bien un réseau de droites, ou bien un système linéaire de cubiques possédant au plus huit points bases ([CA2]). Un résultat analogue avait été annoncé par Kantor dans le mémoire qui lui a valu le prix de l'Académie des Sciences de Naples en 1883. Kantor poursuit son investigation et donne un énoncé similaire pour tout sous-groupe fini de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$; il entreprend alors de classifier ces groupes ([Kan95]). Wiman étoffe cette liste qui demeure incomplète ([Wim96]) ; elle est de plus redondante au sens où elle contient des sous-groupes birationnellement conjugués.

Dans les années 2000 l'étude des sous-groupes finis de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ reprend, citons par exemple [dF04, Bea07, Bla09]. Plus récemment Dolgachev et Iskovskikh ont apporté leur contribution en s'appuyant sur le théorème suivant ([Man67, Isk79]). Soit G un sous-groupe fini de transformations de Cremona. Il existe une surface rationnelle lisse S et une transformation birationnelle $\varphi\colon \mathrm{S} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telles que $\varphi^{-1}\mathrm{G}\varphi$ soit contenu dans le groupe des automorphismes de S; de plus on peut supposer que

- ou bien S est une *surface de Del Pezzo*[3],
- ou bien il existe un *fibré en coniques*[4] $\mathrm{S} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ invariant par $\varphi^{-1}\mathrm{G}\varphi$.

Dolgachev et Iskovskikh caractérisent les couples (G, S) satisfaisant l'une des possibilités précédentes ; ils utilisent ensuite la théorie de Mori pour déterminer quand deux tels couples sont birationnellement conjugués.

On a précédemment mentionné que les classes de conjugaison des sous-groupes finis cycliques d'ordre 2 de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ sont déterminées par le type birationnel des courbes de points fixes de genre positif ([BB00]) ; ceci entraîne en particulier que le nombre de ces classes de conjugaison est infini. Étant donné un entier positif n on peut se demander combien vaut le nombre $\nu(n)$ de classes de conjugaison d'une transformation birationnelle d'ordre n dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. De Fernex répond à cette question pour n premier ([dF04]) ; on trouve dans [Bla07] une réponse pour tout n. Pour $n = 3$, $n = 5$ et n pair, $\nu(n)$ est infini. Si n est un entier impair distinct de 3 et 5 alors $\nu(n)$ est fini ; de plus $\nu(9) = 3$, $\nu(15) = 9$ et $\nu(n) = 1$ sinon.

Dans [DI] les auteurs mentionnent quelques problèmes ouverts comme la description des variétés algébriques qui paramètrent les classes de conjugaison des sous-groupes finis de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$; Blanc donne une réponse à cette question dans deux cas particuliers ([Bla09, Bla]).

Revenons aux travaux de Castelnuovo : il caractérise les éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ qui fixent point par point une courbe irréductible de genre strictement supérieur à 1; une telle transformation est ou bien une transformation de Jonquières, ou bien une transformation d'ordre 2, 3 ou 4 (*voir* [Cas92]). En reprenant la méthode utilisée par Castelnuovo, Blanc, Pan et Vust précisent ce résultat ([BPV09]). Le cas des courbes de genre 1 a été traité avec des techniques différentes ([BPV09]).

Avec un point de vue de dynamique complexe et non pas de géométrie algébrique, Diller, Jackson et Sommese classifient les courbes invariantes par une transformation birationnelle d'une surface projective complexe ([DJS07]).

5. Passage par la dynamique, les groupes infinis dénombrables ayant la propriété (T) et les groupes nilpotents

Considérons les éléments $f = (xy : z^2 : yz)$ et $g = (x^3 : y^2z : xyz)$ de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. On peut vérifier que $gfg^{-1} = (x^5y^7 : z^{12} : x^2y^3z^7)$; en particulier $\deg(gfg^{-1}) \neq \deg f$: le degré algébrique n'est pas un invariant birationnel. En revanche le taux de croissance des degrés est un invariant birationnel : soient f

[3] *i.e.* S est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ou à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou encore à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ éclaté en $1 \leqslant r \leqslant 8$ points p_i, ces points étant en « position générale ».

[4] Un fibré en coniques sur une surface rationnelle S est une application régulière de S dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont toutes les fibres sont abstraitement isomorphes à une conique plane.

et g deux transformations de Cremona ; il existe deux constantes positives α, β telles que

$$\alpha \deg f^n \leqslant \deg(gf^ng^{-1}) \leqslant \beta \deg f^n, \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

d'où l'introduction de la notion de premier degré dynamique. Si f désigne une transformation de Cremona, le *premier degré dynamique* de f est la quantité

$$\lambda(f) = \lim(\deg f^n)^{1/n}.$$

Dans les années 2000, Diller et Favre ont classifié, à conjugaison birationnelle près, les éléments de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ (*voir* [DF01]) : une transformation birationnelle f de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vérifie, à conjugaison birationnelle près, une et une seule des propriétés suivantes

– la suite $(\deg f^n)_n$ est bornée, f est un automorphisme d'une surface rationnelle S et un itéré de f appartient à la composante neutre du groupe des automorphismes de S;

– $\deg f^n \sim n$ alors f n'est pas un automorphisme et f préserve une unique fibration qui est rationnelle ;

– $\deg f^n \sim n^2$ auquel cas f est un automorphisme préservant une unique fibration qui est *elliptique*[5] ;

– $\deg f^n \sim \lambda(f)^n$, $\lambda(f) > 1$.

Dans les trois premières éventualités $\lambda(f)$ vaut 1, dans la dernière $\lambda(f)$ est strictement supérieur à 1; pour plus de détails concernant le dernier cas se référer à [DF01].

Donnons quelques exemples. Si f est un automorphisme du plan projectif complexe ou une transformation de Cremona d'ordre fini, la suite $(\deg f^n)_n$ est bornée. La transformation $f = (xz : xy : yz)$ vérifie $\deg f^n \sim n$ (se placer dans la carte affine $z = 1$). Enfin l'automorphisme de Hénon f défini par $(x, y^3 - x)$ satisfait $\deg f^n = 3^n$.

En s'appuyant, entre autres, sur cette classification on peut démontrer le résultat suivant ([Dés]). Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et ρ un plongement de Γ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$; à conjugaison birationnelle près ρ est le plongement canonique ou la contragrédiente (*i.e.* l'involution $u \mapsto {}^{\mathrm{t}}u^{-1}$). On en déduit que si Γ désigne un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ alors Γ ne se plonge pas dans le groupe de Cremona dès que $n \geqslant 4$ (*voir* [Dés]). Dans le même esprit si G désigne un sous-groupe infini dénombrable de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ayant la *propriété* (T) *de Kazhdan*[6], G est birationnellement conjugué à un sous-groupe d'automorphismes du plan projectif complexe ([Can06]).

Après les groupes semi-simples on peut décrire les groupes *nilpotents*[7], la classification de Diller et Favre entrant encore en jeu. Soient G un groupe nilpotent que l'on suppose ne pas être abélien à indice fini près et ρ un morphisme injectif de G dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. D'après ([Dés]), le groupe G satisfait l'une des propriétés suivantes

[5] Une fibration elliptique sur une surface S est un morphisme de S dans une surface de Riemann dont les fibres générales sont des courbes elliptiques.

[6] Un groupe G a la propriété (T) de Kazhdan si toute action continue de G sur un espace de Hilbert par déplacement unitaire a un point fixe global.

[7] Soit G un groupe. Posons $\mathrm{G}^{(0)} = \mathrm{G}$ et $\mathrm{G}^{(k)} = [\mathrm{G}, \mathrm{G}^{(k-1)}]$ pour $k \geqslant 1$. On dit que G est nilpotent s'il existe un entier k tel que $\mathrm{G}^{(k)}$ soit trivial.

– tous les éléments de G sont périodiques ;
– le groupe $\langle aba^{-1}b^{-1} \,|\, a,\, b \in \mathrm{G}\rangle$ est abélien à indice fini près.

On en déduit des obstructions à ce que certains groupes se plongent dans le groupe de Cremona ([Dés]) : soit G un groupe contenant un sous-groupe nilpotent H tel que $\langle aba^{-1}b^{-1} \,|\, a,\, b \in \mathrm{H}\rangle$ ne soit pas abélien à indice fini près. Supposons que H contienne un élément non périodique ; alors G ne se plonge pas dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

6. Excursion dans le monde de certains groupes abéliens, dans celui des feuilletages, arrivée dans le groupe d'automorphismes

Les sous-groupes abéliens maximaux (pour l'inclusion) non dénombrables de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ont été étudiés dans [Dés]. Avant de rappeler une propriété cruciale de ces groupes introduisons la notion de feuilletages. Soit S une surface complexe compacte. Un *feuilletage algébrique* (éventuellement singulier) sur S est la donnée d'une famille $(\chi_i)_i$ de champs de vecteurs polynomiaux à zéros isolés définis sur les ouverts $\mathcal{U}_i$ d'un recouvrement de S et soumis à des conditions de compatibilité : il existe g_{ij} une fonction polynomiale ne s'annulant pas sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ telle qu'on ait $\chi_i = g_{ij}\chi_j$ sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Par exemple un champ de vecteurs rationnel non trivial sur S définit un feuilletage sur S.

Si G est un sous-groupe abélien non dénombrable, il existe un champ de vecteurs rationnel χ tel que

$$f_*\chi = \chi, \qquad\qquad \forall\, f \in \mathrm{G};$$

en particulier G préserve un feuilletage (*voir* [Dés]).

Si S désigne une surface complexe compacte et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur S, on peut considérer le groupe $\mathrm{Bir}(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathrm{S}, \mathcal{F})$) des transformations birationnelles (resp. polynomiales) sur S laissant $\mathcal{F}$ invariant. En général $\mathrm{Bir}(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ sont finis et coïncident ; dans [CF03] Cantat et Favre étudient les feuilletages qui ne satisfont pas cette philosophie. En utilisant leur classification et en ajoutant l'hypothèse de maximalité on obtient l'énoncé suivant ([Dés]) : si G est un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ alors

– ou bien G possède des éléments périodiques ;
– ou bien G préserve une fibration rationnelle.

Notons que si φ désigne un automorphisme de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ et G un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ alors $\varphi(\mathrm{G})$ est encore un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. En étudiant certains sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ on montre que, modulo certaines transformations, le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et l'involution $\sigma = (yz : xz : xy)$ sont fixés point par point par φ. Le théorème 1 permet alors de caractériser les automorphismes du groupe de Cremona ([Dés]) : soit φ un automorphisme de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$; il existe une transformation birationnelle ψ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et un automorphisme τ du corps $\mathbb{C}$ tels que

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}), \qquad\qquad \forall\, f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2),$$

où $\tau(g)$ désigne l'élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ obtenu en faisant agir τ sur les coefficients de g.

Remarquons qu'en utilisant la description des plongements de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ mentionnée précédemment on peut caractériser le semi-groupe des endomorphismes de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ (*voir* [Dés]). En particulier le groupe de Cremona est hopfien, *i.e.* tout endormophisme surjectif de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est injectif.

7. Navigation entre les groupes linéaires et le groupe de Cremona

On peut « comparer » le groupe de Cremona aux groupes linéaires. Commençons par remarquer que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ne se plonge pas dans $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ où $\Bbbk$ désigne un corps de caractéristique nulle ([CD]). C'est une application du lemme suivant dû à Birkhoff ([Bir36]) : soient $\Bbbk$ un corps de caractéristique nulle et A, B et C trois éléments de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tels que C soit d'ordre premier p et $[A,B]=C$, $[A,C]=[B,C]=\mathrm{id}$, alors $p\leqslant n$. On suppose qu'il existe un plongement de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ dans $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, on applique le lemme de Birkhoff aux images des transformations

$$(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/p}x,y),\qquad\qquad (x,xy),\qquad\qquad (x,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/p}y),$$

où p désigne un nombre premier et on obtient $p\leqslant n$; ceci étant possible pour tout p premier, on aboutit à une contradiction.

Considérons un élément générique M de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (*i.e.* un élément dont les valeurs propres sont distinctes) et $\mathrm{Cent}(M)$ son centralisateur

$$\mathrm{Cent}(M)=\{A\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})\,|\,AM=MA\};$$

un tel élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable donc $\mathrm{Cent}(M)\simeq(\mathbb{C}^*)^{n-1}$.

On a un résultat analogue pour les transformations birationnelles ([Can06]) : soit f un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ de premier degré dynamique strictement supérieur à 1. Si g appartient au centralisateur de f

$$\mathrm{Cent}(f)=\{h\in\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)\,|\,hf=fh\},$$

il existe un entier m strictement positif et un entier n tels que $g^m=f^n$.

Rappelons que si $\Bbbk$ désigne un corps de caractéristique nulle et si Γ est un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ alors

– ou bien Γ contient un groupe libre non abélien ;
– ou bien Γ contient un sous-groupe *résoluble*[8] d'indice fini.

Cette propriété a été démontrée par Tits ([Tit72]) ; on dit que $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ satisfait l'alternative de Tits. Cantat étudie les sous-groupes de type fini du groupe de Cremona et en déduit que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ satisfait l'alternative de Tits ([Can06]).

[8] Soit G un groupe ; posons $\mathrm{G}_{(0)}=\mathrm{G}$ et $\mathrm{G}_{(k)}=[\mathrm{G}_{(k-1)},\mathrm{G}_{(k-1)}]$ pour $k\geqslant 1$. Le groupe G est résoluble s'il existe un entier k tel que $\mathrm{G}_{(k)}$ soit trivial.

8. D'autres horizons

Nous allons esquisser le fait que certaines questions traitées par les dynamiciens apparaissent naturellement chez les physiciens et montrer qu'à partir de deux transformations relativement simples, on débouche sur des problèmes compliqués. Notons M_n l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n)$ son projectivisé. Étant donné un élément $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de M_n on peut considérer

– l'application J qui à $A = (a_{ij})$ associe la matrice (a_{ij}^{-1});
– l'application I qui à A associe A^{-1}.

Les involutions I et J ainsi que la composée $K = I \circ J$ apparaissent naturellement en mécanique statistique ([BMV91]). Dans ce contexte on est amené à étudier le comportement des itérés de K (*voir* [AAdB$^+$99, AAdBM99, AdMV06, BV99]), en particulier le degré de complexité des itérés de K

$$\lambda(K) = \lim_{p \to +\infty} (\deg K^p)^{1/p}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n)$ est de dimension $n^2 - 1$, que I est de degré $n-1$ et J de degré $n^2 - 1$; par suite dès que n n'est plus « petit » il devient délicat de calculer ne serait-ce que K^2. Lors de l'étude de modèles plus spécifiques apparaissent des symétries supplémentaires d'où l'introduction de sous-espaces S de $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n)$ invariants par K (*voir* [AdMV02]). En général on a l'inégalité $\deg K_{|S} \leqslant \deg K$; on étudie alors $\lambda(K_{|S})$. Un exemple provient des modèles de Potts pour lesquels on peut se restreindre à l'espace des matrices cycliques C_n, *i.e.* à l'espace des matrices du type

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{n-1} \\ m_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & m_1 \\ m_1 & & m_{n-1} & m_0 \end{bmatrix}$$

Le comportement de $\deg K^n_{|\mathrm{C}_q}$ est déterminé dans [BV99] ; la restriction de K aux matrices symétriques cycliques est aussi étudiée ([AdMV06, BK08a]).

Soit f une transformation de Cremona ; notons d_n le degré de l'itéré n-ième de f. La série $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u^n$ a un rayon de convergence non nul et ce rayon est $\frac{1}{\lambda(f)}$ (*voir* [AdMV06]). Signalons la conjecture suivante issue d'expériences numériques (*voir* par exemple [AdMV06, BV99]) : la fonction génératrice φ est rationnelle. Cette conjecture est fausse : Hasselblatt et Propp produisent dans ([HP07]) des contre-exemples en dimension 2 et 3; Bedford et Kim généralisent ces exemples en toutes dimensions ([BK08b]).

9. Références

[AAdB+99] N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. From Yang-Baxter equations to dynamical zeta functions for birational transformations. In *Statistical physics on the eve of the 21st century*, volume 14 of *Ser. Adv. Statist. Mech.*, pages 436–490. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.

[AAdBM99] N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, and J.-M. Maillard. Growth-complexity spectrum of some discrete dynamical systems. *Phys. D*, 130(1-2) : 27-42, 1999.

[AC02] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[AdMV02] J.-Ch. Anglès d'Auriac, J.-M. Maillard, and C. M. Viallet. A classification of four-state spin edge Potts models. *J. Phys. A*, 35(44) : 9251-9272, 2002.

[AdMV06] J.-Ch. Anglès d'Auriac, J.-M. Maillard, and C. M. Viallet. On the complexity of some birational transformations. *J. Phys. A*, 39(14) : 3641-3654, 2006.

[BB00] L. Bayle and A. Beauville. Birational involutions of $\mathbf{P}^2$. *Asian J. Math.*, 4(1) : 11-17, 2000. Kodaira's issue.

[Bea07] A. Beauville. *p*-elementary subgroups of the Cremona group. *J. Algebra*, 314(2) : 553-564, 2007.

[Ber77] E. Bertini. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. *Annali di Mat.*, 8 : 244-286, 1877.

[Bir36] G. Birkhoff. Lie groups simply isomorphic with no linear group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42(12) : 883-888, 1936.

[BK08a] E. Bedford and K. Kim. Degree growth of matrix inversion : birational maps of symmetric, cyclic matrices. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(4) : 977-1013, 2008.

[BK08b] E. Bedford and K. Kim. Linear recurrences in the degree sequences of monomial mappings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(5) : 1369-1375, 2008.

[Bla] J. Blanc. Elements and cyclic subgroups of finite order of the Cremona group, `arxiv : 0809.4673`, 2008. *À paraître dans Comment. Math. Helv.*

[Bla07] J. Blanc. The number of conjugacy classes of elements of the Cremona group of some given finite order. *Bull. Soc. Math. France*, 135(3) : 419-434, 2007.

[Bla09] J. Blanc. Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane. *Groups Geom. Dyn.*, 3(2) : 215-266, 2009.

[BMV91] M.-P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Integrable Coxeter groups. *Phys. Lett. A*, 159(4-5) : 221-232, 1991.

[BPV09] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust. On birational transformations of pairs in the complex plane. *Geom. Dedicata*, 139 : 57-73, 2009.

[BV99] M.-P. Bellon and C.-M. Viallet. Algebraic entropy. *Comm. Math. Phys.*, 204(2) : 425-437, 1999.

[Can06] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *preprint*, 2006.

[Cas92] G. Castelnuovo. Sulle trasformazioni cremoniane del piano, che ammettono una curva fiera. *Rend. Accad. Lincei*, 1892.

[Cas94] G. Castelnuovo. Sulla razionalità delle involuzioni piane. *Math. Ann.*, 44(1) : 125-155, 1894.

[Cas01] G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti del la R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36 : 861-874, 1901.

[CD] D. Cerveau and J. Déserti. Transformations birationnelles de petit degré, `arxiv : 0811.2325`, 2008.

[CF03] S. Cantat and C. Favre. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 : 199-235, 2003.

[Cre64] L. Cremona. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna*, pages 18-21, 1864.

[Cre65a] L. Cremona. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Mem. dell' acc. d. sc. Bologna*, 5 : –35, 1865.

[Cre65b] L. Cremona. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Giorn. di matem*, 3 : 269-280, 363-376, 1865.

[Dés] J. Déserti. Quelques propriétés des transformations birationnelles du plan projectif complexe, `arxiv :0904.1395`, 2009.

[DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) : 1135-1169, 2001.

[dF04] T. de Fernex. On planar Cremona maps of prime order. *Nagoya Math. J.*, 174 : 1-28, 2004.

[DI] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group, `arxiv :math/0610595`, 2006. *Algebra, Arithmetic, and Geometry : Volume I : In Honor of Y.I. Manin. À paraître.*

[dJ64] E. de Jonquières. De la transformation géométrique des figures planes et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres. *Nouv. ann. de mathem.*, 3 : 97-111, 1864.

[dJ85a] E. de Jonquières. Solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 101 : 857-861, 1885.

[dJ85b] E. de Jonquières. Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 101 : 921-922, 1885.

[dJ86] E. de Jonquières. Étude sur une question d'analyse indéterminée. *Giorn. di matem*, 24 : 1-11, 1886.

[DJS07] J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) : 2793-2991 (electronic), 2007.

[Giz82] M. Kh. Gizatullin. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) : 909-970, 1134, 1982.

[HP07] B. Hasselblatt and J. Propp. Degree-growth of monomial maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(5) : 1375-1397, 2007.

[Hud27] H. P. Hudson. *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press. 1927.

[Isk79] V. A. Iskovskikh. Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(1) : 19-43, 237, 1979.

[Isk85] V. A. Iskovskikh. Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5(245)) : 255-256, 1985.

[Kan95] S. Kantor. Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. *Mayer & Müller, Berlin*, 1895.

[Kle91] F. Klein. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. *Ann. Sci. école Norm. Sup. (3)*, 18 : 87-102, 1891.

[Lor02] G. Loria. L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières. *Bibliotheca Mathematica*, 3 : 276-322, 1902.

[Lor04] G. Loria. Luigi Cremona et son œuvre mathématique. *Bibliotheca Mathematica*, 3 : 125-195, 1904.

[Mag33] L. F. Magnus. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie. *Berlin*, 1833.

[Man67] Ju. I. Manin. Rational surfaces over perfect fields. II. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114) : 161-192, 1967.

[Men86] M. Menghini. Notes on the correspondence between Luigi Cremona and Max Noether. *Historia Math.*, 13(4) : 341-351, 1986.

[Noe69] M. Noether. Ueber die auf Ebene eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. *Göttigen Nachr.*, pages 1-6, 1869.

[Noe70] M. Noether. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. *Math. Ann.*, 3(2) :161-227, 1870.

[Noe72] M. Noether. Zur Theorie der eindentigen Ebenentrasformationen. *Math. Ann.*, 5(4) : 635-639, 1872.

[Pan99] I. Pan. Une remarque sur la génération du groupe de Cremona. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(1) : 95-98, 1999.

[Pon22] J. V. Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures. *Bachelier, Paris*, 44 : 198, 1822.

[PRV01] I. Pan, F. Ronga, and T. Vust. Transformations birationnelles quadratiques de l'espace projectif complexe à trois dimensions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) : 1153-1187, 2001.

[Sch64] G. Schiaparelli. Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica. *Mem. dell' acc. d. sc. di Torino*, 21 : 227-319, 1864.

[Seg01] C. Segre. Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche. *Atti della R. Accad. dell' Scienze di Torino*, 26 : 377-383, 1901.

[Sey47] F. Seydewitz. Linear-Construction einer Curve doppelter Krümmung. *Archiv. der Mathem. und Physik*, 10 : 211, 1847.

[Tit72] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20 : 250-270, 1972.

[Wim96] A. Wiman. Zur theorie der endlichen gruppen von birazionalen transformationen in der ebene. *Math. Ann.*, 48 : 195-240, 1896.

Un grand merci à Dominique Cerveau pour ses relectures méticuleuses, ses suggestions et sa patience. Je remercie Laurent Bonavero pour son enthousiasme, ses suggestions et son regard aiguisé ainsi que Julien Grivaux pour ses remarques. Merci à Eric Bedford, c'est suite à nos conversations qu'est née l'idée de ce dernier paragraphe. Je remercie Zindine Djadli de m'avoir proposé et encouragée à écrire ce texte. **« Un sourire est [...] l'essentiel », Saint-Exupéry.**