

**Dominique CERVEAU**

**Julie DÉSERTE**

---

**TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES  
DE PETIT DEGRÉ**

---

*Dominique* CERVEAU

Membre de l'Institut Universitaire de France. IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France.

*E-mail* : dominique.cerveau@univ-rennes1.fr

*Julie* DÉSERTI

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France.

*E-mail* : jdeserti@gmail.com

---

***Classification mathématique par sujets (2000).*** — 14E07, 14E05, 37F10, 37F50.

***Mots clefs.*** — CREMONA group, rational map, birational map, algebraic foliation, birational flow, dynamical degree, algebraic stability.

---

# TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE PETIT DEGRÉ

**Dominique CERVEAU, Julie DÉSERTE**

**Résumé.** — Depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle on sait que toute transformation birationnelle du plan projectif complexe dans lui-même, encore appelée transformation de CREMONA, s'écrit comme la composée de transformations birationnelles quadratiques ; ceci a motivé notre travail qui porte essentiellement sur ces transformations.

Nous établissons des propriétés de type algébriques comme la classification des groupes à un paramètre de transformations de CREMONA quadratiques ou encore la lissité de l'espace des transformations birationnelles de degré 2 dans l'espace des transformations rationnelles : ceci nécessite une étude détaillée de l'action de  $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}))^2$  sur cet espace. On peut voir qu'un nombre fini de transformations de CREMONA quadratiques choisies génériquement engendrent un groupe libre. Par ailleurs nous montrons que si  $f$  est une transformation birationnelle de degré 2 ou un automorphisme non trivial du plan projectif complexe, le sous-groupe normal engendré par  $f$  est le groupe des transformations de CREMONA tout entier ; nous en déduisons que ce groupe est parfait.

Nous démontrons aussi des propriétés de nature dynamique : en suivant une idée de GUILLOT nous implantons aux transformations birationnelles de degré 2 des invariants propres aux feuilletages ce qui nous permet par exemple d'obtenir l'énoncé suivant : si deux transformations de CREMONA quadratiques génériques sont birationnellement conjuguées, elle le sont linéairement ; nous nous intéressons à la présence ou non « d'objets invariants » : courbes, feuilletages, fibrations.

Enfin nous étudions les transformations de CREMONA cubiques ; en considérant les différentes configurations possibles de courbes contractées nous en donnons « la classification ». Ceci nous permet de montrer que l'ensemble des transformations birationnelles exactement de degré 3 est irréductible, et en fait rationnellement connexe.

**Abstract.** — Since the end of the XIXth century, we know that each birational map of the complex projective plane is the product of a finite number of quadratic birational maps of the projective plane; this motivates our work which essentially deals with these quadratic maps. We establish algebraic properties such as the classification of one parameter groups of quadratic birational maps or the smoothness of the set of quadratic birational maps in the set of rational maps. We prove that a finite number of generic quadratic birational maps generates a free group. We show that if  $f$  is a quadratic birational map or an automorphism of the projective plane, the normal subgroup generated by  $f$  is the full group of birational maps of the projective plane, which implies that this group is perfect. We study some dynamical properties: following an idea of GUILLOT, we translate some invariants for foliations in our context, in particular we obtain that if two generic quadratic birational maps are birationally conjugate, then they are conjugate by an automorphism of the projective plane. We are also interested in invariant objects; curves, foliations, fibrations. We study birational maps of degree 3 and, by considering the different possible configurations of the exceptional curves, we give the "classification" of these maps. We can deduce from it that the set of the birational maps of degree 3 exactly is irreducible, in fact rationally connected.

*À la mémoire de Felice RONGA qui aurait sans doute aimé ce texte,  
D. C.*

*À ceux dont, par pudeur, je parle peu,  
avec une pensée particulière pour celui qui s'est éclipsé,  
J. D.*



# TABLE DES MATIÈRES

|  |     |
|--|-----|
| <b>Introduction</b> .....  | 1   |
| <b>1. Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques</b> .....                              | 23  |
| 1.1. Quelques définitions et notations .....   | 23  |
| 1.2. Transformations rationnelles quadratiques .....   | 25  |
| 1.3. Critère de birationnalité .....   | 26  |
| 1.4. Relations et transformations birationnelles, second critère de birationnalité .....                 | 31  |
| 1.5. Quelques orbites sous l'action gauche-droite .....  | 37  |
| 1.6. Conditions d'incidence; lissité de $\text{Bir}_2$ et non lissité de $\overline{\text{Bir}}_2$ ..... | 43  |
| <b>2. Germes de flots birationnels quadratiques</b> .....  | 49  |
| 2.1. Généralités sur les germes de flots birationnels quadratiques .....                                 | 49  |
| 2.2. Classification des germes de flots birationnels quadratiques .....                                  | 61  |
| <b>3. Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les <math>\Sigma^i</math></b> .....   | 91  |
| 3.1. Généralités .....   | 91  |
| 3.2. Transformations birationnelles quadratiques et feuilletages .....                                   | 94  |
| 3.3. Relations de type LEFSCHETZ, BAUM-BOTT .....  | 96  |
| 3.4. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ .....                        | 100 |
| 3.5. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\Sigma^3$ .....  | 101 |
| 3.6. Conjugaison birationnelle entre automorphismes de HÉNON .....                                       | 105 |
| <b>4. Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques</b> .....           | 107 |
| 4.1. Stabilité algébrique .....  | 107 |
| 4.2. Feuilletages et courbes invariants pour des transformations du type $A\sigma$ .....                 | 109 |
| 4.3. Exemples de transformations quadratiques préservant une fibration rationnelle .....                 | 121 |
| 4.4. Transformations ayant une courbe de points fixes .....  | 122 |
| 4.5. Points d'indétermination des itérés, points périodiques .....                                       | 124 |
| 4.6. Transformations birationnelles quadratiques de carré quadratique .....                              | 131 |
| <b>5. Propriétés algébriques du groupe de CREMONA</b> .....  | 137 |
| 5.1. Le groupe de CREMONA ne se plonge pas dans un $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ .....                       | 137 |
| 5.2. Centralisateur d'une transformation $A\sigma$ générique .....                                       | 138 |
| 5.3. Construction de sous-groupes libres .....   | 140 |
| 5.4. Au sujet de la simplicité .....   | 141 |
| 5.5. Une version un peu plus forte du Théorème de NETHER .....   | 145 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>6. Transformations birationnelles de degré 3</b> .....                 | 147 |
| 6.1. Généralités .....  | 147 |
| 6.2. « Classification » des transformations birationnelles cubiques ..... | 149 |
| 6.3. Irréductibilité de $\mathring{\text{Bir}}_3$ .....                   | 168 |
| 6.4. Décomposition de $\text{N}\mathring{\text{ETHER}}$ .....             | 173 |
| 6.5. Transformations birationnelles cubiques et feuilletages .....        | 174 |
| <b>A. Démonstration de la Proposition 6.14</b> .....                      | 177 |
| A.1. Première étape .....   | 177 |
| A.2. Deuxième étape .....   | 185 |
| <b>B. En guise d'épilogue</b> .....                                       | 191 |
| <b>Index</b> .....  | 193 |
| <b>Index des notations</b> .....  | 195 |
| <b>Bibliographie</b> .....  | 197 |

## INTRODUCTION

**Préliminaires : groupe de CREMONA.** L'étude systématique du groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe dans lui-même, encore appelé groupe de CREMONA, prend son essor dans les années 1860. Parmi les protagonistes on trouve CREMONA, NÆTHER, DE JONQUIÈRES etc. Leur approche repose sur une correspondance entre les transformations birationnelles et certains systèmes de courbes rationnelles que nous allons mentionner. Une **transformation rationnelle**  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans lui-même est une transformation de la forme

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (f_0(x_0, x_1, x_2) : f_1(x_0, x_1, x_2) : f_2(x_0, x_1, x_2))$$

les  $f_i$  désignant des polynômes homogènes de même degré sans facteur commun. Le degré de  $f$  est par définition le degré des  $f_i$ . Une **transformation birationnelle** de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans lui-même ou **transformation de CREMONA** est une transformation rationnelle admettant un inverse rationnel. Dans la suite pour alléger le texte nous notons  $\mathbb{P}^n$  au lieu de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Nous désignons par  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$  le groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^n$  dans lui-même. Si

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

est une transformation birationnelle, le **réseau homaloïdal** associé à  $f$  est le système de courbes  $\mathcal{H}_f$  défini par

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$$

avec  $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2$ ; c'est l'image réciproque par  $f$  du réseau de droites

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0.$$

En particulier chaque courbe du réseau  $\mathcal{H}_f$  est rationnelle. Les points base de  $\mathcal{H}_f$  sont les points par lesquels passent toutes les courbes du réseau; on les appelle aussi **points base** de  $f$ . Ils peuvent être dans  $\mathbb{P}^2$  ou infiniment proches<sup>(1)</sup> de  $\mathbb{P}^2$ ; dès que l'un de ces points n'est pas propre il appartient à un  $k$ -ième voisinage infinitésimal d'un point base. Les points base propres

---

1. Soient  $S$  une surface et  $m$  un point de  $S$ . Le diviseur exceptionnel  $E$  obtenu en éclatant  $m$  est appelé **premier voisinage infinitésimal** de  $m$  et les points de  $E$  sont dits **infiniment proches** de  $m$ . Le  $k$ -ième voisinage infinitésimal de  $m$  est l'ensemble des points contenus dans le premier voisinage d'un certain point du  $(k-1)$ -ième voisinage infinitésimal de  $m$ . Par opposition aux points infiniment proches, les points de  $S$  sont appelés **points propres**.

de  $f$  sont les **points d'indétermination**, *i.e.* ce sont les zéros communs des  $f_i$ ; ces points sont les points éclatés par  $f$ . La multiplicité au point base  $m_i$  de  $f$  est la multiplicité d'une courbe générique de  $\mathcal{H}_f$  en  $m_i$ , *i.e.* l'ordre en  $m_i$  d'un élément générique de  $\mathcal{H}_f$ .

On a vu qu'à toute transformation birationnelle on peut associer un réseau homaloïdal mais il n'y a pas unicité :

**Théorème 1 ([89]).** — *Un réseau homaloïdal définit une infinité de transformations birationnelles, chacune pouvant être obtenue à partir d'une autre via composition à gauche par un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ .*

Ainsi le point de vue homaloïdal conduit à ce que nous appellerons la conjugaison gauche-droite.

**Exemples.** — *i.* Considérons la transformation birationnelle, appelée **involution de CREMONA**, définie par

$$\sigma : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1).$$

Les points d'indétermination de  $\sigma$  sont  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$ . Les transformations birationnelles dont le réseau homaloïdal est constitué des coniques passant par les points

$$(1 : 0 : 0), \quad (0 : 1 : 0) \quad \text{et} \quad (0 : 0 : 1)$$

sont les transformations de la forme  $A\sigma$  avec  $A$  dans  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ .

*ii.* Soit  $\mathcal{S}_1$  le réseau homaloïdal formé des coniques passant par  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et tangentes à la droite d'équation  $x_2 = 0$ . Les transformations birationnelles ayant  $\mathcal{S}_1$  pour réseau homaloïdal sont du type  $A\rho$  avec  $A \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  et

$$\rho : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0x_1 : x_2^2 : x_1x_2)$$

dont les points d'indétermination sont  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 1 : 0)$ .

*iii.* Enfin soit  $\mathcal{S}_2$  le réseau homaloïdal constitué des coniques passant par  $(0 : 0 : 1)$ , tangentes et osculatrices à  $x_0 = 0$  en ce point; les transformations birationnelles ayant  $\mathcal{S}_2$  pour réseau homaloïdal s'écrivent  $A\tau$  où  $A$  désigne un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  et

$$\tau : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 - x_0x_2).$$

Comme nous le verrons les involutions  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\tau$  jouent un rôle essentiel dans le groupe de CREMONA.

Soient  $f$  une transformation birationnelle et  $\mathcal{H}_f$  le réseau homaloïdal associé à  $f$ . Les courbes de  $\mathcal{H}_f$  satisfont les équations suivantes ([1]) :

$$(0.0.1) \quad \sum_{i=1}^q \mu_i^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{i=1}^q \mu_i = 3n - 3$$

où  $\mu_i$  désigne la multiplicité aux points base (pas nécessairement propres),  $q$  le nombre de points base et  $n$  le degré de  $f$ . La première équation traduit le fait que deux courbes génériques

du réseau homaloïdal se coupent en les points base et un unique autre point ; la seconde exprime que les courbes du réseau sont rationnelles.

**Génération du groupe de CREMONA.** À partir, entre autres, de (0.0.1) NÆTHER énonce en 1871 le

**Théorème 2 (Théorème de Næther).** — *Le groupe de CREMONA est engendré par le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ , i.e.  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ , et l'involution*

$$\sigma : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1).$$

En particulier toute transformation birationnelle du plan projectif complexe qui n'est pas un automorphisme est la composée d'un certain nombre de transformations quadratiques, i.e. de degré 2.

La démonstration donnée par NÆTHER comportait des lacunes ([80, 81, 82]) ; il faudra attendre 30 ans et CASTELNUOVO pour en avoir une complète (voir [26]). Depuis il y a eu de nombreuses preuves de ce résultat ; pour une chronologie détaillée on peut consulter [1].

Soit  $\varphi : \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  le morphisme défini par

$$\varphi(A) = A \text{ sur } \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \sigma \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

La description du noyau de  $\varphi$ , i.e. la description des relations dans le groupe de CREMONA, n'aura pas lieu avant les années 1980 (voir [55]) ; ce noyau est un groupe libre : c'est une conséquence directe de la simplicité des facteurs  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et d'un théorème de KUROŠ ([90]).

**Remarque 3.** — Il n'y a pas d'analogue au Théorème de NÆTHER en dimension supérieure comme en témoigne l'énoncé suivant dû à PAN :

**Théorème 4 ([83]).** — *Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Tout ensemble de générateurs du groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^n$  dans lui-même doit contenir un nombre infini et non dénombrable de transformations de degré strictement supérieur à 1.*

Notons qu'HUDSON avait démontré un résultat analogue pour  $n = 3$  via des techniques différentes ([32], Book II, Chapter VII, §3).

**Sous-groupes spéciaux du groupe de CREMONA : sous-groupes finis, sous-groupes d'invariance...** Le groupe de JONQUIÈRES, noté dJ, est le groupe d'invariance de la fibration standard  $x_1 = \text{cte}$  ; il est isomorphe au produit semi-direct  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1)) \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ . Une **transformation de JONQUIÈRES** est un élément de dJ. Une telle transformation s'écrit en carte affine

$$\left( \frac{a(x_1)x_0 + b(x_1)}{c(x_1)x_0 + d(x_1)}, \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} \right)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}), \quad \begin{bmatrix} a(x_1) & b(x_1) \\ c(x_1) & d(x_1) \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1)).$$

Dans les années 1990 ISKOVSKIKH donne une présentation du groupe de CREMONA :

**Théorème 5 ([66]).** — *Le groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est engendré par le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  et le groupe de JONQUIÈRES.*

*De plus les relations dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  sont les relations internes à dJ, à  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  auxquelles s'ajoute la relation*

$$(\zeta e)^3 = \left( \frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1} \right)$$

où

$$\zeta : (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_0) \quad \text{et} \quad e : (x_0, x_1) \mapsto \left( x_0, \frac{x_0}{x_1} \right).$$

Alors que NETHER s'intéresse à la génération de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , BERTINI se consacre à la classification des involutions birationnelles à conjugaison birationnelle près ([11]); quelques années plus tard KANTOR entreprend de classer les sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  à conjugaison birationnelle près ([70]). Malgré les corrections apportées par WIMAN (voir [96]) cette classification resta longtemps incomplète et redondante. En 2000 BAYLE et BEAUVILLE présentent, dans [5], une nouvelle démonstration de la classification des involutions birationnelles ; dès lors de nouveaux résultats apparaissent dans le même esprit (citons par exemple [34, 6]). Pour une chronologie détaillée de l'étude des sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  on peut consulter [47] ; dans cet article DOLGACHEV et ISKOVSKIKH donnent la classification des sous-groupes finis du groupe de CREMONA. Leur démonstration repose sur le point suivant ([74, 65]) : si  $G$  désigne un sous-groupe fini de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  alors  $G$  est birationnellement conjugué à un sous-groupe de  $\text{Aut}(S)$  où  $S$  est une surface rationnelle satisfaisant une des propriétés suivantes :

- il existe un fibré en coniques <sup>(2)</sup>  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  invariant par  $G$  ;
- $S$  est de DEL PEZZO <sup>(3)</sup>.

Simultanément CASTELNUOVO étudie les transformations birationnelles qui fixent point par point une courbe de genre 1 :

**Théorème 6 ([25]).** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  non triviale fixant point par point une courbe irréductible de genre strictement supérieur à 1. Alors  $f$  est conjuguée à une transformation de JONQUIÈRES ou bien  $f$  est d'ordre 2, 3 ou 4.*

En 2006 BLANC, PAN et VUST donnent une version un peu plus précise de ce résultat en reprenant la même démarche que CASTELNUOVO :

---

2. Les fibres génériques d'un fibré en coniques sont de genre 0, les fibres singulières sont union de deux courbes rationnelles, *i.e.* les fibres sont de même nature que celles d'un vrai pinceau de coniques dans  $\mathbb{P}^2$ .

3. La surface  $S$  est une **surface de DEL PEZZO** si  $S$  est isomorphe à l'une des surfaces suivantes :  $\mathbb{P}^2$ , la quadrique  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , le plan projectif éclaté en  $1 \leq n \leq 8$  points  $p_i$ , ces points satisfaisant les conditions suivantes ([38]) :

- il n'y a pas trois alignés ;
- il n'y a pas six sur une conique ;
- si de plus  $n = 8$  les  $p_i$  ne sont pas sur une cubique singulière plane dont le point singulier serait un des  $p_i$ .

**Théorème 7 ([17]).** — Soit  $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation de CREMONA non triviale qui fixe point par point une courbe irréductible de genre strictement supérieur à 1. Alors  $f$  est conjuguée à une transformation de JONQUIÈRES ou bien  $f$  est d'ordre 2 ou 3. De plus dans le premier cas si  $f$  est d'ordre fini, c'est une involution.

Ils décrivent ensuite les sous-groupes de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  dont tous les éléments fixent point par point une courbe irréductible de genre  $g > 1$ . Avant d'énoncer leur résultat rappelons quelques définitions. Comme nous l'avons dit le groupe de JONQUIÈRES est le groupe d'invariance de la fibration standard  $x_1 = \text{cte}$ . Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{C}[x_1]$  qui n'est pas un carré ; on désigne par  $dJ_P$  le sous-groupe de dJ défini par :

$$dJ_P = \left\{ \left( \frac{a_1(x_1)x_0 + a_2(x_1)P(x_1)}{a_2(x_1)x_0 + a_1(x_1)}, x_1 \right) \mid a_i \in \mathbb{C}(x_1), a_1^2 - Pa_2^2 \neq 0 \right\}.$$

Remarquons que si  $f$  est un élément de  $dJ_P$  la courbe, en général hyperelliptique,  $x_0^2 = P(x_1)$  est fixée point par point par  $f$ . On peut ainsi réaliser n'importe quel genre pour les courbes de points fixes d'éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .

Soient  $m_1, \dots, m_7$  sept points de  $\mathbb{P}^2$  en position générale et  $L$  le système linéaire formé des cubiques passant par les  $m_i$ ; il est de dimension 2. Considérons le pinceau de courbes de  $L$  passant par un point générique  $m$  de  $\mathbb{P}^2$ . Les  $m_j$  et  $m$  en sont des points base et il passe par un neuvième point base que nous noterons  $\gamma(m)$ ; la transformation  $\gamma$  est une involution birationnelle de degré 8 appelée **involution de GEISER**. Les involutions de GEISER fixent point par point une courbe non hyperelliptique de genre 3 (voir [38]).

Soient  $m_1, \dots, m_8$  huit points de  $\mathbb{P}^2$  en position générale ; considérons le pinceau de cubiques  $\mathcal{C}$  passant par ces huit points. Il a un neuvième point base que nous noterons  $m_9$ . Soit  $m$  un point générique de  $\mathbb{P}^2$ ; le pinceau  $\mathcal{C}$  contient une unique cubique  $\mathcal{C}(m)$  passant par  $m$ . Considérons la loi de groupe sur  $\mathcal{C}(m)$  ayant  $m_9$  comme élément neutre. Posons  $\beta(m) = -m$ ; alors  $\beta$  définit une involution birationnelle de degré 17 qu'on appelle **involution de BERTINI**. Les involutions de BERTINI fixent point par point une courbe non hyperelliptique de genre 4 à modèle lisse sur un cône quadratique.

Pour finir considérons la surface de DEL PEZZO  $S$  de degré 1 donnée dans l'espace projectif à poids  $\mathbb{P}(3, 1, 1, 2)$  par

$$w^2 = x_2^3 + P(x_0, x_1), \quad P \text{ polynôme homogène de degré 6.}$$

La restriction de la transformation

$$(w : x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (w : x_0 : x_1 : \mathbf{j}x_2), \quad \mathbf{j} \neq 1, \quad \mathbf{j}^3 = 1,$$

définit un automorphisme  $\zeta$  d'ordre 3 de  $S$  dont l'ensemble des points fixes contient une courbe irréductible de genre 2 (voir [17]).

Ces transformations produisent des exemples de groupes finis fixant une certaine courbe.

**Théorème 8 ([17]).** — Soit  $G$  un sous-groupe non trivial de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Supposons qu'il existe une courbe irréductible  $C$  de genre strictement supérieur à 1 invariante point par point par chaque élément de  $G$ . Alors

- ou bien  $G$  est cyclique d'ordre 2 ou 3, engendré, à conjugaison près, par une involution de JONQUIÈRES, une involution de BERTINI, une involution de GEISER ou encore par l'automorphisme  $\varsigma$  d'ordre 3;
- ou bien  $G$  est conjugué à un sous-groupe d'un certain  $dJ_P$ .

En particulier lorsque  $G$  est infini,  $C$  est hyperelliptique et  $G$  est un groupe abélien conjugué à un sous-groupe de  $dJ$ .

Soit  $C$  une courbe irréductible de  $\mathbb{P}^2$ . On appelle **groupe de décomposition** de  $C$  le groupe des transformations de CREMONA qui fixent  $C$ ; le **groupe d'inertie** de  $C$ , noté  $\text{Ine}(C)$ , est le groupe des transformations birationnelles qui fixent  $C$  point par point.

Dans [86] PAN démontre le :

**Théorème 9 ([86]).** — Soient  $C$  une courbe irréductible lisse non rationnelle contenue dans le plan projectif complexe. Si  $f$  appartient au groupe de décomposition de  $C$  et n'appartient pas à  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ , alors  $C$  est de degré 3 et les points d'indétermination de  $f$  appartiennent à  $C$ .

Soient  $C$  une cubique lisse et  $m_1, m_2, m_3$  trois points de  $C$  non alignés. Si  $f$  est une transformation quadratique telle que  $\text{Ind } f = \{m_1, m_2, m_3\}$  on constate que  $f(C)$  est une cubique lisse isomorphe à  $C$ . Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  qui envoie  $f(C)$  sur  $C$  alors  $Af$  appartient au groupe de décomposition de  $C$ ; une telle transformation est appelée **transformation quadratique  $C$ -générique**. Remarquons que les  $m_i$  étant choisis arbitrairement le groupe de décomposition de  $C$  est infini non dénombrable.

**Théorème 10 ([86]).** — Si  $C$  est une cubique lisse, le groupe de décomposition de  $C$  est engendré par les transformations quadratiques  $C$ -génériques.

BLANC décrit dans [14] les éléments d'ordre fini du groupe d'inertie d'une courbe de genre 1; il étudie aussi le groupe d'inertie d'une cubique lisse :

**Théorème 11 ([14]).** — Soit  $C$  une cubique lisse. Les éléments non triviaux de  $\text{Ine}(C)$  sont de degré supérieur ou égal à 3. Le groupe d'inertie de  $C$  est engendré par ses éléments de degré 3.

**Automorphismes et alternative de TITS : analogie avec les groupes linéaires.** Certaines études du groupe de CREMONA s'inscrivent dans une thématique classique. Ainsi il y a eu de nombreux travaux sur les propriétés algébriques des groupes de difféomorphismes des variétés; par exemple DIEUDONNÉ a décrit les automorphismes de  $\text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$  (voir [44]) : ils s'obtiennent à partir des automorphismes intérieurs, de la contragrédiente ( $u \mapsto {}^t u^{-1}$ ) et des automorphismes du corps  $\mathbb{C}$ . Dans [40] DÉSERTEI généralise cet énoncé à  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  :

**Théorème 12 ([40]).** — Soit  $\phi$  un automorphisme du groupe de CREMONA; il existe  $\psi$  une transformation birationnelle et  $\tau$  un automorphisme du corps  $\mathbb{C}$  tels que :

$$\forall f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2), \quad \phi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Dit autrement le groupe des automorphismes extérieurs de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  s'identifie au groupe des automorphismes du corps  $\mathbb{C}$ .

La preuve repose sur la description des sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables  $G$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; en utilisant entre autres les travaux de CANTAT et FAVRE sur les symétries birationnelles des surfaces feuilletées ([23]) on peut montrer qu'ils satisfont l'une des propriétés suivantes :

- $G$  possède des éléments de torsion ;
- $G$  est conjugué à un sous-groupe du groupe de JONQUIÈRES.

Continuons avec une autre propriété algébrique satisfaite par  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Dans les années 1970 TITS démontre le :

**Théorème 13 ([93]).** — Soient  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique nulle et  $\Gamma$  un sous-groupe de type fini de  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ . Alors

- ou bien  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien ;
- ou bien  $\Gamma$  contient un sous-groupe résoluble d'indice fini.

On dit que  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$  satisfait l'alternative de TITS. CANTAT a étudié les sous-groupes de type fini du groupe de CREMONA et montré qu'il en est de même pour le groupe de CREMONA ([22, 51]). Un résultat analogue avait été démontré par LAMY pour le sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  des « automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  » (voir [71]).

Dans [24] CANTAT et LAMY démontrent la non-simplicité (au sens ordinaire) du groupe de CREMONA ; par contre BLANC montre dans [16] que le groupe de CREMONA est un groupe simple au sens de ZARISKI (on considère les sous-groupes normaux fermés au sens de ZARISKI).

**Propriétés et résultats de nature algébrico-dynamique.** Mentionnons quelques notions de dynamique. Soit  $f$  la transformation définie par

$$f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto ((x_0 + x_1)x_2 : x_0x_1 : x_0x_2).$$

En composant  $f$  avec elle-même, nous obtenons

$$f^2: (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (bx_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 : x_1(x_0 + x_1) : x_2(x_0 + x_1)).$$

Nous avons donc  $\deg(f^2) = \deg(f)^2 - 2$ . Lors du calcul de  $f^2$  nous avons pu « factoriser » par  $x_0x_2$ ; ceci traduit, entre autres, le phénomène géométrique suivant : la droite d'équation  $x_2 = 0$  est contractée sur  $(0 : 1 : 0)$  qui est un point d'indétermination de  $f$

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \rightarrow \end{array} \right\} f \\ \phantom{\left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \rightarrow \end{array} \right\} } \cdot \\ \phantom{\left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \rightarrow \end{array} \right\} } (0 : 1 : 0) \\ x_2 = 0 \end{array}$$

Ceci a conduit à introduire la notion suivante ([52]) :  $f$  est algébriquement stable si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée

- $(\deg f^n) = (\deg f)^n \quad \forall n \geq 0$ ;

- il n'existe pas de courbe  $C$  de  $S$  telle que  $f^n(C)$  soit un point d'indétermination de  $f$  pour un certain  $n$ .

Il y a d'autres façons de caractériser la stabilité algébrique (voir par exemple [46]).

DILLER et FAVRE montrent que pour toute transformation birationnelle  $f$ , il existe une modification propre  $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  telle que  $\varepsilon^{-1}f\varepsilon$  soit algébriquement stable ([45], théorème 0.1.).

Introduisons un invariant birationnel de nature dynamique. Soient  $f, g$  deux transformations de CREMONA ; en général on a  $\deg f \neq \deg(gfg^{-1})$ . Par contre il existe deux constantes positives  $\alpha, \beta$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \deg f^n \leq \deg(gf^n g^{-1}) \leq \beta \deg f^n;$$

la croissance des degrés de  $f^n$  est donc un invariant birationnel. D'où la définition suivante : soit  $f$  une transformation de CREMONA ; on appelle premier degré dynamique de  $f$  la quantité

$$\lambda(f) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\deg f^n)^{1/n}.$$

On dit qu'une transformation de CREMONA  $f$  est un automorphisme sur la surface  $S$  s'il existe un morphisme birationnel  $\phi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  telle que  $\phi^{-1}f\phi$  soit un automorphisme de  $S$ ; on notera  $\text{Aut}(S)$  le groupe des automorphismes de  $S$ .

DILLER et FAVRE ont donné une classification des transformations birationnelles à conjugaison près :

**Théorème 14** ([45], théorème 0.2). — *Soit  $f$  une transformation de CREMONA. À conjugaison birationnelle près elle satisfait une et une seule des propriétés suivantes :*

- *la croissance des degrés est bornée (i.e.  $\deg f^n = o(1)$ ),  $f$  est un automorphisme sur une certaine surface rationnelle  $S$  et un itéré de  $f$  appartient à la composante neutre de  $\text{Aut}(S)$ ;*
- *la croissance des degrés est linéaire (i.e.  $\deg f^n \sim n$ ), auquel cas  $f$  préserve une unique fibration qui est rationnelle et n'est pas birationnellement conjugué à un automorphisme ;*
- *la croissance des degrés est quadratique (i.e.  $\deg f^n \sim n^2$ ) alors  $f$  est un automorphisme qui préserve une unique fibration qui est elliptique ;*
- *la croissance des degrés est exponentielle (i.e.  $\deg f^n \sim \alpha^n$ ,  $\alpha > 1$ ).*

Dans les trois premières éventualités  $\lambda(f) = 1$ , dans la dernière  $\lambda(f) > 1$ .

Dans ce même article on trouve une estimation du nombre de points périodiques d'un élément générique du groupe de CREMONA de degré  $d \geq 2$  :

**Théorème 15** ([45]). — *Soit  $f$  une transformation de CREMONA algébriquement stable. Supposons que  $f$  ne soit pas un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  et n'ait pas de courbe de points périodiques. Notons  $\text{Per}_k$  le nombre de points périodiques de période (divisant)  $k$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $k \geq 0$  on ait*

$$|\text{Per}_k - \lambda(f)^k| \leq C.$$

Nous allons voir que sous certaines hypothèses il y a abondance de points périodiques hyperboliques (voir Chapitre 4). Une transformation birationnelle  $f$  de  $\mathbb{P}^2$  vérifie la condition de BEDFORD et DILLER (voir [7]) si

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda(f)^n} |\log(\text{dist}(f^n(\text{Ind } f^{-1}), \text{Ind } f))| < \infty$$

où  $\text{dist}$  désigne la distance de FUBINI-STUDY.

On peut énoncer le :

**Théorème 16** ([7, 48]). — *Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA n'appartenant pas à  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ . Supposons que  $f$  vérifie la condition de BEDFORD et DILLER. Alors  $f$  possède une infinité de points périodiques hyperboliques qui s'équidistribuent suivant une mesure de probabilité  $f$ -invariante.*

**Représentations de réseaux dans le groupe de CREMONA et applications.** Bien que de nature algébrique les énoncés qui suivent ont été établis à partir de techniques de dynamique complexe. Les représentations linéaires des réseaux de groupes de LIE réels simples de rang réel strictement supérieur à 1 ont été étudiées par MARGULIS ([76, 95]); afin de généraliser les travaux de celui-ci aux représentations non linéaires des réseaux sur les variétés compactes ZIMMER établit un programme ([99, 100, 101, 102]). DÉSERTI s'intéresse à une version birationnelle de ce programme :

**Théorème 17** ([39]). — *Soient  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$  et  $\rho$  un morphisme injectif de  $\Gamma$  dans le groupe de CREMONA. Alors, à conjugaison birationnelle près,  $\rho$  coïncide avec le plongement canonique ou la contragrédiente (i.e. l'involution  $u \mapsto {}^t u^{-1}$ ).*

Une conséquence est la suivante :

**Corollaire 18** ([39]). — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ . Dès que  $n \geq 4$  le groupe  $\Gamma$  ne se plonge pas dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .*

Dans le même esprit mais avec des méthodes différentes CANTAT montre le :

**Théorème 19** ([22]). — *Soient  $\Gamma$  un groupe de KAZHDAN<sup>(4)</sup> discret et  $\rho$  un morphisme de  $\Gamma$  dans le groupe de CREMONA. Ou bien  $\rho(\Gamma)$  est fini, ou bien  $\rho(\Gamma)$  est conjugué à un sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ .*

Le Théorème 17 appliqué à  $\Gamma = \text{SL}_3(\mathbb{Z})$  permet de décrire le semi-groupe des endomorphismes de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; en particulier

---

4. Les groupes de KAZHDAN sont caractérisés par la propriété suivante : un groupe  $G$  est de KAZHDAN (ou a la propriété (T) de KAZHDAN) si toute action continue de  $G$  par isométries affines sur un espace de HILBERT a un point fixe global ([37, 60]).

**Théorème 20 ([41]).** — *Le groupe de CREMONA est hopfien, i.e. tout endomorphisme surjectif de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est bijectif.*

*Plus précisément soit  $\varphi$  un endomorphisme non trivial de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; il existe un plongement de corps  $\tau$  de  $\mathbb{C}$  dans lui-même et une transformation birationnelle  $\psi$  telle que*

$$\forall f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2), \quad \varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}).$$

Notons qu'on retrouve en particulier le Théorème 12.

Certaines des méthodes utilisées pour démontrer le Théorème 17 associées à d'autres arguments permettent de décrire les sous-groupes nilpotents de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  :

**Théorème 21 ([42]).** — *Soient  $G$  un sous-groupe nilpotent, non abélien à indice fini près et  $\rho$  un morphisme injectif de  $G$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Le groupe  $G$  satisfait l'une des propriétés suivantes :*

- *à indice fini près le premier groupe dérivé<sup>(5)</sup> de  $G$  est abélien ;*
- *tous les éléments de  $G$  sont de torsion.*

Ce qui précède ne prétend pas bien sûr être une présentation exhaustive des travaux concernant le groupe de CREMONA mais un point de vue partiel proche des préoccupations des auteurs. Par exemple nous ne mentionnons pas les résultats utilisant des concepts puissants de l'analyse complexe (courants, fonctions psh...) et mis en œuvre notamment par BEDFORD, FORNAESS, SIBONY, leurs élèves et leurs collaborateurs.

Plusieurs mémoires de synthèse sont disponibles ; citons en particulier [31, 33, 56, 64, 89]. Par exemple les chapitres 6, 7 et 8 du tome 4 de [33] sont consacrés aux transformations de CREMONA ; on y trouve les notions de points éclatés, courbes contractées, le théorème de factorisation de NETHER. Les transformations birationnelles d'ordre  $\leq 7$ , celles ayant une courbe de points fixes de genre  $> 1$ , les sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  sont d'autres sujets abordés. L'ouvrage d'HUDSON qui date de 1927 contient un chapitre sur les transformations birationnelles quadratiques ; toutefois l'évolution du vocabulaire et des techniques en rend sa lecture difficile, de plus certains arguments « génériques » propres à l'époque nous semblent devoir parfois être précisés. Le livre d'ALBERICH-CARRAMIÑANA ([1]) est le seul ouvrage récent consacré aux transformations de CREMONA ; l'auteur reprend avec le langage et la rigueur actuels des résultats mentionnés et/ou démontrés par les mathématiciens précédemment cités et démontre des résultats originaux. Dans tous ces mémoires ce sont essentiellement des propriétés algébriques qui sont étudiées, les questions de nature « dynamique » sont bien plus récentes.

Venons en au contenu de ce texte dont le but essentiel est finalement de fournir au lecteur suffisamment d'exemples - parfois innocents - pour permettre d'aborder des problèmes de nature plus difficiles voire conceptuels. Il est motivé en particulier par l'importance des transformations quadratiques ne serait-ce qu'au travers du théorème de NETHER ; mais elles interviennent profondément aussi en géométrie algébrique classique (« désingularisation des courbes à la NETHER » par exemple) et du point de vue de la dynamique nous offrent le premier degré de complexité à étudier.

---

5. Le premier groupe dérivé de  $G$  est  $\langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$ .

Quelques mots sur le style du mémoire « à l'italienne » ; en quelque sorte ce livre se veut être une transition entre les résultats anciens (difficiles d'approche de par leur rédaction) et les articles récents (qui eux sont difficiles car utilisent tout un attirail de concepts et de théories parfois un peu abstraites venant de la géométrie algébrique et de la dynamique complexe). Nous avons donc travaillé un support d'exemples, souvent de façon calculatoire, raffinant parfois aussi des résultats classiques sur ces exemples.

**Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques.** Dans le premier Chapitre on cherche à comprendre dans l'espace des applications rationnelles quadratiques de  $\mathbb{P}^2$  dans lui-même le sous-ensemble constitué des transformations birationnelles. Soyons plus précis ; considérons l'espace  $\text{Rat}_2$  qui est le projectivisé de l'espace vectoriel des triplets de formes quadratiques en 3 variables complexes :

$$\text{Rat}_2 := \mathbb{P}\{(f_0, f_1, f_2) \mid f_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2\}.$$

On constate que  $\text{Rat}_2$  s'identifie à  $\mathbb{P}^{17}$ . À un élément  $f$  de  $\text{Rat}_2$  on peut faire correspondre la transformation rationnelle  $f^\bullet : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  définie avec les notations précédentes par :

$$x = (x_0 : x_1 : x_2) \dashrightarrow f^\bullet(x) = \delta(f_0 : f_1 : f_2)(x)$$

avec  $\delta = \frac{1}{\text{pgcd}(f_0, f_1, f_2)}$ . On désigne par  $\text{Rat}_2^\bullet$  l'ensemble défini par

$$\text{Rat}_2^\bullet = \{f^\bullet \mid f \in \text{Rat}_2\};$$

visiblement  $\text{Rat}_2^\bullet$  s'identifie au quotient de  $\text{Rat}_2$  par la relation d'équivalence  $f = (f_0 : f_1 : f_2) \sim g = (g_0 : g_1 : g_2)$  si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ g_0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix}$$

est partout de rang  $\leq 1$ .

Notons que sur l'ouvert de ZARISKI  $\mathring{\text{Rat}}_2$ , constitué des  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  tels que  $\text{pgcd}(f_0, f_1, f_2) = 1$ , l'application  $f \mapsto f^\bullet$  est injective. Remarquons aussi que l'on peut mettre une structure algébrique sur  $\text{Rat}_2^\bullet$  et parler en particulier d'adhérence de ZARISKI d'un sous-ensemble de  $\text{Rat}_2^\bullet$ .

Dans  $\text{Rat}_2$  nous considérons

$$\text{Bir}_2 := \{f \in \text{Rat}_2 \mid f^\bullet \text{ soit birationnelle}\}$$

et nous notons  $\text{Bir}_2^\bullet \subset \text{Rat}_2^\bullet$  le sous-ensemble correspondant.

Il y a sur  $\text{Rat}_2$  (resp.  $\text{Rat}_2^\bullet$ ) deux actions naturelles, toutes les deux laissant  $\text{Bir}_2$  (resp.  $\text{Bir}_2^\bullet$ ) invariant. La première est l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) \simeq \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  par conjugaison dynamique sur  $\text{Rat}_2$  :

$$\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{Rat}_2 \rightarrow \text{Rat}_2, \quad (A, f) \mapsto AfA^{-1}.$$

Cette action passe bien sûr au quotient  $\text{Rat}_2^\bullet : (A, f^\bullet) \mapsto Af^\bullet A^{-1}$ . L'orbite d'un élément  $f$  de  $\text{Rat}_2$  (resp.  $\text{Rat}_2^\bullet$ ) pour cette action sera notée  $O_{\text{dyn}}(f)$  (resp.  $O_{\text{dyn}}(f^\bullet)$ ).

La seconde de nature algébrico-géométrique est attachée au point de vue « réseaux homaloïdaux ». C'est une action du produit  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ , appelée action gauche-droite (g.d.), qui se définit comme suit :  $(A, B, f) \mapsto AfB^{-1}$ . Comme précédemment cette action passe au quotient  $\mathrm{Rat}_2^\bullet$ . L'orbite d'un élément  $f$  est notée ici  $O_{g.d.}(f)$ .

Considérons le projectivisé de l'espace  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3$  des polynômes homogènes de degré 3. C'est un  $\mathbb{P}^9$  sur lequel  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  agit de façon naturelle : c'est la projectivisation de l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3$

$$(B, \varphi) \mapsto \varphi \circ B^{-1}.$$

Les orbites génériques sont de dimension 8, ainsi cette action induit un feuilletage singulier sur  $\mathbb{P}^9$ , feuilletage qui possède une intégrale première rationnelle  $J$  qui n'est autre que l'invariant des courbes elliptiques ([62]). Introduisons maintenant l'application rationnelle

$$\det \mathrm{jac} : \mathrm{Rat}_2 \simeq \mathbb{P}^{17} \dashrightarrow \mathbb{P}^9$$

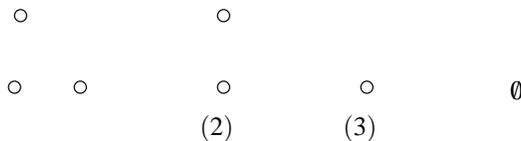
provenant de l'application homogène :

$$(f_0, f_1, f_2) \mapsto \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

L'action gauche-droite induit sur  $\mathrm{Rat}_2$  un feuilletage singulier de codimension 1 noté  $\mathcal{R}$ , les feuilles génériques de  $\mathcal{R}$  étant les g.d. orbites génériques. Il se trouve que l'application rationnelle  $J \circ \det \mathrm{jac}$  en est une intégrale première rationnelle. Nous étudierons relativement précisément ce feuilletage  $\mathcal{R}$ . En particulier nous verrons que l'adhérence ordinaire  $\overline{\mathrm{Bir}_2}$  de  $\mathrm{Bir}_2$  dans  $\mathrm{Rat}_2$  est une certaine composante irréductible de l'ensemble singulier du lieu singulier de  $\mathcal{R}$ . L'espace  $\overline{\mathrm{Bir}_2}$ , qui est comme on vient de le dire irréductible, n'est pas lisse. Il s'agit en fait d'une « variété unirationnelle » de dimension 14. Par contre l'espace  $\mathrm{Bir}_2$  est lui lisse : donnons-en une brève description. On vérifie qu'un élément  $f$  de  $\mathrm{Rat}_2$  induit une transformation birationnelle si et seulement si (ceci sera précisé dans le texte) l'application correspondante  $f^\bullet$  contracte les zéros de  $\det \mathrm{jac} f$ . La configuration de ces zéros est alors l'une des suivantes :



*i.e.* correspond aux configurations de triplets de droites (excepté la configuration de trois droites concourantes) auxquelles on ajoute la configuration vide (cette configuration est associée aux éléments  $f$  de  $\mathrm{Bir}_2 \setminus \overline{\mathrm{Bir}_2}$  tels que  $f^\bullet$  soit un isomorphisme linéaire). De façon duale on constate que les configurations de points d'indétermination sont



Pour  $i = 1, 2, 3$  on note  $\Sigma^i$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $\text{Bir}_2$  tels que  $f^\bullet$  ait  $i$  points d'indétermination ;  $\Sigma^0$  désigne l'ensemble des éléments de  $\text{Rat}_2$  du type  $f = \ell(\ell_0, \ell_1, \ell_2)$  où  $\ell$  et les  $\ell_i$  sont des formes linéaires, les  $\ell_i$  étant indépendantes. En fait

$$\Sigma^0 = \{f \in \text{Rat}_2 \mid f^\bullet \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)\}$$

correspond exactement aux configurations vides ci-dessus. Avec les notations précédentes on a :

$$(\Sigma^0)^\bullet \simeq \text{PGL}_3(\mathbb{C}), \quad (\Sigma^i)^\bullet \simeq \Sigma^i \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Les isomorphismes  $(\Sigma^i)^\bullet \simeq \Sigma^i$  justifieront la confusion parfois abusive des notations  $f$  et  $f^\bullet$ . Les  $\Sigma^i$  sont en fait des orbites de l'action gauche-droite, plus précisément :

$$\Sigma^0 = O_{g.d.}(x_0(x_0 : x_1 : x_2)), \quad \Sigma^1 = O_{g.d.}(\tau), \quad \Sigma^2 = O_{g.d.}(\rho), \quad \Sigma^3 = O_{g.d.}(\sigma).$$

Les dimensions de ces orbites sont les suivantes :

$$\dim \Sigma^0 = 10, \quad \dim \Sigma^1 = 12, \quad \dim \Sigma^2 = 13, \quad \dim \Sigma^3 = 14$$

et l'on a

$$\text{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3.$$

On peut de plus mentionner les relations d'incidence suivantes (les adhérences sont prises dans  $\text{Bir}_2$ ) :

$$\overline{\Sigma^0} = \Sigma^0, \quad \overline{\Sigma^1} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \quad \overline{\Sigma^2} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2, \quad \text{Bir}_2 = \overline{\Sigma^3} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3.$$

Ces relations d'incidence se prolongent évidemment aux  $(\Sigma^i)^\bullet$  dans  $\text{Bir}_2^\bullet$ .

***Germes de flots birationnels quadratiques.*** Dans une session de problèmes ([18]), lors du congrès international de Moscou, MUMFORD propose ce qui suit <sup>(6)</sup> :

“Let  $G = \text{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(x_0, x_1)$  be the CREMONA group (...) The problem is to topologize  $G$  and associate to it a LIE algebra consisting, roughly, of those meromorphic vector fields  $D$  on  $\mathbb{P}^2$  wich “integrate” into an analytic family of CREMONA transformations”.

Dans cette optique nous décrivons au Chapitre 2 les sous-groupes à un paramètre de transformations birationnelles quadratiques. Bien que  $\text{Bir}_2^\bullet$  ne soit pas un groupe, il contient de nombreux groupes, en particulier le groupe linéaire  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Comme on l'a dit précédemment l'adhérence de ZARISKI d'un tel sous-groupe est naturellement munie d'une structure de groupe algébrique. Outre le problème posé par MUMFORD, la description systématique des groupes de transformations birationnelles quadratiques conduit naturellement à décrire les germes de flots dans  $\text{Bir}_2^\bullet$ . Un tel objet est la donnée d'un germe d'application holomorphe

$$\mathbb{C}, 0 \rightarrow \text{Bir}(\mathbb{P}^2), \quad t \mapsto \phi_t$$

tel que

$$\phi_0^\bullet = \text{id}, \quad \phi_{t+s}^\bullet = \phi_t^\bullet \circ \phi_s^\bullet.$$

6. Nous remercions Daniel PANAZZOLO pour cette référence.

Si  $\phi_t^\bullet$  est non linéaire, *i.e.* si pour  $t$  générique  $\phi_t^\bullet$  n'est pas dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , alors  $\phi_t^\bullet$  contracte au moins une droite  $\mathcal{D}_t$  qui est ou bien immobile (c'est-à-dire indépendante de  $t$ ), ou bien mobile. Par exemple on montre d'abord que si un germe de flot contracte une droite « mobile », ce germe laisse une fibration en droites invariante ; dans le même ordre d'idée on obtient que si un germe de flot contracte une unique droite qui est « immobile », ce germe de flot est polynomial... En fait comme nous le verrons, dans tous les cas un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$  préserve une fibration en droites.

Donnons un résultat qui s'avèrera essentiel pour la classification des flots (§2.2) : soit  $\phi_t^\bullet$  un germe de flot quadratique. Le champ de vecteurs rationnel

$$\chi = \left. \frac{\partial \phi_t^\bullet}{\partial t} \right|_{t=0}$$

s'appelle le générateur infinitésimal de  $\phi_t^\bullet$  ; à ce champ est associé un feuilletage algébrique noté  $\mathcal{F}_\chi$ . On introduit  $\langle \phi_t^\bullet \rangle \subset \text{Bir}_2^\bullet$  le groupe engendré par les  $\phi_t^\bullet$  et  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$  son adhérence de ZARISKI dans  $\text{Bir}_2^\bullet$  ; ce sont des groupes abéliens. Enfin  $G(\chi)$  désigne le groupe abélien algébrique maximal inclus dans  $\text{Bir}_2^\bullet$  et contenant  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$ . Alors :

- $\mathcal{F}_\chi$  est défini par une forme fermée rationnelle ;
- $\phi_t^\bullet$  préserve une fibration rationnelle (en fait un pinceau de droites) ;
- $\dim G(\chi) \geq 2$ .

Notons qu'un tel énoncé est satisfait par n'importe quel groupe à un paramètre de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Il nous permet d'obtenir la classification à conjugaison dynamique près des groupes à un paramètre de transformations birationnelles quadratiques.

En fait ce résultat se généralise en tout degré : tout germe de flot birationnel laisse une fibration rationnelle invariante.

Dans [75]. MANJARIN étudie les flots birationnels quadratiques en dimension 3.

Dans le même ordre d'idée on pourra consulter les travaux de BLANC sur les sous-groupes algébriques du groupe de CREMONA ([15]) qui, en général, contiennent de nombreux sous-groupes à un paramètre.

**Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les  $\Sigma^i$ .** En suivant une idée de GUILLOT on implante aux transformations birationnelles des invariants propres aux feuilletages. À une transformation rationnelle  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  on associe la 1-forme différentielle :

$$\omega_f = (x_2 f_1 - x_1 f_2) dx_0 + (x_0 f_2 - x_2 f_0) dx_1 + (x_1 f_0 - x_0 f_1) dx_2.$$

Lorsque  $f$  n'est pas un multiple de l'identité, la forme  $\omega_f$  est non identiquement nulle et définit donc un feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  sur  $\mathbb{P}^2$ . Si  $f$  est de degré  $n$ , le feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  est de degré inférieur ou égal à  $n$ . Dans le cas quadratique ( $n = 2$ ), l'application  $\mathcal{F} : f \mapsto \omega_f$  induit une application linéaire

$$\mathcal{F} : \text{Rat}_2 \simeq \mathbb{P}^{17} \dashrightarrow \mathcal{F}_2 \simeq \mathbb{P}^{14}$$

où  $\mathcal{F}_2$  est le projectivisé de l'espace vectoriel des 1-formes homogènes de degré 3 :

$$\omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + A_2 dx_2$$

satisfaisant la condition d'EULER  $\sum x_i A_i = 0$ . L'espace des feuilletages proprement dit est

$$\mathcal{F}_2^\bullet = \mathcal{F}_2 / \sim \text{ où } \sim \text{ est la relation d'équivalence } \omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Visiblement l'application  $\mathcal{F} : \text{Rat}_2 \dashrightarrow \mathcal{F}_2$  est surjective. Ce qui est plus curieux c'est que sa restriction  $\mathcal{F}|_{\text{Bir}_2} : \text{Bir}_2 \dashrightarrow \mathcal{F}_2$  est dominante et génériquement finie : un élément générique de  $\mathcal{F}_2$  possède 35 antécédents dans  $\text{Bir}_2$ .

Le feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  n'a pas de sens dynamique particulier vis à vis de  $f$  : en général  $\mathcal{F}(f)$  n'est pas invariant par  $f$ . Les transformations quadratiques  $f$  pour lesquelles cette propriété est satisfaite sont exactement celles qui préservent une fibration en droites fibre à fibre : dans ce cas  $\mathcal{F}(f)$  est précisément cette fibration.

Soit  $f$  une transformation birationnelle quadratique, *i.e.* un élément générique de  $\Sigma^3 \simeq (\Sigma^3)^\bullet$ . Alors  $f$  possède 7 points spéciaux : 3 points d'indétermination et 4 points fixes. Ces 7 points sont exactement les points singuliers du feuilletage  $\mathcal{F}(f)$ ; la position des 3 points d'indétermination et des 4 points fixes détermine complètement l'application  $f$ .

Un théorème de GUILLOT ([61]) affirme que pour un élément générique  $f$  de  $\Sigma^3$  on a les relations suivantes :

$$\sum_{m \in \text{Fix} f} \frac{\text{tr}(Df_{(m)} - \text{id})}{\det(Df_{(m)} - \text{id})} = -4, \quad \sum_{m \in \text{Fix} f} \frac{1}{\det(Df_{(m)} - \text{id})} = 1,$$

$Df_{(m)}$  étant la différentielle de  $f$  en  $m$ ,  $\text{tr}(Df_{(m)})$  sa trace et  $\det Df_{(m)}$  son déterminant. Ce sont des relations qui lient les valeurs propres de la différentielle de  $f$  aux points fixes. On peut tirer des conséquences intéressantes de ces formules. Par exemple pour une transformation quadratique générique, *i.e.* avec 7 points spéciaux, les valeurs propres de la partie linéaire de  $f$  aux points fixes ne peuvent toutes être de module inférieur strictement à 1 : les points fixes ne peuvent pas tous être des attracteurs.

Les relations aux valeurs propres interviennent de façon forte dans les problèmes de classification ; mentionnons par exemple le fait suivant : si deux transformations birationnelles quadratiques génériques sont birationnellement conjuguées alors elles le sont linéairement. On peut se demander si deux transformations birationnelles quadratiques génériques topologiquement conjuguées le sont par un automorphisme holomorphe (ou anti-holomorphe) ; c'est une question ouverte.

### ***Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques.***

Dans le Chapitre 4 on aborde quelques exemples de propriétés dynamiques des transformations birationnelles, en particulier quadratiques. Les notions fondamentales de stabilité algébrique et de premier degré dynamique déjà mentionnées ci-dessus sont introduites. Nous donnons des exemples explicites d'éléments de  $\Sigma^3$  qui sont algébriquement stables, exemples qui permettent de confirmer la généricité intuitive de cette propriété. Nous nous intéresserons ensuite à la présence ou non « d'objets invariants » : courbes, feuilletages. Si  $\phi$  est un élément du groupe de CREMONA et  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe (singulier) sur  $\mathbb{P}^2$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est invariant par  $\phi$  si pour toute feuille générique  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{F}$  alors  $\phi(\mathcal{L})$  est encore une feuille de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  est défini

par la 1-forme rationnelle  $\omega$ , alors  $\mathcal{F}$  est invariant par  $\phi$  si et seulement si  $\phi^*\omega \wedge \omega = 0$ . Considérons un élément  $A$  de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ ; évidemment  $A$  possède un point fixe  $q$ , *i.e.*  $Aq = q$ , et l'image par  $A$  d'une droite passant par  $q$  est encore une droite passant par  $q$ . De sorte que  $A$  possède au moins un feuilletage invariant : la fibration rationnelle formée par les droites passant par  $q$ . En fait  $A$  préserve une infinité de feuilletages distincts. Par exemple si  $A$  est diagonalisable, on peut supposer, à conjugaison linéaire près, que  $A$  s'écrit dans la carte affine  $x_2 = 1$

$$(x_0, x_1) \mapsto (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1).$$

On constate alors que pour chaque nombre complexe  $\beta$  la forme différentielle

$$\omega_\beta := \frac{dx_0}{x_0} + \beta \frac{dx_1}{x_1}$$

est invariante par  $A$ , ce qui, comme annoncé, produit une infinité de feuilletages invariants. Qu'en est-il pour les transformations birationnelles quadratiques ? En invoquant l'irréductibilité de  $\text{Bir}_2$  dans  $\text{Rat}_2$  et le fait qu'un automorphisme de HÉNON quadratique ne possède pas de feuilletage invariant ([19]) on constate que génériquement un élément de  $\text{Bir}_2$  n'en possède pas non plus.

De la même façon, à l'inverse des automorphismes, une transformation birationnelle quadratique générique ne possède pas de courbe invariante. Toutefois, comme nous l'avons déjà mentionné, l'étude des transformations ayant une courbe invariante possède une longue histoire et présente un intérêt certain. Nous y apportons quelques enrichissements en utilisant les concepts de stabilité algébrique et premier degré dynamique.

Le paragraphe §4.5 de ce chapitre est consacré à la répartition des points périodiques et des points d'indétermination des itérés d'une transformation birationnelle quadratique. A priori ces ensembles sont très compliqués ; nous montrons la densité (au sens de ZARISKI) générique de ces deux ensembles. En utilisant la condition introduite par BEDFORD et DILLER précédemment mentionnée on constate que génériquement une transformation quadratique possède une infinité de points périodiques hyperboliques. Dans un contexte un peu différent, celui des endomorphismes dans un cadre arithmétique, on pourra consulter les surveys de CHAMBERT-LOIR ([30]), de FAKHRUDDIN ([49]) ou de ZHANG ([98]) qui traitent entre autres de la répartition des points périodiques.

La non stabilité algébrique d'une transformation birationnelle  $f$  est reliée à un comportement « anormal » du degré de ses itérés  $f^n$ ; dans le cas quadratique ce degré doit être en principe  $2^n$ . Mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour les transformations qui appartiennent à un groupe à un paramètre. Nous consacrons un paragraphe à l'étude du cas extrême, celui où le degré de  $f^2$  reste égal à 2; nous en présentons la classification à conjugaison linéaire près.

***Des propriétés algébriques du groupe de CREMONA.*** Dans le Chapitre 5 on s'intéresse à quelques propriétés algébriques du groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  mettant le plus souvent en jeu les transformations quadratiques. Le fait que  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  présente beaucoup de propriétés de groupes linéaires amène à se poser la question suivante : existe-t-il une représentation fidèle de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  dans un groupe linéaire  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$  pour un certain corps  $\mathbb{k}$  de caractéristique nulle ? Nous constatons en utilisant un argument de BIRKHOFF que la réponse est négative.

On montre ensuite que le centralisateur dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  d'un élément générique  $f$  de  $\Sigma^3$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , *i.e.* se réduit aux itérés de  $f$ . Puis on établit qu'un nombre fini de transformations quadratiques choisies génériquement engendrent un groupe libre.

Lorsque nous avons déposé ce manuscrit le problème de la simplicité de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  était un problème ouvert. Comme on l'a dit précédemment CANTAT et LAMY démontrent dans [24] la non-simplicité du groupe de CREMONA. Toutefois déterminer le sous-groupe normal engendré par telle ou telle transformation nous a semblé pertinent. Nous montrons en particulier que si  $f$  est une transformation birationnelle quadratique ou un automorphisme linéaire non trivial, le sous-groupe normal engendré par  $f$  est le groupe de CREMONA tout entier ; nous en déduisons que  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est parfait. Nous montrons par exemple que le sous-groupe normal engendré par une transformation de JONQUIÈRES dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  tout entier.

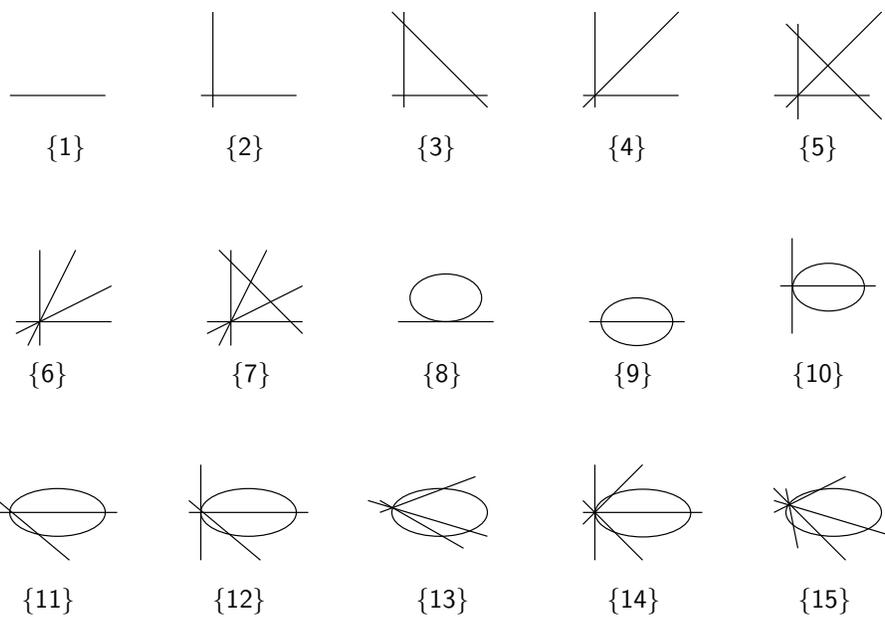
Nous précisons le théorème de NETHER de la façon suivante : tout élément  $f$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  s'écrit comme un produit d'involutions quadratiques standards

$$f = A_1 \sigma A_1^{-1} \dots A_n \sigma A_n^{-1}, \quad A_i \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}).$$

***Transformations birationnelles de degré 3.*** Comme on l'a dit l'espace des transformations birationnelles quadratiques pures est lisse et connexe. Qu'en est-il en degré quelconque ? Le premier degré intéressant est le degré 3 pour la raison suivante. D'après le théorème de NETHER toute transformation birationnelle s'écrit comme un produit

$$A_0 \sigma A_1 \sigma \dots \sigma A_n, \quad A_i \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2);$$

lorsque les  $A_i$  sont choisis génériquement le degré d'un tel élément est  $2^n$ . Pour obtenir des applications birationnelles de degré  $d$  qui n'est pas une puissance de 2, il est donc nécessaire que les transformations  $A_i$  soient assujetties à des contraintes. Le premier degré pour lequel ce phénomène apparaît est  $d = 3$ . Dans les traités anciens on trouve une « description » des transformations birationnelles cubiques, description qui repose sur des considérations de géométrie énumérative (nombre de points d'indétermination, configuration de courbes contractées). Au Chapitre 6 nous proposons une liste de formes normales à conjugaison gauche-droite près, la connexité apparaissant en dernier lieu comme sous-produit. Les techniques utilisées sont pour la plupart classiques : topologie du complément de certaines courbes planes, contraction des zéros du déterminant jacobien etc. Malheureusement dès le degré 3 on ne dispose pas de critère de birationnalité analogue à celui utilisé en degré 2 comme l'atteste l'exemple suivant : si  $f$  est la transformation  $(x_0^2 x_1 : x_0 x_2^2 : x_1^2 x_2)$ , le lieu d'annulation de  $\det \text{jac } f$  est bien contracté alors que  $f$  n'est pas inversible. Toutefois si  $f$  est birationnelle, la courbe  $\det \text{jac } f = 0$  est contractée par  $f$  et ceci s'avère dans bon nombre de cas intéressant à exploiter. Nous montrons qu'en degré 3 les configurations possibles de courbes contractées sont certaines unions de droites et coniques schématisées par les figures suivantes :



Le tableau suivant donne la classification des transformations birationnelles cubiques à conjugaison g.d. près :

|  |      |      |    |              |
|--|------|------|----|--------------|
| $(x_0x_2^2 + x_1^3 : x_1x_2^2 : x_2^3)$  | {1}  | {1}  | 13 |              |
| $(x_0x_2^2 : x_0^2x_1 : x_2^3)$  | {2}  | {2}  | 15 |              |
| $(x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3)$   | {2}  | {2}  | 15 |              |
| $(x_0^2x_2 : x_0^3 + x_2^3 + x_0x_1x_2 : x_0x_2^2)$  | {2}  | {2}  | 14 |              |
| $(x_0^2x_2 : x_0^2x_1 + x_2^3 : x_0x_2^2)$   | {2}  | {2}  | 15 |              |
| $(x_0x_1x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 - x_0^2x_1)$  | {2}  | {8}  | 14 |              |
| $(x_0^3 : x_1^2x_2 : x_0x_1x_2)$   | {3}  | {3}  | 15 |              |
| $(x_0^2(x_1 - x_2) : x_0x_1(x_1 - x_2) : x_1^2x_2)$  | {3}  | {10} | 15 |              |
| $(x_0^2x_2 : x_0x_1x_2 : x_1^2(x_0 - x_2))$  | {3}  | {10} | 15 |              |
| $(x_0x_1x_2 : x_1^2x_2 : x_0(x_1^2 - x_0x_2))$   | {3}  | {10} | 15 |              |
| $(x_0^3 : x_0^2x_1 : (x_0 - x_1)x_1x_2)$   | {4}  | {4}  | 15 |              |
| $(x_0^2(x_0 - x_1) : x_0x_1(x_0 - x_1) : x_0x_1x_2 + x_1^3)$   | {4}  | {4}  | 16 |              |
| $(x_0x_2(x_0 + x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1) : x_0x_1^2)$   | {5}  | {5}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_0x_1x_2)$  | {5}  | {12} | 16 |              |
| $(x_0(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_1(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_0x_1x_2)$  | {5}  | {12} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_0x_1x_2), \gamma^2 \neq 4$   | {6}  | {6}  | 15 | 1 paramètre  |
| $(x_0x_2(x_0 + x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1) : x_0x_1(x_0 - x_1))$  | {7}  | {7}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$  | {7}  | {14} | 16 | 1 paramètre  |
| $(x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1))$  | {7}  | {14} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1^3 : x_1(x_0^2 + x_1x_2))$  | {8}  | {2}  | 14 |              |
| $(x_1^2x_2 : x_0(x_0x_2 + x_1^2) : x_1(x_0x_2 + x_1^2))$   | {9}  | {9}  | 15 |              |
| $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$  | {10} | {3}  | 15 |              |
| $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1^2)$   | {10} | {3}  | 15 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2)$   | {10} | {3}  | 15 |              |
| $(x_0(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$  | {11} | {11} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$  | {11} | {11} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$  | {12} | {5}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$  | {12} | {5}  | 16 |              |
| $(x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2), \gamma \neq 0, 1$  | {13} | {13} | 16 | 1 paramètre  |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1x_2), \gamma^2 \neq 4,$  | {14} | {7}  | 16 | 1 paramètre  |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$  | {14} | {7}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2), \gamma^2 \neq 4, \delta \neq \gamma_{\pm}$ | {15} | {15} | 16 | 2 paramètres |

avec  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  et

$$\gamma_+ := \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \gamma_- := \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}.$$

Pour chacun des modèles on a mentionné la configuration des courbes contractées de la transformation (deuxième colonne), la configuration des courbes contractées de son inverse (troisième colonne), la dimension de son orbite sous l'action gauche-droite (quatrième colonne) et les paramètres quand il y en a (cinquième colonne) ; comme nous le verrons plus tard les paramètres ne sont pas tout à fait des invariants complets.

Notons que toute transformation birationnelle cubique est à conjugaison dynamique près du type  $Af$  où  $A$  désigne un élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $f$  un élément de la liste évoquée ci-dessus. Cette classification permettra d'affirmer que l'élément « générique » présente la dernière configuration et d'établir que l'espace  $\mathring{\text{Bir}}_3$  des transformations birationnelles purement de degré 3 est de dimension 18. À conjugaison gauche-droite près les éléments qui présentent la configuration générique  $\{15\}$  forment une famille à deux paramètres : alors qu'en degré 2 il y a trois orbites gauche-droite, ici il y en a une infinité.

À l'aide des modèles du tableau précédent on obtient que la décomposition de NETHER de tout élément de l'espace  $\text{Bir}_3$  des transformations birationnelles de degré inférieur ou égal à 3 fait intervenir au plus huit fois l'involution de CREMONA.

On note que toutes les configurations de dégénérescence de la figure  $\{15\}$  n'apparaissent pas. En degré 2 il y a déjà un phénomène analogue : la configuration de trois droites concourantes n'est pas réalisée comme ensemble exceptionnel d'une transformation birationnelle quadratique.

Notons  $\mathcal{X}$  l'ensemble des transformations birationnelles purement cubiques de configuration  $\{15\}$ . Nous établissons que l'adhérence ordinaire de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathring{\text{Bir}}_3$  est  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Nous montrons que  $\mathring{\text{Bir}}_3$  est irréductible (en fait rationnellement connexe) ; par contre alors que  $\text{Bir}_2$  est lisse et irréductible nous verrons qu'il n'en est pas de même pour  $\text{Bir}_3$  vu dans  $\mathbb{P}^{29} \simeq \text{Rat}_3$ .

En utilisant la « correspondance feuilletages-transformations birationnelles » on obtient qu'un élément générique de  $\text{Bir}_3$  possède 5 points fixes, tous de multiplicité 1, et 5 points d'indétermination, 1 de multiplicité 4, les autres de multiplicité 1. De plus toute transformation birationnelle cubique générique est déterminée par la position de ses 5 points fixes et de ses 5 points d'indétermination affectés de leur multiplicité. Certains calculs un peu pénibles et répétitifs ont été mis dans l'Appendice A.

### Remerciements.—

Il a été très plaisant de travailler à l'IMPA et au CIRM ; nous tenons à remercier ces deux institutions. L'IUF et l'ANR Symplexe (ANR BLAN06-3\_137237) ont contribué au bon déroulement de cette collaboration.

Nous avons profité de discussions agréables et fructueuses avec Ivan PAN lors de son séjour à Rennes.

Merci à Mark BAKER, à Serge CANTAT et Charles FAVRE pour leur disponibilité.

Le rapporteur a fait un énorme travail de lecture et de corrections, nous l'en remercions chaleureusement.

**À l'attention du lecteur.—**

Après la lecture du rapporteur, nous avons supprimé et/ou raccourci certaines preuves qui apparaissent maintenant sous forme d'exercices ; elles sont disponibles dans la deuxième version arXiv de ce texte.

La lecture du Chapitre 2 n'est pas nécessaire pour celle des chapitres qui suivent.

À la fin de pratiquement tous les chapitres nous avons mentionné quelques problèmes, certains nous ont été suggérés par le rapporteur.



# CHAPITRE 1

## TRANSFORMATIONS RATIONNELLES ET BIRATIONNELLES QUADRATIQUES

### 1.1. Quelques définitions et notations

Nous généralisons et précisons les notations présentées dans l'Introduction. On désigne par  $\text{Rat}_k$  le projectivisé de l'espace des triplets de polynômes homogènes de degré  $k$  en 3 variables :

$$\text{Rat}_k = \mathbb{P}\{(f_0, f_1, f_2) \mid f_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_k\}.$$

Le *degré* d'un élément  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  de  $\text{Rat}_k$  est le degré des  $f_i$ .

À un élément  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  de  $\text{Rat}_k$  on associe la transformation rationnelle

$$f^\bullet = \delta(f_0 : f_1 : f_2), \quad \delta = \frac{1}{\text{pgcd}(f_0, f_1, f_2)}.$$

Soit  $f$  un élément de  $\text{Rat}_k$ ; on dit que  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  est *purement de degré*  $k$  si les  $f_i$  n'ont pas de facteur commun. L'ensemble des éléments purement de degré  $k$  est noté  $\mathring{\text{Rat}}_k$ . Alors que  $\text{Rat}_k$  s'identifie à un espace projectif, l'espace  $\mathring{\text{Rat}}_k$  en est un ouvert de ZARISKI. Un élément de  $\text{Rat}_k \setminus \mathring{\text{Rat}}_k$  s'écrit  $\psi g = (\psi g_0 : \psi g_1 : \psi g_2)$  où  $g$  appartient à un certain  $\text{Rat}_l$ , avec  $l < k$ , et  $\psi$  est un polynôme homogène de degré  $k - l$ . On note  $\text{Rat}$  l'ensemble des transformations rationnelles de  $\mathbb{P}^2$  dans lui-même : c'est l'union  $\bigcup_{k \geq 1} \mathring{\text{Rat}}_k$ . C'est aussi la limite

injective des  $\text{Rat}_k^\bullet$  avec

$$\text{Rat}_k^\bullet = \{f^\bullet \mid f \in \text{Rat}_k\}.$$

Remarquons que si l'élément  $f$  de  $\text{Rat}_k$  est purement de degré  $k$  alors  $f$  s'identifie à  $f^\bullet$ . Ceci signifie que l'application

$$\mathring{\text{Rat}}_k \rightarrow \text{Rat}_k^\bullet$$

est injective. Dans la suite lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté on utilisera donc la notation  $f$  aussi bien pour les éléments de  $\text{Rat}_k$  que pour ceux de  $\text{Rat}_k^\bullet$ . De même nous dirons abusivement qu'un élément de  $\text{Rat}_k$  « est » une transformation rationnelle.

L'espace  $\text{Rat}$  contient le groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^2$ , encore appelé *groupe de CREMONA*, que l'on note  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Il est parfois plus commode de travailler dans les espaces  $\text{Rat}_k$  que dans les  $\text{Rat}_k^\bullet$ . Aussi nous désignons par  $\text{Bir}_k \subset \text{Rat}_k$  l'ensemble des transformations  $f$  de  $\text{Rat}_k$  telles que  $f^\bullet$  soit inversible et par  $\mathring{\text{Bir}}_k \subset \text{Bir}_k$  l'ensemble des transformations

birationnelles qui sont purement de degré  $k$ . On pose

$$\text{Bir}_k^\bullet = \{f^\bullet \mid f \in \text{Bir}_k\}$$

Le groupe de CREMONA s'identifie alors à  $\bigcup_{k \geq 1} \mathring{\text{Bir}}_k$ . On constate que  $\mathring{\text{Bir}}_1 \simeq \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  est le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ ; visiblement  $\mathring{\text{Bir}}_1 \simeq \text{Bir}_1^\bullet = \text{Bir}_1$ . L'espace  $\text{Rat}_1$  s'identifie à  $\mathbb{P}^8$  et  $\mathring{\text{Rat}}_1$  est le projectivisé des matrices de rang supérieur ou égal à 2.

Dans ce mémoire nous allons décrire les espaces  $\text{Bir}_k$  et  $\mathring{\text{Bir}}_k$  pour des petits entiers, précisément pour  $k = 2$  et  $k = 3$ . Par exemple pour  $k = 2$  l'inclusion  $\mathring{\text{Bir}}_2 \subset \text{Bir}_2$  est stricte. En effet si  $A$  est un élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $\ell$  une forme linéaire,  $\ell A$  est dans  $\text{Bir}_2$  mais pas dans  $\mathring{\text{Bir}}_2$ .

Un point propre à la dimension 2 est le suivant. Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_k$ , alors son inverse  $f^{-1}$  est aussi dans  $\mathring{\text{Bir}}_k$ , c'est-à-dire  $f$  et  $f^{-1}$  ont même degré algébrique (voir Remarque 6.3). Soit  $\mathcal{X} \subset (\text{Rat}_k)^2$  le sous-ensemble algébrique défini par

$$\mathcal{X} = \{(f, g) \in \text{Rat}_k \times \text{Rat}_k \mid f \circ g \text{ soit proportionnel à } \text{id} = (x_0 : x_1 : x_2)\}$$

alors l'image de la projection

$$\text{pr}_1 : \mathcal{X} \rightarrow \text{Rat}_k, \quad (f, g) \mapsto f$$

est algébrique. Cette image est constituée de l'adhérence ordinaire  $\overline{\text{Bir}}_k$  de  $\text{Bir}_k$ . L'ensemble  $\mathring{\text{Bir}}_k$  est un ouvert de ZARISKI de  $\overline{\text{Bir}}_k$ , pas nécessairement dense car, comme nous le verrons pour  $k = 3$ ,  $\overline{\text{Bir}}_k$  n'est pas en général irréductible (notons qu'il l'est pour  $k = 2$ , Chapitre 1). Un argument classique de projection montre que  $\mathring{\text{Bir}}_k$  est lui aussi algébrique et ceci pour tout  $k$ . Tout ceci sera précisé dans la suite tout du moins en degrés 2 et 3.

Sur l'espace  $\text{Rat}_k$  il y a deux actions naturelles. La première est l'action de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  par *conjugaison dynamique*

$$\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{Rat}_k \rightarrow \text{Rat}_k, \quad (A, Q) \mapsto AQA^{-1}$$

et la seconde l'action statique que nous appellerons plutôt *conjugaison gauche-droite* (g.d.) de  $(\text{PGL}_3(\mathbb{C}))^2$  :

$$\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{Rat}_k \times \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Rat}_k, \quad (A, Q, B) \mapsto AQB^{-1}.$$

Notons que les ensembles  $\mathring{\text{Rat}}_k$ ,  $\text{Bir}_k$  et  $\mathring{\text{Bir}}_k$  sont invariants sous ces deux actions. Nous allons plus loin nous intéresser à quelques orbites de ces actions. L'orbite d'un élément  $Q$  de  $\text{Rat}_k$  sous l'action de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  par conjugaison dynamique (resp. sous l'action g.d.) est notée  $O_{\text{dyn}}(Q)$  (resp.  $O_{\text{g.d.}}(Q)$ ).

Considérons  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  dans  $\mathring{\text{Bir}}_k$ . Nous notons  $\text{Ind } f$  (ou  $\text{Ind } f^\bullet$ ) le *lieu d'indétermination* de  $f$ , c'est le lieu d'annulation des polynômes  $f_i$ . Les points de  $\text{Ind } f$  sont les *points d'indétermination* de  $f$ . L'ensemble  $\text{Exc } f$  (ou  $\text{Exc } f^\bullet$ ) désignera l'*ensemble exceptionnel* de  $f$ , i.e. l'ensemble des *courbes contractées* par  $f$ ; c'est « l'image » par  $f^{-1}$  de  $\text{Ind } f^{-1}$ . On dit que  $f$  *éclate* les points de  $\text{Ind } f$  et *contracte* les courbes de  $\text{Exc } f$ .

**Exemples 1.1.** — Soit  $\sigma$  la transformation de CREMONA définie par

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1).$$

Notons que  $\sigma$  est une involution dont le lieu d'indétermination et l'ensemble exceptionnel sont :

$$\text{Ind } \sigma = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}, \quad \text{Exc } \sigma = \{x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0\}.$$

L'élément  $\rho = (x_0x_1 : x_2^2 : x_1x_2)$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  a deux points d'indétermination qui sont  $(0 : 1 : 0)$  et  $(1 : 0 : 0)$ ; les droites contractées par  $\rho$  ont pour équation  $x_2 = 0$ , resp.  $x_1 = 0$ .

Soit  $\tau$  la transformation définie par  $(x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 - x_0x_2)$ ; on a

$$\text{Ind } \tau = \{(0 : 0 : 1)\}, \quad \text{Exc } \tau = \{x_0 = 0\}.$$

Remarquons que  $\rho$  et  $\tau$  sont aussi des involutions.

Deux éléments  $f$  et  $g$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  sont *birationnellement conjugués* s'il existe une transformation birationnelle  $h$  telle que  $f = hgh^{-1}$ . Les trois éléments  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\tau$  sont birationnellement conjugués à des involutions de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ ; on peut facilement trouver les conjuguées qui sont d'ailleurs dans [47].

## 1.2. Transformations rationnelles quadratiques

Soit  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_v$  l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $v$  dans  $\mathbb{C}^3$ . Considérons l'application rationnelle  $\det \text{jac}$  définie par

$$\det \text{jac} : \text{Rat}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3) \simeq \{ \text{courbes de degré 3} \}, \quad [Q] \dashrightarrow [\det \text{jac } Q = 0].$$

**Remarque 1.2.** — L'application  $\det \text{jac}$  n'est pas définie pour les applications  $[Q]$  telles que  $\det \text{jac } Q \equiv 0$ ; une telle application est à conjugaison g.d. près du type

$$(Q_0 : Q_1 : 0) \quad \text{ou bien} \quad (x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1).$$

En effet soit  $Q$  une transformation rationnelle quadratique telle que  $\det \text{jac } Q \equiv 0$ ; notons  $Q_i$  les composantes de  $Q$ .

Supposons que  $Q_0$  soit de rang maximal, par exemple  $Q_0 = \frac{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}{2}$ ; on peut alors se ramener à

$$Q_1 = ax_0x_2 + bx_0x_1 + q_1(x_1, x_2), \quad Q_2 = cx_0x_1 + q_2(x_1, x_2)$$

les  $q_i$  désignant des éléments de  $\mathbb{C}[x_1, x_2]_2$ . Un calcul montre que le coefficient de  $x_0^3$  dans  $\det \text{jac } Q$  est  $-ac$ ; nous sommes donc dans l'une des situations suivantes :

$$a \neq 0, c = 0; \quad a = 0, c \neq 0; \quad a = c = 0.$$

Si  $a \neq 0$  et  $c = 0$  l'égalité  $\det \text{jac } Q \equiv 0$  entraîne  $Q_2 = 0$ . Lorsque  $a = 0$  et  $c \neq 0$  on a, à partir de  $\det \text{jac } Q \equiv 0$ , l'égalité  $bQ_2 = Q_1$ . Enfin lorsque  $a$  et  $c$  sont nuls  $\det \text{jac } Q \equiv 0$  implique que :

- ou bien  $q_2 = 0$  d'où  $Q_2 = 0$ ;
- ou bien  $b = 0$  et  $q_1$  et  $q_2$  sont  $\mathbb{C}$ -colinéaires, par suite  $Q_1$  et  $Q_2$  sont  $\mathbb{C}$ -colinéaires.

Le cas où  $Q_0$  n'est pas de rang maximum se traite de la même façon.

**Proposition 1.3.** — *L'application  $\det \text{jac}$  est surjective.*

*Démonstration.* — Le déterminant jacobien de l'involution de CREMONA s'annule sur l'union de trois droites en position générale.

Soit  $Q$  la transformation rationnelle définie par  $(x_0^2 : x_1^2 : (x_0 - x_1)x_2)$ . La courbe donnée par  $\det \text{jac } Q = [x_0x_1(x_0 - x_1) = 0]$  est l'union de trois droites concourantes.

Le déterminant jacobien de  $\rho$  (resp.  $\tau$ ) est l'union d'une droite double et d'une droite simple (resp. une droite triple).

On remarque que

$$\det \text{jac} \left( -\frac{1}{\alpha}x_0^2 + x_2^2 : -\frac{\alpha}{2}x_0x_2 + \frac{1+\alpha}{4}x_0^2 - \frac{1}{4}x_1^2 : x_0x_1 \right) = [x_1^2x_2 = x_0(x_0 - x_2)(x_0 - \alpha x_2)]$$

de sorte que l'on atteint toutes les cubiques ayant une forme normale de WEIERSTRASS.

Posons  $Q := (x_0x_1 : x_0x_2 : x_0^2 + x_1x_2)$ ; alors  $\det \text{jac } Q = [x_0(x_0^2 - x_1x_2) = 0]$  est l'union d'une conique et d'une droite en position générale.

Ensuite pour la transformation  $Q$  définie par

$$(x_1^2 : x_0^2 + 2x_0x_2 : x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2)$$

on a  $\det \text{jac } Q = [x_1(2x_0^2 - x_1x_2) = 0]$  qui est l'union d'une conique et d'une droite tangente à cette conique.

Considérons  $E$  l'espace vectoriel des matrices  $3 \times 3$  dont les coefficients sont des formes linéaires;  $E$  est de dimension 27. Soit  $F$  le sous-espace linéaire de  $E$  formé des matrices jacobiniennes d'applications rationnelles quadratiques; on remarque que  $\dim F = 18$ . Soit  $\det$  le morphisme algébrique défini par :

$$\det : E \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3, \quad A \mapsto \det A.$$

D'après ce qui précède l'image de  $\det$  contient toutes les cubiques planes sauf éventuellement la cubique cuspidale. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_0 \end{bmatrix};$$

ce n'est pas la matrice jacobienne d'une transformation rationnelle quadratique mais

$$\det A = x_0^3 + x_1x_2^2.$$

L'application  $\det$  est donc surjective; en particulier ses fibres sont non vides et donc de dimension au moins  $27 - 10 = 17$ . Puisque  $F$  est de dimension 18 et  $E$  de dimension 27 la fibre de  $\det|_F$  au dessus de toute cubique plane est de dimension strictement positive; en particulier la cubique cuspidale est atteinte par  $\det \text{jac}$ .

Ainsi on obtient à conjugaison près toutes les cubiques planes. Pour conclure il suffit de faire agir l'action gauche-droite.  $\square$

### 1.3. Critère de birationnalité

Nous allons donner une présentation de la classification des transformations birationnelles quadratiques qui repose sur des arguments s'appuyant sur des remarques élémentaires. Notons

que la Proposition 1.5 qui suit n'est pas un énoncé original (*voir* par exemple [1], Proposition 3.5.3.); le point de vue abordé ici est toutefois différent du point de vue classique.

Soient  $g$  une transformation rationnelle et  $\psi$  un polynôme homogène en trois variables. On dit que  $g$  contracte  $\psi$  si l'image par  $g$  de la courbe  $[\psi = 0] \setminus \text{Ind } g$  est un ensemble fini.

Soit  $\tilde{f} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  une application polynomiale homogène de degré  $v$ ; on note  $\tilde{f}_i$  les composantes de  $\tilde{f}$  et on suppose que  $\text{pgcd}(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = 1$ . Les **points critiques** de  $\tilde{f}$  sont les zéros de  $\det \text{jac } \tilde{f}$ ; ils forment l'ensemble  $\mathcal{C}(\tilde{f})$ . Soit  $f = f^\bullet : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  l'application rationnelle induite par  $\tilde{f}$ ; l'hypothèse  $\text{pgcd}(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = 1$  implique que  $f$  est dominante. On désigne encore par  $\mathcal{C}(f)$  l'adhérence du lieu critique de la restriction de  $f$  à  $\mathbb{P}^2 \setminus \text{Ind } f$ ; si  $v \geq 2$  cet ensemble est une courbe algébrique propre. Un calcul local élémentaire montre que  $\mathcal{C}(f)$  est exactement le projectivisé de  $\mathcal{C}(\tilde{f})$ .

**Remarque 1.4.** — En général une transformation rationnelle ne contracte pas  $\det \text{jac } f$  (c'est par exemple le cas pour  $f = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$ ).

**Proposition 1.5.** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  dans lui-même;  $\det \text{jac } f$  est contracté par  $f$ .*

*Démonstration.* — Nous allons raisonner par l'absurde. Soit  $\Gamma$  une composante irréductible de  $\mathcal{C}(f)$ . Supposons que  $\Gamma$  ne soit pas contractée par  $f$ ; alors  $f(\Gamma \setminus \text{Ind } f)$  est une courbe  $\Gamma'$ . On se donne un point générique  $m$  de  $\Gamma$ ; en  $m$ , la transformation  $f$  est holomorphe,  $\Gamma$  est lisse et  $f|_\Gamma$  est une submersion du germe  $\Gamma_{,m}$  de  $\Gamma$  en  $m$  sur  $\Gamma'_{,m'}$  où  $m' = f(m)$ . À conjugaison par des difféomorphismes locaux à la source et au but près, on peut supposer que  $m = m' = 0$  et que  $\Gamma_{,m} = \Gamma'_{,m'} = (x_1 = 0)$ . Le théorème de la fonction inverse assure qu'on peut se ramener au voisinage de 0 à

$$f(x_0, 0) = (x_0, 0);$$

dit autrement il existe  $g_1, g_2$  deux fonctions holomorphes telles que

$$f(x_0, x_1) = (x_0 + x_1 g_1(x_0, x_1), x_1 g_2(x_0, x_1)).$$

Toujours par inversion locale on peut supposer que  $f(x_0, x_1) = (x_0, x_1 \psi(x_0, x_1))$ . Puisque

$$\det \text{jac } f = \psi(x_0, x_1) + x_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_0, x_1)$$

doit s'annuler sur  $x_1 = 0$  on a  $\psi(x_0, 0) = 0$ . Il en résulte que  $f$  s'écrit

$$(x_0, x_1^k \zeta(x_0, x_1)), \quad \text{avec } k \geq 2, \quad \zeta(x_0, 0) \neq 0.$$

Quitte à se placer en un point voisin de 0 sur  $x_1 = 0$ , on peut supposer que  $\zeta(0, 0)$  est non nul de sorte qu'à conjugaison locale à la source et au but près  $f$  est de la forme  $(x_0, x_1^k)$ . Or une application birationnelle est génériquement localement inversible ce qui n'est pas le cas pour  $(x_0, x_1^k)$  lorsque  $k \geq 2$ .  $\square$

Si  $A, B$  sont deux éléments de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $Q = A\sigma B$  (resp.  $Q = A\rho B$ , resp.  $Q = A\tau B$ ), alors  $\det \text{jac } Q$  est l'union de trois droites en position générale (resp. l'union d'une droite double et d'une droite simple, resp. une droite triple). Nous allons donner un critère qui permet de déterminer si une transformation quadratique rationnelle est birationnelle.

**Théorème 1.6.** — Soit  $Q$  une transformation rationnelle purement quadratique non dégénérée (i.e.  $\det \text{jac } Q \neq 0$ ). Supposons que  $Q$  contracte  $\det \text{jac } Q$ ; alors  $\det \text{jac } Q$  est l'union de trois droites (non concourantes lorsqu'elles sont distinctes) et  $Q$  est birationnelle.

De plus :

- si  $\det \text{jac } Q$  est l'union de trois droites en position générale,  $Q$  est, à équivalence g.d. près, l'involution de CREMONA  $\sigma$ ;
- si  $\det \text{jac } Q$  est l'union d'une droite double et d'une droite simple,  $Q$  coïncide, à conjugaison g.d. près, avec  $\rho$ ;
- enfin si  $\det \text{jac } Q$  est une droite triple,  $Q$  appartient à  $\mathcal{O}_{g.d.}(\tau)$ .

**Corollaire 1.7.** — Une transformation rationnelle quadratique de  $\mathbb{P}^2$  dans lui-même appartient à  $\mathcal{O}_{g.d.}(\sigma)$  si et seulement si elle admet trois points d'indétermination.

**Remarque 1.8.** — Un élément  $Q$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  contracte  $\det \text{jac } Q$  et ne contracte pas d'autre courbe. On peut se demander si le critère de birationnalité du Théorème 1.6 est encore valable en degré strictement supérieur à 2; la réponse est non. On a dès le degré 3 des exemples d'éléments  $Q$  qui contractent  $\det \text{jac } Q$  mais ne sont pas birationnels comme l'atteste la transformation  $(x_0^2 x_1 : x_0 x_2^2 : x_1^2 x_2)$ . Remarquons que si ce critère de birationnalité était valable en tout degré, il impliquerait la conjecture du jacobien de façon plus ou moins triviale. Rappelons ici que la conjecture jacobienne est satisfaite en toute dimension par les applications polynomiales de degré 2 (voir [3]). On trouve d'ailleurs ici et là dans ce qui suit des techniques élémentaires utilisées pour établir ce fait.

**Remarque 1.9.** — Nous ignorons si un critère analogue à celui donné dans le Théorème 1.6 existe en dimension quelconque ; [87] devrait permettre de s'en assurer en dimension 3.

*Démonstration du Théorème 1.6.* — Montrons que  $\det \text{jac } Q$  est l'union de trois droites.

Supposons  $\det \text{jac } Q$  irréductible. Écrivons  $Q$  sous la forme  $(Q_0 : Q_1 : Q_2)$ . À composition à gauche près on peut supposer que  $\det \text{jac } Q$  est contracté sur  $(1 : 0 : 0)$ ; alors  $\det \text{jac } Q$  divise  $Q_2$  et  $Q_3$  : impossible.

De la même façon si  $\det \text{jac } Q = Lq$  avec  $L$  linéaire et  $q$  quadratique non dégénérée, on peut se ramener à :  $q = 0$  est contracté sur  $(1 : 0 : 0)$ ; alors  $Q$  s'écrit  $(q_1 : q : \alpha q)$  et donc est dégénérée.

Ainsi  $\det \text{jac } Q$  est le produit de trois formes linéaires.

Étudions le cas où, à conjugaison près,  $\det \text{jac } Q = x_0 x_1 x_2$ . Si les droites  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 0$  sont contractées sur un même point, disons  $(1 : 0 : 0)$ , alors  $Q$  est de la forme  $(q : x_0 x_1 : \alpha x_0 x_1)$  qui est dégénérée. Les droites  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  sont donc contractées sur trois points distincts. Un calcul direct montre qu'ils ne peuvent être alignés. On se ramène au cas où  $x_0 = 0$  (resp.  $x_1 = 0$ , resp.  $x_2 = 0$ ) est contractée sur  $(1 : 0 : 0)$  (resp.  $(0 : 1 : 0)$ , resp.  $(0 : 0 : 1)$ ); on constate alors que  $Q$  est l'involution de CREMONA à conjugaison près.

Considérons l'éventualité où  $\det \text{jac } Q$  a deux branches  $x_0 = 0$  et  $x_2 = 0$ . D'après ce que l'on vient de voir, les droites  $x_0 = 0$  et  $x_2 = 0$  sont contractées sur deux points distincts, par

exemple  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 1 : 0)$ . La transformation  $Q$  s'écrit donc, à équivalence g.d. près,

$$Q = (x_2(\alpha x_1 + \beta x_2) : x_0(\gamma x_0 + \delta x_1) : x_0 x_2).$$

Pour que  $\det \text{jac } Q$  ait deux branches il faut que  $\alpha\delta = 0$ . Un calcul direct montre que  $Q$  est birationnelle dès que  $\beta\delta - \alpha\gamma \neq 0$  et en fait g.d. équivalente à  $\rho$ .

On s'intéresse au cas où  $\det \text{jac } Q = x_2^3$ . On peut supposer que  $x_2 = 0$  est contractée sur  $(1 : 0 : 0)$ ; alors  $Q = (q : x_2 \ell_1 : x_2 \ell_2)$  où  $q$  désigne une forme quadratique et les  $\ell_i$  des formes linéaires.

- Si  $(x_2, \ell_1, \ell_2)$  est un système de coordonnées, on peut écrire à conjugaison près

$$Q = (q : x_0 x_2 : x_1 x_2), \quad q = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0 x_1.$$

Le calcul explicite de  $\det \text{jac } Q$  conduit à  $a = b = d = 0$ , *i.e.* ou bien  $Q$  est dégénérée, ou bien  $Q$  représente une transformation linéaire, toutes choses exclues.

- Supposons que  $(x_2, \ell_1, \ell_2)$  ne soit pas un système de coordonnées, *i.e.*

$$\ell_1 = ax_2 + \ell(x_0, x_1), \quad \ell_2 = bx_2 + \varepsilon \ell(x_0, x_1).$$

Notons que  $\ell$  n'étant pas identiquement nulle (sinon  $Q$  serait dégénérée), on peut se ramener à  $\ell = x_0$ . À équivalence g.d. près  $Q$  est de la forme  $(q : x_0 x_2 : x_2^2)$ . Un calcul explicite conduit à  $\det \text{jac } Q = -2x_2^2 \frac{\partial q}{\partial x_1}$ ; par suite  $\frac{\partial q}{\partial x_1}$  est divisible par  $x_2$  autrement dit  $q$  est du type  $\alpha x_2^2 + \beta x_0 x_2 + \gamma x_0^2 + \delta x_1 x_2$ . Toujours à équivalence g.d. près, on obtient  $Q = \tau$ .

Pour finir abordons la possibilité :  $\det \text{jac } Q = x_0 x_1 (x_0 - x_1)$ . Comme on l'a vu les droites  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 0$  sont contractées sur deux points distincts que l'on va supposer être  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 1 : 0)$ . Il s'en suit que

$$Q = (x_1(ax_0 + bx_1 + cx_2) : x_0(\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2) : x_0 x_1)$$

avec  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . On constate que l'image de la droite  $x_0 = x_1$  par  $Q$  est

$$((a+b)x_0 + cx_2 : (\alpha + \beta)x_0 + \gamma x_2 : x_0);$$

c'est un point si et seulement si  $c$  et  $\gamma$  sont nuls auquel cas  $Q$  ne dépend pas de  $x_2$ . □

Posons

$$\Sigma^3 := O_{g.d.}(\sigma), \quad \Sigma^2 := O_{g.d.}(\rho), \quad \Sigma^1 := O_{g.d.}(\tau).$$

Considérons une transformation birationnelle représentée par  $Q = \ell(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2)$  où  $\ell$  et les  $\ell_i$  désignent des formes linéaires, les  $\ell_i$  étant indépendantes. La droite  $\ell = 0$  est une « droite contractée apparente » ; en effet l'action de  $Q$  sur  $\mathbb{P}^2$  est évidemment celle de l'automorphisme  $(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2)$  de  $\mathbb{P}^2$ . On notera  $\Sigma^0$  l'ensemble de ces transformations :

$$\Sigma^0 = \{ \ell(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2) \mid \ell, \ell_i \text{ formes linéaires, les } \ell_i \text{ étant indépendantes} \}.$$

Les éléments de  $\Sigma^0$  seront abusivement appelés linéaires ; en fait c'est l'ensemble

$$(\Sigma^0)^\bullet = \{ f^\bullet \mid f \in \Sigma^0 \}$$

qui s'identifie à  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ . On a  $\Sigma^0 = O_{g.d.}(x_0(x_0 : x_1 : x_2))$  : à conjugaison gauche-droite près un élément de la forme  $\ell A$  s'écrit  $x_0 A'$  puis  $x_0 \mathrm{id}$ . Cette approche permet de voir les dégénérescences de transformations quadratiques sur des applications linéaires.

Un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$  est appelé **automorphisme de HÉNON** s'il s'écrit (à conjugaison affine près)

$$(x_1, P(x_1) - \delta x_0), \quad P \in \mathbb{C}[x_1], \deg P \geq 2, \delta \in \mathbb{C}^*.$$

D'après le Théorème 1.6 le prolongement à  $\mathbb{P}^2$  de tout automorphisme de HÉNON quadratique appartient à  $\Sigma^1$ .

Remarquons qu'un élément de  $\Sigma^i$  compte  $i$  points d'indétermination et  $i$  courbes contractées.

Un élément de  $\Sigma^i$  ne peut être linéairement conjugué à un élément de  $\Sigma^j$  où  $j \neq i$ ; par contre il peut l'être birationnellement : on a par exemple signalé précédemment que les involutions  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\tau$  sont dynamiquement conjuguées à des involutions de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Toutefois des arguments que nous développerons au Chapitre 3 montrent qu'un élément générique de  $\Sigma^i$ , pour  $i \geq 1$ , n'est pas birationnellement conjugué à une transformation linéaire.

**Corollaire 1.10.** — *On a*

$$\mathring{\mathrm{Bir}}_2 = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3, \quad \mathrm{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3.$$

**Remarques 1.11.** — *i.* Une décomposition de NETHER de  $\rho$  est :

$$(x_2 - x_1 : x_1 - x_0 : x_1) \sigma (x_1 + x_2 : x_2 : x_0) \sigma (x_0 + x_2 : x_1 - x_2 : x_2)$$

qu'il faudrait en toute légitimité écrire

$$\rho^\bullet = ((x_2 - x_1 : x_1 - x_0 : x_1) \sigma (x_1 + x_2 : x_2 : x_0) \sigma (x_0 + x_2 : x_1 - x_2 : x_2))^\bullet.$$

On retrouve donc le fait classique suivant déjà énoncé dans [64, 1] : pour toute transformation birationnelle quadratique  $Q$  ayant deux points d'indétermination il existe  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  dans  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $Q = \ell_1 \sigma \ell_2 \sigma \ell_3$ . En particulier la détermination des transformations linéaires  $\ell$  telle que  $\sigma \ell \sigma$  soit quadratique mérite attention (voir Chapitre 4).

*ii.* La transformation  $\tau = (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2 - x_0 x_2)$ , qui s'écrit aussi  $\ell_1 \sigma \ell_2 \sigma \ell_3 \sigma \ell_4 \sigma \ell_5$  avec

$$\begin{aligned} \ell_1 &= (x_1 - x_0 : 2x_1 - x_0 : x_2 - x_1 + x_0), & \ell_2 &= (x_0 + x_2 : x_0 : x_1), \\ \ell_3 &= (-x_1 : x_0 + x_2 - 3x_1 : x_0), & \ell_4 &= (x_0 + x_2 : x_0 : x_1), \\ \ell_5 &= (x_1 - x_0 : -2x_0 + x_2 : 2x_0 - x_1), \end{aligned}$$

est dans  $\Sigma^1$ . Il s'en suit que tout élément de  $\Sigma^1$  est de la forme  $\ell_1 \sigma \ell_2 \sigma \ell_3 \sigma \ell_4 \sigma \ell_5$  avec  $\ell_i$  dans  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  (voir [64, 1]). La réciproque est fautive au sens où tout élément du type

$$\ell_1 \sigma \ell_2 \sigma \ell_3 \sigma \ell_4 \sigma \ell_5$$

n'appartient pas à  $\Sigma^1$ ; génériquement (sur le choix des  $\ell_i$ ) un tel élément est de degré 16.

### 1.4. Relations et transformations birationnelles, second critère de birationnalité

Soit  $Q = (Q_0 : Q_1 : Q_2)$  une transformation rationnelle de  $\mathbb{P}^2$ ; on appelle *relation linéaire* de  $Q$  tout triplet  $L = (L_0, L_1, L_2)$  de formes linéaires satisfaisant

$$L_0 Q_0 + L_1 Q_1 + L_2 Q_2 = 0.$$

On note  $\text{RL}(Q)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des relations linéaires de  $Q$ . On observe que la dimension  $e(Q)$  de  $\text{RL}(Q)$  est invariante sous l'action gauche-droite. Rappelons le résultat classique suivant :

**Proposition 1.12 ([94]).** — Soient  $f_1, \dots, f_n$  des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  tels que  $\{f_1 = \dots = f_n = 0\} = \{0\}$ . Alors le  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ -module des relations

$$R(f) := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0) \mid a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0\}$$

est engendré par les relations triviales  $f_{ij} = \underbrace{(0, \dots, 0}_{i-1}, \overbrace{0, f_j, 0, \dots, 0}^{j-1}, -f_i, 0, \dots, 0)$ .

Une conséquence de cet énoncé est la suivante :

**Proposition 1.13.** — Soit  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  un endomorphisme de  $\mathbb{P}^2$ , c'est-à-dire  $f$  satisfait  $\{f_0 = f_1 = f_2 = 0\} = \{0\}$ . Si  $\deg f \geq 2$ , alors  $\text{RL}(f) = \{0\}$ .

Désormais nous considérons plus particulièrement les transformations quadratiques pures.

**1.4.1. Calculs explicites d'espaces de relations linéaires.** — Nous allons calculer  $\text{RL}(Q)$  pour quelques  $Q$  typiques.

Nous commençons par l'involution de CREMONA  $\sigma$ . Visiblement  $\text{RL}(\sigma)$  est engendré par les relations  $(-x_0, x_1, 0)$  et  $(x_0, 0, -x_2)$ . On a donc  $e(\sigma) = 2$ ; on remarque que  $\text{RL}(\sigma)$  s'identifie naturellement (on représente les  $\ell$  par des matrices  $3 \times 3$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ) à l'algèbre de LIE commutative des matrices diagonales de trace nulle. Notons que si l'on tord  $\sigma$  par conjugaison diagonale, i.e. on considère  $\sigma_\alpha = (\alpha_0 x_1 x_2 : \alpha_1 x_0 x_2 : \alpha_2 x_0 x_1)$ , alors  $\text{RL}(\sigma_\alpha)$  s'identifie à l'algèbre des matrices diagonales

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

telles que  $\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$ . L'invariance g.d. de l'entier  $e$  nous permet d'affirmer que pour tout élément  $Q$  dans  $\Sigma^3$  on a  $e(Q) = 2$ .

Nous considérons maintenant la transformation  $\rho'$  de  $\Sigma^2$  définie par

$$\rho' = (x_1 x_2 : x_1 x_2 - x_0 x_2 : -x_1^2).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\text{RL}(\rho') = \{(\alpha x_0 + \beta x_1, \alpha x_1, (\alpha + \beta) x_2) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Ainsi  $e(\rho') = 2$  et  $\text{RL}(\rho')$  s'identifie à l'algèbre de LIE commutative de dimension 2 des matrices de JORDAN du type

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

Comme précédemment pour tout élément  $Q$  de  $\Sigma^2$  on a  $e(Q) = 2$ .

Nous choisissons dans  $\Sigma^1$  l'élément  $\tau'$  défini par  $\tau' = (x_2^2 : -x_1x_2 : x_1^2 - x_0x_2)$ . On vérifie que

$$\text{RL}(\tau') = \{(\alpha x_0 + \beta x_1, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_2) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Ici encore  $e(\tau') = 2$  et  $\text{RL}(\tau')$  s'identifie à l'algèbre de LIE commutative constituée des matrices de JORDAN de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Cette correspondance entre les orbites de  $\Sigma^3$ ,  $\Sigma^2$  et  $\Sigma^1$  et les différents types d'algèbres de LIE abéliennes de dimension 2 des matrices  $3 \times 3$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  s'avère pour le moins curieuse, mais peut-être seulement anecdotique.

Passons maintenant au calcul de l'invariant  $e$  pour une transformation de  $\Sigma^0$ . Considérons par exemple l'application identité représentée dans  $\text{Bir}_2$  par  $\text{id}_\ell = (\ell x_0 : \ell x_1 : \ell x_2)$  où  $\ell$  est une forme linéaire non triviale. On constate que  $\text{RL}(\text{id}_\ell)$  est indépendant du choix de  $\ell$  et est engendré par  $(x_1, -x_0, 0)$ ,  $(x_2, 0, -x_0)$  et  $(0, x_2, -x_1)$ . Il en résulte que  $e(\text{id}_\ell) = 3$  et que  $\text{RL}(\text{id}_\ell)$  s'identifie à l'algèbre de LIE simple de dimension 3 des matrices  $3 \times 3$  antisymétriques. Évidemment  $e(Q)$  vaut 3 pour tout élément  $Q$  de  $\Sigma^0$ .

Nous avons établi la :

**Proposition 1.14.** — *Soit  $Q$  une transformation birationnelle quadratique. Alors :*

- $Q$  appartient à  $\Sigma^0$  si et seulement si  $e(Q) = 3$ ;
- $Q$  est purement quadratique si et seulement si  $e(Q) = 2$ .

Comme on l'a vu il y a dans l'adhérence de  $\text{Bir}_2$  dans  $\mathbb{P}^{17}$  des éléments dégénérés  $Q$  pour lesquels les espaces  $\text{RL}(Q)$  se calculent aisément. En voici quelques uns :

$$\text{RL}(x_0^2 : x_1^2 : 0) = \{(0, 0, \ell) \mid \ell \text{ forme linéaire}\}$$

est de dimension 3 et c'est encore une algèbre de LIE ;

$$\text{RL}(x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1) = \{(\alpha x_1, \beta x_0, -\alpha x_0 - \beta x_1) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$$

est de dimension 2.

**1.4.2. Critère de birationnalité.** — Remarquons que si  $Q$  est birationnelle purement quadratique,  $\text{RL}(Q)$  contient un élément  $L$  qui, vu comme endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$ , est inversible. Ce n'est plus le cas pour les transformations  $Q$  de  $\Sigma^0$ ; les éléments de  $\text{RL}(Q)$  sont alors tous non inversibles.

**Lemme 1.15.** — *Soit  $Q$  un élément de  $\text{Rat}_2$  tel que  $e(Q) = 2$ . Si  $\text{RL}(Q)$  contient un élément inversible,  $Q$  appartient à  $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\{L = (L_0, L_1, L_2), L' = (L'_0, L'_1, L'_2)\}$  une base de  $\text{RL}(Q)$ ; on peut supposer que  $L$  et  $L'$  sont inversibles. Considérons la transformation quadratique  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ , dite déterminantielle, définie par  $f = L \wedge L'$  :

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 L'_2 - L_2 L'_1 \\ L_2 L'_0 - L_0 L'_2 \\ L_0 L'_1 - L_1 L'_0 \end{bmatrix}.$$

Commençons par quelques remarques :

- i.* Supposons que  $f$  soit identiquement nulle. Comme  $L$  est inversible,  $L'$  est un multiple de  $L$  ce qui contredit le fait que  $\text{RL}(Q)$ , de dimension 2, soit engendré par  $L$  et  $L'$ .
- ii.* Si  $Q$  n'est pas purement quadratique,  $e(Q)$  est minoré par 3. Ceci se constate au cas par cas en utilisant le fait que  $Q$  est à équivalence g.d. près de l'un des types suivants :
  - $(\ell x_0, \ell x_1, \ell x_2)$ ,  $\ell$  désignant une forme linéaire ;
  - $(\ell x_0, \ell x_1, 0)$ ,  $\ell$  étant une forme linéaire ;
  - $(q, 0, 0)$  avec  $q$  forme quadratique.

D'après *i.* en un point générique  $m$  les vecteurs  $L(m)$  et  $L'(m)$  sont indépendants, *i.e.*  $f$  est non identiquement nulle et satisfait  $f \wedge Q = 0$ . D'après *ii.* on a  $\text{codim } Q^{-1}(0) \geq 2$ ; la Proposition 1.13 assure que  $Q^{-1}(0)$  ne peut se réduire à  $\{0\}$  de sorte que  $Q^{-1}(0)$  est constitué d'un nombre fini de droites. En particulier  $Q$  satisfait la propriété de division de DE RHAM-SAITO ([88]), *i.e.* il existe  $h$  dans  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$  tel que  $f$  s'écrive  $hQ$ . Pour des raisons d'homogénéité  $h$  est une constante non nulle et on peut supposer que  $Q = L \wedge L'$ . Les zéros de  $Q$  (qui correspondent en coordonnées homogènes aux points d'indétermination) sont exactement les points  $m$  où  $L$  et  $L'$  sont colinéaires ; dit autrement ce sont les directions propres de  $L^{-1}L'$ . Il y a évidemment trois possibilités :

- $L^{-1}L'$  a trois directions propres non colinéaires ;
- $L^{-1}L'$  compte deux directions propres non colinéaires ;
- $L^{-1}L'$  possède une unique direction propre.

Dans la première éventualité  $Q$  a trois points d'indétermination et est donc birationnelle, en fait dans  $\Sigma^3$ . Dans les autres cas pour établir la birationnalité on peut supposer à équivalence g.d. près que  $L = \text{id}$ ; il suffit alors d'examiner les différents types de JORDAN pour  $L'$ . Ainsi dans le second cas il y a deux points d'indétermination, *i.e.*  $Q$  appartient à  $\Sigma^2$ . Enfin dans la dernière possibilité,  $Q$  compte un unique point d'indétermination :  $Q$  est un élément de  $\Sigma^1$ .  $\square$

Inversement on a le :

**Lemme 1.16.** — Soit  $Q$  un élément de  $\mathbb{P}^{17}$  représentant une transformation rationnelle telle que  $e(Q) = 2$ . Supposons que les éléments de  $\text{RL}(Q)$  soient non inversibles. Alors  $Q$  coïncide, à conjugaison gauche-droite près, avec  $(x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1)$ ; en particulier  $Q$  appartient à  $\overline{\text{Bir}}_2$ .

*Démonstration.* — On procède comme dans le lemme précédent. La transformation  $Q$  est nécessairement purement quadratique en particulier  $\dim Q^{-1}(0) \leq 1$ . Soit  $\{L, L'\}$  une base de  $\text{RL}(Q)$ .

Montrons que  $f := L \wedge L'$  ne peut être identiquement nul. Raisonnons par l'absurde. Si  $f$  est nul, l'argument de division de DE RHAM-SAITO ([88]) impose que  $L$  et  $L'$  s'annulent sur un hyperplan de sorte que

$$L = \ell(a, b, c), \quad L' = \ell'(a', b', c')$$

où  $\ell, \ell'$  désignent des formes linéaires et  $(a, b, c), (a', b', c')$  des éléments de  $\mathbb{C}^3$ ; ceci implique que  $Q$  n'est pas purement quadratique : contradiction. Ainsi comme dans la démonstration du Lemme 1.15 on a  $L \wedge L' \neq 0$  et on peut supposer que  $Q$  s'écrit  $L \wedge L'$ . Notons que chaque élément de  $\text{RL}(Q)$  est, par l'argument précédent, précisément de rang 2. En particulier  $\ker(L - tL')$  est, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{C}$ , une droite  $\mathcal{D}_t$  dépendant holomorphiquement de  $t$ . On observe que chaque  $\mathcal{D}_t$  appartient à  $Q^{-1}(0)$ ; il s'en suit que  $\mathcal{D}_t$  est constant et  $L, L'$  ont même noyau, disons  $\mathbb{C}(0, 0, 1)$ . Par conséquent  $Q$  est du type

$$(Q_0(x_0, x_1) : Q_1(x_0, x_1) : Q_2(x_0, x_1)).$$

Si les  $Q_i$  forment une base des formes quadratiques en deux variables,  $Q$  est g.d. conjugué à  $(x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1)$  comme annoncé. Sinon  $Q$  est, toujours à conjugaison g.d. près, du type  $(Q_0 : Q_1 : 0)$ ; mais pour une telle transformation  $\dim \text{RL}(Q) \geq 3$  ce qui, par hypothèse, est impossible.  $\square$

**Lemme 1.17.** — Soit  $Q$  une transformation rationnelle quadratique. Si  $e(Q) \geq 3$ , alors  $Q$  appartient à  $\overline{\text{Bir}}_2$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe  $L$  et  $L'$  dans  $\text{RL}(Q)$  tels que  $L \wedge L' \neq 0$ . Si  $L \wedge L'$  s'annulait sur un ensemble de codimension 2, alors, d'après [88], la dimension de  $\text{RL}(Q)$  serait 2 ce qui n'est pas le cas. Par suite  $L \wedge L'$  est divisible par une forme linéaire ou une forme quadratique. Dans la première éventualité  $Q$  est du type  $\ell f$  où  $\ell$  désigne une forme linéaire et  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$ ; visiblement  $Q$  est dans  $\overline{\text{Bir}}_2$ . Dans le second cas  $Q$  est à conjugaison près de l'un des types suivants

$$(x_2^2 + x_0x_1 : 0 : 0), \quad (x_0x_1 : 0 : 0), \quad (x_0^2 : 0 : 0)$$

qui sont tous dans  $\overline{\text{Bir}}_2$  : ils sont de la forme  $A\sigma, A\rho$  ou  $A\tau$  lorsque  $A$  « dégénère » sur un élément non inversible.

Supposons que pour tout choix de  $L$  et  $L'$  dans  $\text{RL}(Q)$  on ait  $L \wedge L' \equiv 0$ . Tout élément de  $\text{RL}(Q)$  est de rang 1 sinon on aurait  $e(Q) = 1$ . En particulier il existe  $(a, b, c)$  dans  $\mathbb{C}^3$  tel que

$$\text{RL}(Q) = \{(\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2)(a, b, c) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3\}$$

et  $Q$  est dégénérée ; on peut d'ailleurs se ramener, à équivalence g.d. près, à

$$Q = (Q_0(x_0, x_1, x_2) : Q_1(x_0, x_1, x_2) : 0).$$

Montrons qu'un tel élément est dans  $\overline{\text{Bir}}_2$ . On peut supposer que  $Q$  est purement quadratique. Les formes normales des couples  $(Q_0, Q_1)$  sont données par la classification des pincesaux de coniques que l'on trouve par exemple dans [63]. À équivalence g.d. près on se ramène aux modèles suivants :

$$\begin{aligned} (x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1 : \alpha x_1x_2 + \beta x_0x_2 + \gamma x_0x_1 : 0), & \quad (x_2^2 : x_0x_1 : 0), \\ (x_0^2 : x_0x_1 + x_2^2 : 0), & \quad (x_0^2 + x_1^2 : x_0x_1 + x_2^2 : 0). \end{aligned}$$

Visiblement  $(x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1 : \alpha x_1x_2 + \beta x_0x_2 + \gamma x_0x_1 : 0)$  est une dégénérescence de transformations de type  $A\sigma$ ; elle est donc dans  $\overline{\text{Bir}}_2$ . De même les transformations  $(x_2^2 : x_0x_1 : 0)$  et  $(x_0^2 : x_0x_1 + x_2^2 : 0)$  le sont aussi en considérant des transformations du type  $A\rho, A\tau$  avec  $\det A = 0$ . Pour montrer que  $(x_0^2 + x_1^2 : x_0x_1 + x_2^2 : 0)$  est dans l'adhérence de  $\text{Bir}_2$  on procède comme suit. Les 2 formes quadratiques ci-dessus s'annulent simultanément sur quatre droites en position générale plus précisément sur :

$$\text{Vect}(\mathbf{i}, 1, e^{3i\pi/4}), \quad \text{Vect}(\mathbf{i}, 1, -e^{3i\pi/4}), \quad \text{Vect}(-\mathbf{i}, 1, e^{i\pi/4}), \quad \text{Vect}(-\mathbf{i}, 1, -e^{i\pi/4}).$$

Par conjugaison à droite près on peut ramener trois de ces droites en position standard :

$$\text{Vect}(1, 0, 0), \quad \text{Vect}(0, 1, 0), \quad \text{Vect}(0, 0, 1).$$

Après cette modification  $(x_0^2 + x_1^2 : x_0x_1 + x_2^2 : 0)$  est du type  $A\sigma$ , la dernière ligne de  $A$  étant nulle. La transformation  $(x_0^2 + x_1^2 : x_0x_1 + x_2^2 : 0)$  est donc une dégénérescence d'un élément de  $\Sigma^3$ .  $\square$

On obtient finalement le :

**Théorème 1.18.** — *Soit  $Q$  une transformation rationnelle quadratique.*

*Si  $e(Q) \geq 2$ , alors  $Q$  appartient à  $\overline{\text{Bir}}_2$ .*

*Si  $Q$  est non dégénérée et  $e(Q) = 2$ , alors  $Q$  appartient à  $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$ .*

**1.4.3. Paramétrisation de l'adhérence de  $\text{Bir}_2$ .** — En fait en suivant les raisonnements précédents on a le :

**Théorème 1.19.** — *Soit  $Q$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_2$ ; il existe  $L$  et  $L'$  deux formes linéaires telles que  $Q = L \wedge L'$ . Inversement une transformation non dégénérée du type  $L \wedge L'$  est dans  $\text{Bir}_2$ . Les éléments de  $\text{Bir}_2$  sont donc exactement les applications quadratiques « déterminantielles ».*

Ceci permet d'obtenir de nouveau  $\overline{\text{Bir}}_2$  comme l'adhérence de l'image d'un morphisme (l'ancienne étant  $(A, B) \mapsto A\sigma B$ ). Plus précisément introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} L &= (a_0x_0 + b_0x_1 + c_0x_2 : a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2), \\ L' &= (\alpha_0x_0 + \beta_0x_1 + \gamma_0x_2 : \alpha_1x_0 + \beta_1x_1 + \gamma_1x_2 : \alpha_2x_0 + \beta_2x_1 + \gamma_2x_2), \end{aligned}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},$$

$$Q = (A_0x_0^2 + B_0x_1^2 + C_0x_2^2 + D_0x_1x_2 + E_0x_0x_2 + F_0x_0x_1 : A_1x_0^2 + B_1x_1^2 + C_1x_2^2 \\ + D_1x_1x_2 + E_1x_0x_2 + F_1x_0x_1 : A_2x_0^2 + B_2x_1^2 + C_2x_2^2 + D_2x_1x_2 + E_2x_0x_2 + F_2x_0x_1),$$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

L'égalité  $Q = L \wedge L'$  s'exprime alors comme suit

$$\begin{aligned} A &= a \wedge \alpha, & B &= b \wedge \beta, & C &= c \wedge \gamma, \\ D &= b \wedge \gamma + c \wedge \beta, & E &= a \wedge \gamma + c \wedge \alpha, & F &= a \wedge \beta + b \wedge \alpha \end{aligned}$$

ce qui, comme annoncé, permet de paramétrer  $\overline{\text{Bir}}_2$  comme l'adhérence de l'image d'un morphisme rationnel.

Considérons la matrice  $M$  à 10 lignes et 9 colonnes définie par

$$M(Q) = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & C_2 \\ B_0 & F_0 & 0 & B_1 & F_1 & 0 & B_2 & F_2 & 0 \\ F_0 & A_0 & 0 & F_1 & A_1 & 0 & F_2 & A_2 & 0 \\ C_0 & 0 & E_0 & C_1 & 0 & E_1 & C_2 & 0 & E_2 \\ E_0 & 0 & A_0 & E_1 & 0 & A_1 & E_2 & 0 & A_2 \\ 0 & C_0 & D_0 & 0 & C_1 & D_1 & 0 & C_2 & D_2 \\ 0 & D_0 & B_0 & 0 & D_1 & B_1 & 0 & D_2 & B_2 \\ D_0 & E_0 & F_0 & D_1 & E_1 & F_1 & D_2 & E_2 & F_2 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que si  $Q = L \wedge L'$ , les vecteurs

$${}^t(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2) \quad \text{et} \quad {}^t(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$$

sont dans le noyau de  $M(Q)$ . Le Théorème 1.19 s'énonce en partie comme suit :

**Proposition 1.20.** — *Soit  $Q$  une transformation rationnelle quadratique non dégénérée. Alors  $Q$  appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $\text{rg } M(Q) \leq 7$ .*

Cette proposition est très pratique pour tester des exemples effectifs, en particulier avec `Maple`, puisqu'il s'agit de décider de l'annulation de certains polynômes à l'inverse du Théorème 1.6 qui lui demande un calcul de racines de polynômes.

### 1.5. Quelques orbites sous l'action gauche-droite

Comme on l'a vu précédemment,  $\text{Bir}_2$  apparaît comme une union finie de g.d. orbites. Ceci n'en fait pas pour autant un sous-ensemble algébrique fermé de  $\text{Rat}_2$ . Par exemple la transformation « constante »  $(x_1x_2 : 0 : 0)$  est dans l'adhérence de  $O_{g.d.}(\sigma)$  mais pas dans  $\text{Bir}_2$ . Par contre l'ensemble  $\overline{\text{Bir}}_2$  peut être vu comme un sous-ensemble algébrique de  $\mathbb{P}^{17}$ ; ceci peut être déduit par exemple du Théorème 1.19 et d'arguments élémentaires de géométrie algébrique. Pour préciser la nature de  $\text{Bir}_2$  nous allons essayer d'étudier quelques propriétés du « feuilletage » induit par l'action g.d. sur  $\mathbb{P}^{17}$ ; pour cela on commence par s'intéresser à quelques orbites spéciales.

Au même titre que  $\sigma$  le déterminant jacobien des transformations rationnelles

$$(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2) \quad \text{et} \quad (x_0^2 : x_1^2 + x_0x_2 : x_2^2)$$

s'annule sur trois droites en position générale.

**Proposition 1.21.** — *Les orbites de  $\sigma = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$  et  $(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  sont de dimension 14, l'orbite de  $(x_0^2 : x_1^2 + x_0x_2 : x_2^2)$  est de dimension 15.*

*Démonstration.* — Calculons le groupe d'isotropie de  $(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  : soient  $A, B$  dans  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$  et  $\eta$  dans  $\mathbb{C}^*$  tels que

$$A(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)B = \eta(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2).$$

Notons  $B_i$  les composantes de  $B$ ; à partir de

$$\det \text{jac} A(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)B = \det \text{jac} \eta(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$$

on obtient  $B_1B_2B_3 = \eta^3x_0x_1x_2$ . Comme  $(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  commute aux permutations, la composante neutre du groupe d'isotropie est formée d'éléments  $(A, B)$  diagonaux. Posons

$$A := \left( \mu_1x_0 : \mu_2x_1 : \frac{x_2}{\mu_1\mu_2} \right), \quad B := \left( \alpha_1x_0 : \alpha_2x_1 : \frac{x_2}{\alpha_1\alpha_2} \right).$$

L'égalité  $A(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)B = \eta(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  entraîne :

$$\mu_1\alpha_1^2 = \eta, \quad \mu_2\alpha_2^2 = \eta, \quad 1 = \mu_1\mu_2\alpha_1^2\alpha_2^2\eta.$$

Il en résulte que  $\eta^3 = 1$ , i.e. à indice fini près  $\eta$  vaut 1 et  $\mu_1\alpha_1^2 = \mu_2\alpha_2^2 = 1$ . Ainsi le groupe d'isotropie de  $(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  est de dimension 2 donc  $\dim O_{g.d.}(x_0^2 : x_1^2 : x_2^2) = 14$ .

Par ailleurs soient  $A, C$  dans  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$  et  $\eta$  dans  $\mathbb{C}^*$  tels que

$$A(x_1^2 + x_0x_2 : x_0^2 : x_2^2) = \eta(x_1^2 + x_0x_2 : x_0^2 : x_2^2)C.$$

Un calcul montre qu'on est nécessairement dans l'une des situations suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \left( \eta\beta^2x_0 : \eta\alpha^2x_1 : \eta\frac{\beta^4}{\alpha^2}x_2 \right), & C &= \left( \alpha x_0 : \beta x_1 : \frac{\beta^2}{\alpha}x_2 \right) & \text{et} & \quad \eta^3 = \beta^3 = 1; \\ A &= \left( \eta\beta^2x_0 : \eta\alpha^2x_2 : \eta\frac{\beta^4}{\alpha^2}x_1 \right), & C &= \left( \alpha x_2 : \beta x_1 : \frac{\beta^2}{\alpha}x_0 \right) & \text{et} & \quad \eta^3 = \beta^3 = 1. \end{aligned}$$

Le groupe d'isotropie de  $(x_1^2 + x_0x_2 : x_0^2 : x_2^2)$  est donc de dimension 1; on en déduit que  $\dim O_{g.d.}(x_1^2 + x_0x_2 : x_0^2 : x_2^2) = 15$ .

Bien sûr on peut calculer de la même façon le groupe d'isotropie de  $\sigma$ , mais nous aurons besoin plus loin de l'espace tangent à  $\mathcal{O}_{g.d.}(\sigma)$  en  $\sigma$  :

$$T_{\sigma}\mathcal{O}_{g.d.}(\sigma) = \{(a_2x_1^2 + a_3x_2^2 + a_4x_0x_1 + a_5x_0x_2 + a_6x_1x_2 : b_1x_0^2 + b_3x_2^2 + b_4x_0x_1 + b_5x_0x_2 + b_6x_1x_2 : c_1x_0^2 + c_2x_1^2 + c_4x_0x_1 + c_5x_0x_2 + c_6x_1x_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}\}.$$

On constate ainsi que  $T_{\sigma}\mathcal{O}_{g.d.}(\sigma)$  est de codimension 3 et l'orbite de  $\sigma$  est de dimension 14.  $\square$

**Remarque 1.22.** — Posons  $\mathcal{Q}_0 := (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  et  $\mathcal{Q}_1 := (x_0^2 : x_1^2 + x_0x_2 : x_2^2)$ . Pour  $\varepsilon \neq 0$  la transformation

$$Q_{\varepsilon} := \left(x_0 : x_1 : \frac{x_2}{\varepsilon}\right) Q_1(x_0 : x_1 : \varepsilon x_2) = (x_0^2 : x_1^2 + \varepsilon x_0x_2 : x_2^2)$$

est g.d. conjuguée à  $\mathcal{Q}_1$ ; lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, cette transformation  $Q_{\varepsilon}$  tend vers  $\mathcal{Q}_0$ . Puisque la dimension du groupe d'isotropie de  $\mathcal{Q}_1$  est strictement inférieure à celle du groupe d'isotropie de  $\mathcal{Q}_0$ , on a  $\overline{\mathcal{O}_{g.d.}(\mathcal{Q}_0)} \subsetneq \overline{\mathcal{O}_{g.d.}(\mathcal{Q}_1)}$ .

**1.5.1. Orbites génériques et feuilletage par les orbites.** — Ce qui suit est dans l'esprit de [62] en particulier ce qui concerne la classification des courbes planes de degré 3.

Soit  $C$  une courbe de degré 3 possédant une forme normale de WEIERSTRASS :

$$x_1^2 = x_0(x_0 - 1)(x_0 - \eta).$$

On sait que :

- $C$  est une courbe elliptique lisse si et seulement si  $\eta \notin \{0, 1, \infty\}$  ;
- si  $\eta = 0$  ou  $\eta = 1$ , alors  $C$  est une cubique à point double ;
- enfin si «  $\eta = \infty$  »,  $C$  est l'union de trois droites concourantes.

Notons  $j$  l'invariant des courbes elliptiques (voir [62] pour plus de détails) :

$$j(\eta) = 256 \frac{(\eta^2 - \eta + 1)^3}{\eta^2(1 - \eta)^2}.$$

Considérons l'action de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3)$  donnée par

$$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^9 \rightarrow \mathbb{P}^9, \quad (g, P) \mapsto P \circ g^{-1}.$$

Elle définit un feuilletage<sup>(1)</sup>  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}^9$  dont une intégrale première rationnelle est induite par  $j$  (extension de  $j$  le long des orbites) et notée  $J$ . L'égalité  $\det \mathrm{jac} AQB^{-1} = (\det \mathrm{jac} Q) \circ B^{-1}$  assure la compatibilité de cette action avec l'action g.d. sur  $\mathrm{Rat}_2$ .

Remarquons que  $j(\infty) = j(0) = j(1) = \infty$ . Un point générique de  $J^{-1}(\infty)$  est une cubique à point double ; cette feuille est de dimension maximale 8 car le groupe d'isotropie d'une cubique

1. Nous n'utiliserons pas vraiment la théorie des feuilletages. En première approximation le lecteur peut penser que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est la donnée d'une relation d'équivalence dont les classes, appelées feuilles, sont ici les orbites de l'action considérée. Une intégrale première est une fonction globalement non constante mais constante sur les orbites. On reviendra sur cette notion au Chapitre 3. Le lecteur intéressé par une approche plus précise pourra se référer à [20, 27].

à point double est fini. Par conséquent la restriction de  $J$  aux courbes elliptiques et cubiques à point double prend toutes les valeurs ; il en résulte que  $\overline{J^{-1}(c)} \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ , où  $\text{Sing } \mathcal{F}$  <sup>(2)</sup> désigne le lieu singulier de  $\mathcal{F}$ , est, pour tout  $c$ , l'orbite d'une courbe elliptique lisse ou d'une cubique à point double. Les autres configurations de courbes sont contenues dans  $\text{Sing } \mathcal{F}$ .

**Proposition 1.23.** — *Une orbite générique pour l'action gauche-droite sur  $\text{Rat}_2 \simeq \mathbb{P}^{17}$  est de dimension 16. En particulier l'action gauche-droite induit un feuilletage  $\mathcal{R}$  de codimension 1 sur  $\mathbb{P}^{17}$  d'intégrale première  $J \circ \det \text{jac}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $Q$  dans  $\text{Rat}_2$  tel que  $C = \det \text{jac } Q$  soit générique (l'existence d'une telle transformation est assurée par la Proposition 1.3). Calculons le groupe d'isotropie de  $Q$ ; soient  $A, B$  dans  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$  et  $\eta$  dans  $\mathbb{C}^*$  tels que  $AQB^{-1} = \eta Q$ . Cette égalité conduit à

$$(\det \text{jac } Q) \circ B^{-1} = \eta \det \text{jac } Q.$$

La courbe  $C$  est donc invariante par  $B$ ; puisqu'elle est générique,  $B$  appartient à un groupe fini. À indice fini près on a  $A = B = \text{id}$ ; le groupe d'isotropie de  $Q$  est donc fini.  $\square$

**1.5.2. Lieu singulier.** — Nous allons préciser la nature du lieu singulier de  $\mathcal{R}$ . D'après la démonstration de la Proposition 1.21 l'ensemble paramétré par l'application

$$\Psi = \Psi_{s,t,u} : \mathbb{C}^3 \ni (s,t,u) \mapsto (x_1x_2 + sx_0^2 : x_0x_2 + tx_1^2 : x_0x_1 + ux_2^2)$$

est transverse à l'orbite de  $\sigma$  en  $\sigma$ . On constate que

$$\det \text{jac } \Psi = (2 + 8stu)x_0x_1x_2 - 2sx_0^3 - 2tx_1^3 - 2ux_2^3.$$

En particulier  $\det \text{jac } \Psi$  est une submersion en  $(0,0,0)$ ; le point  $(0,0,0)$  correspond à  $\sigma$  et l'image de  $\det \text{jac } \Psi$  est une transversale à l'orbite de  $x_0x_1x_2$  dans  $\mathbb{P}^9$ . L'union de trois droites en position générale est limite d'une des configurations suivantes : courbe elliptique lisse, cubique à point double ou union d'une droite et d'une conique en position générale. Rappelons que les orbites des courbes elliptiques ou des cubiques nodales sont lisses de dimension 8 donc ne sont pas contenues dans le lieu singulier de  $\mathcal{F}$ ; celle d'une conique et d'une droite en position générale est de dimension 7. En fait l'image de  $\det \text{jac } \Psi$  s'identifie à la sous-variété paramétrée par

$$\Phi = \Phi_{s,t,u} : \mathbb{C}^3 \ni (s,t,u) \mapsto x_0x_1x_2 + sx_0^3 + tx_1^3 + ux_2^3$$

qui est une transversale à l'orbite de  $x_0x_1x_2$  en  $\Phi_{0,0,0} = x_0x_1x_2$ . Pour les paramètres  $(s,t,u)$  dans  $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$  satisfaisant  $s = t$  et  $u = 27s^2$  la cubique  $\Phi_{s,t,u}$  a deux composantes ; il en est de même lorsqu'on fait une permutation circulaire sur  $(s,t,u)$ . Notons qu'une cubique formée d'une conique et d'une droite en position générale est dans  $\text{Sing } \mathcal{F}$  si bien que le lieu singulier de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{P}^9$  au point  $x_0x_1x_2$  a trois branches locales de dimension 7. La courbe  $x_0x_1x_2$  étant

2. Soit  $m$  un point de  $\mathbb{P}^9$ ; en  $m$  il existe un germe de 1-formes  $\Omega_m$  (unique à facteur multiplicatif près) définissant  $\mathcal{F}$  en  $m$ . Ceci signifie que l'espace tangent à la feuille de  $\mathcal{F}$  en  $m$  est le noyau de la forme linéaire  $\Omega_m$ . Lorsque ce noyau est de codimension 1 le point  $m$  est régulier, sinon  $m$  est singulier et la forme s'annule en  $m$ . L'ensemble  $\text{Sing } \mathcal{F}$  est l'union des points singuliers ; c'est un sous-ensemble algébrique de codimension 2 de  $\mathbb{P}^9$ .

à l'intersection de ces trois branches on en déduit que l'orbite de  $x_0x_1x_2$ , et en fait l'adhérence de cette orbite, est contenue dans le lieu singulier de  $\text{Sing } \mathcal{F}$ .

On note  $\text{Sing } \mathcal{R}$  le lieu singulier du feuilletage  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{P}^{17}$  introduit dans la Proposition 1.23 ; l'ensemble  $\text{Sing Sing } \mathcal{R}$  désigne l'ensemble des points singuliers de l'ensemble algébrique  $\text{Sing } \mathcal{R}$ . Comme  $\psi$  est submersive en  $(0,0,0)$  on obtient que  $\sigma$ , et donc  $\Sigma^3$ , est dans  $\text{Sing Sing } \mathcal{R}$ . Nous verrons plus loin que l'adhérence de  $\Sigma^3$  dans  $\mathbb{P}^{17}$  est aussi  $\overline{\text{Bir}_2}$ . On obtient le :

**Théorème 1.24.** — *L'adhérence de  $\text{Bir}_2$  est une composante irréductible de  $\text{Sing Sing } \mathcal{R}$ .*

On peut mener des calculs identiques en les éléments

$$Q_0 = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2) \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}_1 = (x_0^2 + x_1x_2 : x_1^2 : x_2^2)$$

pour lesquels on a  $\det \text{jac } Q_0 = \det \text{jac } \widetilde{Q}_1 = 8x_0x_1x_2$ . Comme on l'a dit l'orbite de  $\widetilde{Q}_1$  est de dimension 15; de plus  $\det \text{jac}$  est de rang deux dans une transversale à  $\widetilde{Q}_1$ . On en déduit, comme précédemment, que l'orbite de  $\widetilde{Q}_1$  est contenue dans  $\text{Sing } \mathcal{R}$  et pour des raisons de dimension son adhérence est exactement une branche de  $\text{Sing } \mathcal{R}$ . Ainsi :

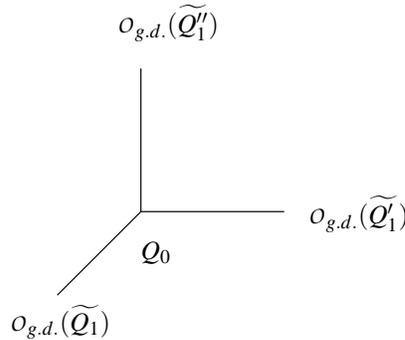
**Proposition 1.25.** — *L'adhérence de  $O_{g.d.}(x_0^2 + x_1x_2 : x_1^2 : x_2^2)$  est une branche  $S$  du lieu singulier  $\text{Sing } \mathcal{R}$ .*

**Remarque 1.26.** — Un calcul explicite montre que dans une transversale à  $O_{g.d.}(Q_0)$  en  $Q_0$  l'application  $\det \text{jac}$  est équivalente à l'application  $(s, t, u) \mapsto (tu, su, st)$ , i.e. à l'application induisant  $\sigma$ !

Posons

$$\widetilde{Q}_1 := (x_0^2 + x_1x_2 : x_1^2 : x_2^2), \quad \widetilde{Q}'_1 := (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 + x_0x_1), \quad \widetilde{Q}''_1 := (x_0^2 : x_1^2 + x_0x_2 : x_2^2);$$

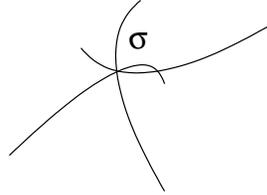
voici le modèle local de  $S$  en  $Q_0$  dans une section 3-plane :



Si  $T$  désigne l'orbite de  $x_0x_1x_2$  sous l'action de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , alors on note au passage que  $S$  est une composante de  $\det \text{jac}^{-1}(\overline{T})$  qui est donc de dimension 15. Remarquons aussi que  $O_{g.d.}(\widetilde{Q}_1)$ ,  $O_{g.d.}(\widetilde{Q}'_1)$  et  $O_{g.d.}(\widetilde{Q}''_1)$  sont en fait égales, les  $\widetilde{Q}_1$ ,  $\widetilde{Q}'_1$  et  $\widetilde{Q}''_1$  étant échangées par permutation de coordonnées. Nous les avons distinguées car elles apparaissent de façon naturelle localement en  $Q_0$  au travers des déformations de  $Q_0$  :

$$(x_0^2 + tx_1x_2 : x_1^2 : x_2^2), \quad (x_0^2 : x_1^2 + tx_0x_2 : x_2^2), \quad (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 + tx_0x_1).$$

En  $\sigma$  on a la description suivante dans une section 3-plane :



les trois branches locales faisant partie de l'image réciproque par  $\det \text{jac}$  de l'adhérence de l'orbite d'une conique et d'une droite en position générale.

**1.5.3. Orbites spéciales.** — On a vu précédemment que  $O_{g.d.}(\sigma)$ , c'est-à-dire  $\Sigma^3$ , est de dimension 14. Nous l'avons obtenu par un calcul d'espace tangent. On peut aussi le faire en explicitant le groupe d'isotropie de  $\sigma$  noté  $\text{Isot}\sigma$ . Ce calcul peut s'avérer intéressant dans la mesure où il donne des exemples de relations dans le groupe de CREMONA. En effet soient  $(A, B)$  dans  $\text{SL}_3(\mathbb{C}) \times \text{SL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $A\sigma = \sigma B$ ; alors  $(A, B)$  appartient à :

$$\left\langle \left( \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} : \alpha\beta x_2 \right), \left( \alpha x_0 : \beta x_1 : \frac{x_2}{\alpha\beta} \right) \right\rangle, \mathcal{S}_6 \times \mathcal{S}_6 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$$

où  $\mathcal{S}_6 = \{\text{id}, (x_0 : x_2 : x_1), (x_2 : x_1 : x_0), (x_1 : x_0 : x_2), (x_1 : x_2 : x_0), (x_2 : x_0 : x_1)\}$ . Ceci implique que  $\dim \text{Isot}\sigma = 2$ .

*1.5.3.1. Orbite de  $\rho$ .* —

**Proposition 1.27.** — La dimension de  $\Sigma^2 = O_{g.d.}(\rho)$  est 13.

*Démonstration.* — Calculons  $\text{Isot}\rho$  sous l'action g.d., i.e. cherchons  $A$  et  $C$  dans  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $A\rho = \eta\rho C$  où  $\eta$  désigne un complexe non nul. Rappelons que

$$\text{Ind}\rho = \{(0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)\};$$

la relation  $A\rho = \eta\rho C$  assure que  $C$  laisse  $\text{Ind}\rho$  invariant. Or les points d'indétermination de  $\rho$  ne sont pas de même nature au sens où ils n'ont pas la même « multiplicité ». Il en résulte que  $C$  fixe  $(0 : 1 : 0)$  et  $(1 : 0 : 0)$ ; par suite  $C$  est de la forme

$$(ax_0 + bx_2 : cx_1 + dx_2 : ex_2)$$

avec  $ace \neq 0$ . Un calcul conduit à

$$A = (\eta\gamma\delta x_0 + \eta\beta\delta x_2 : \eta\alpha^2 x_1 : \eta\alpha\delta x_2), \quad C = (\gamma x_0 + \beta x_2 : \delta x_1 : \alpha x_2)$$

où  $\eta^3\alpha^2\delta = \alpha\gamma\delta = 1$ . La dimension du groupe d'isotropie est donc 3.  $\square$

Le calcul de  $\text{Isot}\rho$  assure qu'on a les relations suivantes :

$$(\gamma\delta x_0 + \beta\delta x_2 : x_1 : \delta x_2)\rho = \rho(\gamma x_0 + \beta x_2 : \delta x_1 : x_2), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}.$$

1.5.3.2. *Orbite de  $\tau$ .* — Calculons le groupe d'isotropie de  $\tau = (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 - x_0x_2)$ . Rappelons que le lieu d'indétermination de  $\tau$  est réduit à  $\{(0 : 0 : 1)\}$ ; la relation  $A\tau = \eta\tau C$ , où  $\eta$  désigne un élément de  $\mathbb{C}^*$  et  $A, C$  deux éléments de  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ , assure que  $C$  laisse  $(0 : 0 : 1)$  invariant. Par suite  $C$  est de la forme

$$(a_0x_0 + b_0x_1 : a_1x_0 + b_1x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2)$$

avec  $c_2(a_0b_1 - a_1b_0) \neq 0$ . Un calcul élémentaire conduit à

$$\begin{aligned} A &= (\eta\varepsilon^2x_0 : \eta\varepsilon(\beta - \alpha + \varepsilon)x_0 + \eta\alpha\varepsilon x_1 : \eta(\varepsilon(\beta + \delta - \alpha - \gamma - \varepsilon) - 2\alpha\beta + 2\alpha^2 + \beta^2)x_0 \\ &\quad + \eta(\alpha\varepsilon + \varepsilon\gamma + 2\alpha\beta - \alpha^2)x_1 + \eta\alpha^2x_2), \\ C &= \left( \varepsilon x_0 : (\beta + \varepsilon - \alpha)x_0 + \alpha x_1 : \left( \beta - \alpha + 2\varepsilon + \gamma - \delta - \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) x_0 + \left( \alpha - \gamma - \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) x_1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} x_2 \right) \end{aligned}$$

où  $\alpha^2 = \eta^3\varepsilon^3\alpha = 1$ . Par suite  $\dim \mathrm{Isot} \tau = 4$ . On en déduit la :

**Proposition 1.28.** — *La dimension de  $\Sigma^1$  est 12.*

D'après ce qui précède on a les relations suivantes :  $A\tau = \tau B$  lorsque

$$A = \begin{bmatrix} \alpha\varepsilon & 0 & \beta\varepsilon \\ \varepsilon\gamma + 2\alpha\beta & \alpha^2 & (\varepsilon\delta + \beta^2) \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha/\varepsilon \end{bmatrix}$$

avec  $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{C}^*$ .

1.5.3.3. *Orbite de  $x_0(x_0 : x_1 : x_2)$ .* —

**Proposition 1.29.** — *La dimension de  $\Sigma^0 = O_{g.d.}(x_0(x_0 : x_1 : x_2))$  est 10.*

*Démonstration.* — On peut calculer le groupe d'isotropie de  $x_0(x_0 : x_1 : x_2)$  mais on peut aussi calculer  $T_{x_0(x_0 : x_1 : x_2)}O_{g.d.}(x_0(x_0 : x_1 : x_2))$ ; cet espace tangent est précisément

$$\left\{ (\alpha_1x_0^2 + \alpha_4x_0x_1 + \alpha_5x_0x_2 : \beta_1x_0^2 + \beta_2x_1^2 + \beta_4x_0x_1 + \beta_5x_0x_2 + \beta_6x_1x_2 : \gamma_1x_0^2 + \beta_6x_2^2 + \gamma_4x_0x_1 + \gamma_5x_0x_2 + \beta_2x_1x_2) \mid \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C} \right\}$$

qui est de codimension 7 dans l'espace des triplets de formes quadratiques.  $\square$

1.5.3.4. *Orbites dans  $\overline{\mathrm{Bir}}_2 \setminus \mathrm{Bir}_2$ .* — (voir [63], tome 2, page 304)

Soit  $f$  une transformation de  $\overline{\mathrm{Bir}}_2 \setminus \mathrm{Bir}_2$ ; il existe une suite de transformations birationnelles quadratiques  $(f_i)_i$  dont  $f$  est la limite. On peut d'ailleurs, comme nous le verrons dans la Proposition 1.30, choisir les  $f_i$  dans  $\Sigma^3$ . Montrons par l'absurde que  $\det \mathrm{jac} f \equiv 0$ ; supposons donc que  $\det \mathrm{jac} f \not\equiv 0$ . Les  $f_i$  contractent  $\det \mathrm{jac} f_i \equiv 0$  qui est l'union de trois droites (Théorème 1.6); par continuité  $f$  contracte donc trois droites qui sont nécessairement distinctes et concourantes sinon  $f$  serait birationnelle. En reprenant la démonstration du Théorème 1.6 on en déduit que  $f$  s'écrit à équivalence g.d. près  $(x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1)$  d'où  $\det \mathrm{jac} f \equiv 0$ : contradiction.

Puisque  $\det \mathrm{jac} f \equiv 0$ , on sait d'après la Remarque 1.2 que  $f$  est, à équivalence g.d. près, de la forme  $(Q_0 : Q_1 : 0)$  ou du type  $(x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1)$ . En déformant les transformations du type  $A\sigma$  (resp.  $A\rho$ , resp.  $A\tau$ ), où  $A$  désigne un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ , on obtient des transformations du

type  $\tilde{A}\sigma$  (resp.  $\tilde{A}\rho$ , resp.  $\tilde{A}\tau$ ) avec  $\det \tilde{A} = 0$ ; les orbites de tels éléments sont dans  $\overline{\text{Bir}_2} \setminus \text{Bir}_2$ ; par exemple

$$\begin{array}{lll} O_{g.d.}(x_2(x_1 : x_0 : 0)), & O_{g.d.}(x_0x_1(0 : 0 : 1)), & O_{g.d.}(x_2(x_2 : x_0 : 0)), \\ O_{g.d.}(x_2^2 : 0 : x_0x_1), & O_{g.d.}(x_0^2 : 0 : 0), & O_{g.d.}(x_0x_1 : x_0^2 + x_1x_2 : 0), \\ O_{g.d.}(0 : x_0^2 + x_1x_2 : x_2^2), & O_{g.d.}(x_2^2 + x_0x_1 : 0 : 0), & O_{g.d.}(x_0x_1 : x_0^2 : x_1^2), \\ O_{g.d.}(0 : x_0^2 : x_1^2). & & \end{array}$$

### 1.6. Conditions d'incidence ; lissité de $\text{Bir}_2$ et non lissité de $\overline{\text{Bir}_2}$

On se propose d'abord d'étudier les conditions d'incidence entre les  $\Sigma^i$  et la lissité de  $\text{Bir}_2$  :

**Proposition 1.30.** — *On a les inclusions :*

$$\Sigma^0 \subset \overline{\Sigma^1}, \quad \Sigma^1 \subset \overline{\Sigma^2}, \quad \Sigma^2 \subset \overline{\Sigma^3};$$

en particulier  $\Sigma^3$  est dense dans  $\text{Bir}_2$ .

*Démonstration.* — En composant  $\sigma$  à droite par  $(x_2 : x_1 : \varepsilon x_0 + x_2)$  on a

$$\sigma_1^\varepsilon = (x_1(\varepsilon x_0 + x_2) : x_2(\varepsilon x_0 + x_2) : x_1x_2)$$

qui est donc pour  $\varepsilon \neq 0$  dans  $O_{g.d.}(\sigma)$ . Mais  $\sigma_1^\varepsilon$  est g.d. conjugué à

$$\sigma_2^\varepsilon = (x_0x_1 : (\varepsilon x_0 + x_2)x_2 : x_1x_2).$$

On remarque que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_2^\varepsilon = (x_0x_1 : x_2^2 : x_1x_2) = \rho$ ; d'où l'inclusion  $\Sigma^2 \subset \overline{\Sigma^3}$ .

Soit  $g_\varepsilon = (-\varepsilon x_1x_2 + x_1^2 - x_0x_2 : x_0^2/\varepsilon^2 : x_0x_1/\varepsilon)$ ; pour  $\varepsilon \neq 0$  la transformation  $g_\varepsilon$  est dans  $\Sigma^2$  et  $g_0 = \tau$ . Par suite  $\Sigma^1$  est inclus dans  $\overline{\Sigma^2}$ .

Si  $\varepsilon$  est non nul, à équivalence g.d. près,  $\tau$  s'écrit  $(x_0^2 : x_0x_1 : \varepsilon^2x_1^2 + x_0x_2)$ ; pour  $\varepsilon = 0$  on obtient  $x_0(x_0 : x_1 : x_2)$  qui est dans  $\Sigma^0$ . Il en résulte que  $\Sigma^0 \subset \overline{\Sigma^1}$ .  $\square$

Récapitulons

**Théorème 1.31.** — *Les adhérences étant prises dans  $\text{Bir}_2$ , on a :*

$$\overline{\Sigma^0} = \Sigma^0, \quad \overline{\Sigma^1} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \quad \overline{\Sigma^2} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2,$$

$$\overset{\circ}{\text{Bir}}_2 = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3, \quad \text{Bir}_2 = \overline{\Sigma^3} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$$

avec

$$\dim \Sigma^0 = 10, \quad \dim \Sigma^1 = 12, \quad \dim \Sigma^2 = 13 \quad \text{et} \quad \dim \Sigma^3 = 14.$$

**Théorème 1.32.** — *L'ensemble des transformations birationnelles quadratiques est lisse dans l'ensemble des transformations rationnelles.*

*Démonstration.* — Le fait que chaque  $\Sigma^i$  soit une orbite et les conditions d'incidence impliquent qu'il suffit de montrer que l'adhérence de  $\Sigma^3$  est lisse le long de  $\Sigma^0$ .

L'espace tangent  $T_{x_0(x_0:x_1:x_2)}\Sigma^0$  à  $\Sigma^0$  en  $x_0(x_0 : x_1 : x_2)$  est donné par :

$$\left\{ (\alpha_1 x_0^2 + \alpha_4 x_0 x_1 + \alpha_5 x_0 x_2 : \beta_1 x_0^2 + \beta_2 x_1^2 + \beta_4 x_0 x_1 + \beta_5 x_0 x_2 + \beta_6 x_1 x_2 : \gamma_1 x_0^2 + \beta_6 x_2^2 + \gamma_4 x_0 x_1 + \gamma_5 x_0 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) \mid \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

L'espace vectoriel  $S$  engendré par

$$(x_1^2 : 0 : 0), \quad (x_2^2 : 0 : 0), \quad (x_1 x_2 : 0 : 0), \quad (0 : x_2^2 : 0), \quad (0 : 0 : x_1^2), \quad (0 : 0 : x_2^2), \quad (0 : 0 : x_1 x_2)$$

est un supplémentaire de  $T_{x_0(x_0:x_1:x_2)}\Sigma^0$  dans  $\text{Rat}_2$ . Soit  $f$  dans  $\Sigma^3 \cap \{x_0(x_0 : x_1 : x_2) + S\}$ , il s'écrit

$$(x_0^2 + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2 : x_0x_1 + ax_2^2 : x_0x_2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_2).$$

Nécessairement  $f$  a trois points d'indétermination.

Supposons  $a \neq 0$ ; on remarque que la seconde composante d'un point d'indétermination de  $f$  est nécessairement non nulle. Si  $(x_0 : x_1 : x_2)$  appartient à  $\text{Ind } f$ , alors  $x_0 = -ax_2^2/x_1$ . On a :

$$\begin{aligned} f(-ax_2^2/x_1 : x_1 : x_2) &= (a^2 x_2^4 + Ax_1^4 + Bx_1^2 x_2^2 + Cx_1^3 x_2 : 0 : -ax_2^3 + \alpha x_1^3 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1^2 x_2) \\ &= (P : 0 : Q). \end{aligned}$$

Comme  $f$  doit avoir trois points d'indétermination, les polynômes  $P$  et  $Q$  doivent s'annuler sur trois droites distinctes. En particulier  $Q$  divise  $P$  :

$$a^2 x_2^4 + Ax_1^4 + Bx_1^2 x_2^2 + Cx_1^3 x_2 = (Mx_1 + Nx_2)(-ax_2^3 + \alpha x_1^3 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1^2 x_2).$$

De sorte que

$$(1.6.1) \quad B = -\beta^2 - a\gamma, \quad C = -\beta\gamma - a\alpha, \quad A = -\alpha\beta.$$

Ces trois équations définissent un graphe lisse, passant par  $f$  et  $x_0(x_0 : x_1 : x_2)$ , de codimension 3 comme  $\Sigma^3$ .

Si maintenant  $a$  est nul un point d'indétermination  $(x_0 : x_1 : x_2)$  de  $f$  satisfait  $x_0 x_1 = 0$ . Si  $x_0 = 0$  on aura

$$f(0 : x_1 : x_2) = (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2 : 0 : \alpha x_1^2 + \beta x_0^2 + \gamma x_1x_2)$$

et si  $x_1 = 0$  on a  $f(x_0 : 0 : x_2) = (x_0^2 + Bx_2^2 : 0 : x_0x_2 + \beta x_2^2)$ . Pour que  $f$  ait un point d'indétermination de type  $(x_0 : 0 : x_2)$  il faut que  $B = -\beta^2$  et c'est en fait une équivalence. Si tel est le cas  $f$  ne possède qu'un point d'indétermination de ce type. Comme  $f$  doit avoir trois points d'indétermination, deux sont de type  $(0 : x_1 : x_2)$  et les polynômes  $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2$  et  $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_2$  sont  $\mathbb{C}$ -colinéaires. On obtient les conditions

- $a = 0, B = -\beta^2, A = -\alpha\beta$  et  $C = -\beta\gamma$  si  $\beta$  est non nul ;
- $a = B = \beta = A\gamma - \alpha C = 0$  sinon.

On remarque que dans ce second cas  $f$  ne peut avoir trois points d'indétermination. Finalement on constate que  $\Sigma^3 \cap \{x_0(x_0 : x_1 : x_2) + S\}$  est contenu dans le graphe déterminé par les équations (1.6.1). Il en est de même de l'adhérence  $\overline{\Sigma^3} \cap \{x_0(x_0 : x_1 : x_2) + S\}$  qui, pour des raisons de dimension, coïncide donc avec ce graphe. Par suite  $\overline{\Sigma^3}$  est lisse le long de  $\Sigma^0$ .  $\square$

**Remarque 1.33.** — Comme nous l'avons dit le fait que  $\overline{\Sigma^3}$  soit lisse le long de  $\Sigma^0$  implique à cause, entre autres, des conditions d'incidence que  $\overline{\Sigma^3}$  est lisse le long de  $\Sigma^2$  et  $\Sigma^1$ . Nous allons toutefois démontrer ces deux affirmations en construisant des familles linéaires de transformations birationnelles.

La déformation  $\rho_\varepsilon := \rho + \varepsilon(0 : x_1^2 : 0)$  de  $\rho$  compte, pour  $\varepsilon$  non nul, trois points d'indétermination donc est dans  $\Sigma^3$ . Par ailleurs  $\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} = (0 : x_1^2 : 0)$  n'appartient pas à  $T_\rho \Sigma^2$ . On retrouve ainsi la lissité de  $\overline{\Sigma^3}$  en  $\rho$  et par suite le long de  $\Sigma^2$ .

Montrons que  $\overline{\Sigma^3}$  est lisse le long de  $\Sigma^1$ . Soit

$$\tilde{\tau} := (x_0 x_1 : x_1 x_2 + x_0^2 : x_1^2) \in \Sigma^1.$$

L'espace tangent  $T_{\tilde{\tau}} \Sigma^1$  à  $\Sigma^1$  en  $\tilde{\tau}$  est donné par :

$$\{(\alpha_1 x_0^2 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_4 x_0 x_1 + \alpha_5 x_0 x_2 + \alpha_6 x_1 x_2 : \beta_1 x_0^2 + \beta_2 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \beta_4 x_0 x_1 + \beta_5 x_0 x_2 + \beta_6 x_1 x_2 : \gamma_1 x_0^2 + \gamma_2 x_1^2 + \gamma_4 x_0 x_1 + (\gamma_1 + 2\alpha_5)x_1 x_2) \mid \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}\}$$

Considérons le sous-espace vectoriel  $S$  de  $\text{Rat}_2$  engendré par

$$(x_2^2 : 0 : 0), \quad (x_0 x_2 : 0 : 0), \quad (0 : 0 : x_2^2), \quad (0 : 0 : x_0 x_2), \quad (0 : 0 : x_0 x_1).$$

On constate que  $\dim S = 5$  et  $T_{\tilde{\tau}} \Sigma^1 \cap S = \{0\}$ , i.e.  $S$  est un supplémentaire de  $T_{\tilde{\tau}} \Sigma^1$  dans  $\text{Rat}_2$ . Déterminons  $\overline{\Sigma^3} \cap \{\tilde{\tau} + S\}$ ; soit

$$f = \tilde{\tau} + (\alpha x_2^2 + \beta x_0 x_2 : 0 : \gamma x_2^2 + \delta x_0 x_2 + \varepsilon x_0 x_1)$$

un élément de  $\Sigma^3 \cap \{\tilde{\tau} + S\}$ . On note que tout point de  $\mathbb{P}^2$  de la forme  $(x_0 : x_1 : 0)$  ne peut pas être d'indétermination pour  $f$ ; ainsi un point de  $\text{Ind } f$  est du type  $(x_0 : -x_0^2/x_2 : x_2)$ . On a :

$$f(x_0 : -x_0^2/x_2 : x_2) = (-x_0^3 x_2 + \alpha x_2^4 + \beta x_0 x_2^3 : 0 : \gamma x_2^4 + \delta x_0 x_2^3 - \varepsilon x_0^2 x_2^2 + x_0^4).$$

Comme  $f$  a trois points d'indétermination ; les polynômes

$$-x_0^3 x_2 + \alpha x_2^4 + \beta x_0 x_2^3 \quad \text{et} \quad \gamma x_2^4 + \delta x_0 x_2^3 - \varepsilon x_0^2 x_2^2 + x_0^4$$

s'annulent sur trois droites communes. Pour que ceci ait lieu il faut que  $\gamma = 0$ ,  $\delta = -\alpha$  et  $\varepsilon = \beta$ . Il en résulte que  $\overline{\Sigma^3} \cap \{\tilde{\tau} + S\}$  est contenu dans le 2-plan  $\mathcal{P}$  défini par

$$\mathcal{P} = \{(x_0 x_1 + \alpha x_2^2 + \beta x_0 x_2 : x_0^2 + x_1 x_2 : -\alpha x_0 x_2 + \beta x_1 x_2 + x_1^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Puisque  $\dim \overline{\Sigma^3} \cap \{\tilde{\tau} + S\} = 2$ , on a  $\overline{\Sigma^3} \cap \{\tilde{\tau} + S\} = \mathcal{P}$ . Comme  $\Sigma^1 = \mathcal{O}_{g.d.}(\tilde{\tau})$  on vérifie de nouveau que  $\overline{\Sigma^3}$  est lisse le long de  $\Sigma^1$ .

**Proposition 1.34.** — *L'adhérence de  $\text{Bir}_2$  dans  $\mathbb{P}^{17} \simeq \text{Rat}_2$  n'est pas lisse.*

*Démonstration.* — Soit  $f$  la transformation rationnelle dégénérée définie par  $x_2(x_0 : x_1 : 0)$ . L'espace tangent à  $O_{g.d.}(f)$  en  $f$  est donné par

$$\begin{aligned} T_f O_{g.d.}(f) = & \{(\alpha_1 x_0^2 + \alpha_3 x_2^2 + \alpha_4 x_0 x_1 + \alpha_5 x_0 x_2 + \alpha_6 x_1 x_2 : \alpha_4 x_1^2 + \beta_3 x_2^2 \\ & + \alpha_1 x_0 x_1 + \beta_5 x_0 x_2 + \beta_6 x_1 x_2 : \gamma_5 x_0 x_2 + \gamma_6 x_1 x_2) \mid \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Un supplémentaire  $S$  de  $T_f O_{g.d.}(f)$  est l'espace de dimension 8 engendré par

$$\begin{aligned} (x_1^2 : 0 : 0), & \quad (0 : x_0^2 : 0), & \quad (0 : x_1^2 : 0), & \quad (0 : x_0 x_1 : 0), \\ (0 : 0 : x_0^2), & \quad (0 : 0 : x_1^2), & \quad (0 : 0 : x_2^2), & \quad (0 : 0 : x_0 x_1). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'intersection de  $\{f + S\}$  avec  $\overline{\Sigma^3}$  contient un sous-ensemble analytique non lisse de codimension 3. Puisque  $\overline{\Sigma^3}$  est aussi de codimension 3 on constatera, en utilisant l'action g.d., la non lissité de  $\overline{\Sigma^3}$  le long de l'orbite de  $f$ . Pour cela nous donnons une condition suffisante pour qu'un élément de  $\{f + S\}$  soit dans  $\Sigma^3$ , *i.e.* ait trois points d'indétermination. Un élément  $Q$  de  $\{f + S\}$  s'écrit

$$(x_0 x_2 + a x_1^2 : x_1 x_2 + b x_0^2 + c x_1^2 + d x_0 x_1 : e x_0^2 + f x_1^2 + g x_2^2 + h x_0 x_1).$$

Les points d'indétermination sont donnés par les trois équations suivantes

$$x_0 x_2 + a x_1^2 = 0, \quad x_1 x_2 + b x_0^2 + c x_1^2 + d x_0 x_1 = 0, \quad e x_0^2 + f x_1^2 + h x_0 x_1 = 0$$

ce qui conduit après élimination de  $x_2$  à  $P_1 = P_2 = 0$  où

$$P_1 = -a x_1^3 + b x_0^3 + c x_0 x_1^2 + d x_0^2 x_1, \quad P_2 = e x_0^4 + f x_0^2 x_1^2 + a^2 g x_1^4 + h x_0^3 x_1.$$

Notons que si, pour certaines valeurs des paramètres,  $P_1$  s'annule sur trois droites distinctes et divise  $P_2$ , la transformation  $Q$  correspondante aura trois points d'indétermination et sera donc birationnelle, en fait dans  $\Sigma^3$ . La divisibilité de  $P_2$  par  $P_1$  s'exprime par

$$(1.6.2) \quad P_2 = (A x_0 + B x_1) P_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e = bA \\ f = cA + dB \\ a^2 g = -aB \\ h = dA + bB \\ aA = cB \end{cases}$$

On remarque que l'ensemble  $\Lambda$  des paramètres tels que

$$a = 0, \quad bf - ce = 0, \quad bh - de = 0$$

satisfait le système (1.6.2) (avec  $A = e/b$  et  $B = 0$ ). L'ensemble  $\Lambda$  est de codimension 3 et n'est pas lisse, l'intersection  $\Lambda'$  des quadriques  $bf - ce = 0$  et  $bh - de = 0$  ne l'étant pas. On constate en effet que  $\Lambda'$  contient l'espace linéaire  $E$  donné par  $b = e = 0$  mais ne se réduit pas à  $E$  : par exemple l'espace défini par  $b = c = d = e = f = h$  est contenu dans  $\Lambda'$  et pas dans  $E$ . Comme  $\text{codim } E = \text{codim } \Lambda'$  l'ensemble  $\Lambda'$  n'est pas irréductible et par suite n'est pas lisse ; il en est donc de même pour  $\Lambda$ . Maintenant si  $a = b = e = 0$  (resp.  $b = c = d = e = f = h = 1, a = 0$ ) le polynôme  $P_1$  vaut  $c x_0 x_1^2 + d x_0^2 x_1$  (resp.  $x_0^3 + x_0 x_1^2 + x_0^2 x_1$ ) et s'annule génériquement sur trois

droites distinctes. Ainsi on a construit dans  $\overline{\Sigma^3} \cap \{f + S\}$  un ensemble analytique non lisse de codimension 3.  $\square$

**Problème.** Comme nous l'a indiqué le rapporteur les énoncés 1.32 et 1.34 suggèrent de mener une étude similaire pour d'autres ensembles invariants « naturels » sous l'action g.d. : par exemples ceux constitués des applications quadratiques de degré topologique 2, 3, ...



## CHAPITRE 2

### GERMES DE FLOTS BIRATIONNELS QUADRATIQUES

#### 2.1. Généralités sur les germes de flots birationnels quadratiques

##### 2.1.1. Quelques rappels utiles. —

2.1.1.1. *Nœud col.* — Soit  $X$  un germe de champ de vecteurs holomorphe

$$X = A \frac{\partial}{\partial x_0} + B \frac{\partial}{\partial x_1}$$

à singularité isolée en l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , ce qui signifie que les zéros communs de  $A$  et  $B$  se réduisent à  $\{0\}$ . À un tel champ on associe un feuilletage  $\mathcal{F}$  singulier en  $0$  : les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont ici les trajectoires de  $X$ . On note  $JX(0)$  la matrice jacobienne de  $X$  en  $0$  :

$$JX(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_0}(0) & \frac{\partial A}{\partial x_1}(0) \\ \frac{\partial B}{\partial x_0}(0) & \frac{\partial B}{\partial x_1}(0) \end{bmatrix}.$$

On dit que le point singulier est de type *nœud col* si l'une des valeurs propres de  $JX(0)$  est nulle et l'autre non. La théorie des formes normales ([77]) assure que le champ  $X$  est alors formellement conjugué à un champ rationnel du type <sup>(1)</sup> :

$$Y = \eta x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{x_1^{k+1}}{1 - \varepsilon x_1^k} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

avec  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{C}$ ,  $\eta \in \mathbb{C}^*$ . Un calcul élémentaire montre que  $Y$  ne peut posséder d'intégrale première (formelle) méromorphe ; en particulier il en est de même pour  $X$ .

Nous utiliserons ce fait sous la forme suivante : *un feuilletage algébrique de  $\mathbb{P}^2$  possédant un point singulier de type nœud col n'a pas d'intégrale première rationnelle non constante.*

2.1.1.2. *Travaux de CANTAT et FAVRE.* — Ici le lecteur se référera au travail initial tant pour des précisions concernant le vocabulaire que les énoncés. Le contenu de ce paragraphe n'est en effet pas explicitement utilisé dans la suite mais en a été une motivation.

Dans [23] CANTAT et FAVRE étudient les paires  $(f, \mathcal{F})$  où  $f$  est un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  et  $\mathcal{F}$  un feuilletage algébrique sur  $\mathbb{P}^2$  laissé invariant par  $f$ , i.e.  $f^* \mathcal{F} = \mathcal{F}$ . En coordonnées

---

1. On veut dire par là que dans un système de coordonnées formelles  $X$  s'écrit sous la forme  $Y$ .

affines, à  $\mathcal{F}$  est associée une 1-forme  $\omega = a_0 dx_0 + a_1 dx_1$ ; la condition  $f^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$  se traduit algébriquement par la colinéarité des 1-formes  $\omega$  et  $f^*\omega$ , i.e.  $\omega \wedge f^*\omega = 0$ . Ils mentionnent en particulier l'exemple suivant.

**Exemple 2.1.** — Considérons dans la carte affine  $x_2 = 1$  la transformation birationnelle  $f$  définie par

$$f(x_0, x_1) = (x_0^a x_1^b, x_0^c x_1^d), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z});$$

les feuilletages invariants par  $f$  sont associés à l'une des 1-formes  $\alpha x_1 dx_0 + \beta x_0 dx_1$  où  $(\alpha, \beta)$  est un vecteur propre de la matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $\mathbb{P}^2$  et  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  un **modèle birationnel** de  $\mathbb{P}^2$  (i.e.  $S$  est une surface et  $\pi$  un morphisme birationnel). On dit alors que  $\pi^*\mathcal{F}$ , noté encore  $\mathcal{F}$  par abus de langage, est un modèle birationnel de  $\mathcal{F}$ ; dans cette situation on introduit les groupes de symétries

$$\mathrm{Aut}(S, \mathcal{F}) = \{f \in \mathrm{Aut}(S) \mid f^*\pi^*\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Bir}(S, \mathcal{F}) = \{f \in \mathrm{Bir}(S) \mid f^*\pi^*\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}\}.$$

CANTAT et FAVRE démontrent alors le :

**Théorème 2.2 ([23], Théorème 1.2).** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur le plan projectif complexe tel que l'inclusion  $\mathrm{Aut}(S, \mathcal{F}) \subset \mathrm{Bir}(S, \mathcal{F})$  soit stricte pour tout modèle birationnel de  $\mathcal{F}$ . Alors  $\mathrm{Bir}(S, \mathcal{F})$  possède un élément birationnel d'ordre infini et :

- soit  $\mathcal{F}$  est une fibration rationnelle ;
- soit  $\mathcal{F}$  est birationnellement conjugué à l'Exemple 2.1 ou bien à l'un de ses quotients.

Dit autrement si  $\mathcal{F}$  désigne un feuilletage sur  $\mathbb{P}^2$  non birationnellement conjugué à l'un des exemples précédents alors ou bien  $\mathcal{F}$  est une fibration rationnelle, ou bien il y a un modèle birationnel de  $\mathcal{F}$  pour lequel  $\mathrm{Aut}(S, \mathcal{F}) = \mathrm{Bir}(S, \mathcal{F})$ .

Bien que nous ne l'utiliserons pas de façon explicite, le Théorème 2.2 nous prépare en quelque sorte aux énoncés qui vont suivre où l'on traite de transformations induisant des feuilletages à « gros » groupes de symétries.

**2.1.2. Propriétés des germes de flots dans  $\mathrm{Bir}_2$ .** — On appelle **germe de flot** dans  $\mathrm{Bir}_2$  un germe d'application holomorphe  $t \mapsto \phi_t \in \mathrm{Bir}_2$  satisfaisant

$$\phi_{t+s}^\bullet = \phi_t^\bullet \phi_s^\bullet, \quad \phi_0^\bullet = \mathrm{id}.$$

Pour abrégé nous parlerons de flot, ceci sera justifié par le fait qu'un germe de flot se globalise. Comme toujours lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous identifierons les notations  $\phi_t$  et  $\phi_t^\bullet$ .

L'ensemble des droites contractées par le germe de flot  $\phi_t$  forme un germe d'ensemble analytique dans la Grassmannienne des droites de  $\mathbb{P}^2$ , i.e. dans l'espace dual  $\check{\mathbb{P}}^2$ . De même l'ensemble des points d'indétermination des  $\phi_t^\bullet$  constitue un germe d'ensemble analytique cette fois dans

$\mathbb{P}^2$ . Appelons **famille de droites contractées** une application continue (en fait analytique) définie sur un germe de secteur fermé  $\Delta$  de sommet 0 dans  $\mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{D} : \Delta \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2,$$

telle que pour chaque  $t$  dans  $\Delta$  la droite  $\mathcal{D}_t$  coïncide avec une droite  $\mathcal{D}(t)$  contractée par  $\phi_t^\bullet$ . Cette définition est rendue pertinente par le théorème de PUISEUX. De même par **famille de points d'indétermination** on entendra une application  $t \mapsto m_t$  continue définie sur un secteur  $\Delta$ , chaque  $m_t$  étant d'indétermination pour  $\phi_t^\bullet$ .

**Définition 1.** — Soient  $\phi_t$  un flot et  $\mathcal{D}_t$  une famille de droites contractées par  $\phi_t$ . Si  $\mathcal{D}_t$  est indépendante de  $t$ , la famille est dite **immobile**, sinon elle est dite **mobile**.

On a une notion analogue pour les familles de points d'indétermination.

**Définition 2.** — Soit  $\chi$  un champ de vecteurs rationnel sur  $\mathbb{P}^2$ ; on dira que  $\chi$  est **rationnellement intégrable** si son flot  $\phi_t$  est un flot de transformations birationnelles.

Un germe de flot  $\phi_t$  dans  $\text{Bir}_2$  est le flot d'un champ de vecteurs rationnellement intégrable  $\chi = \left. \frac{\partial \phi_t^\bullet}{\partial t} \right|_{t=0}$  appelé **générateur infinitésimal** de  $\phi_t$ . À ce champ est associé un feuilletage dont les feuilles sont grosso-modo les trajectoires de  $\chi$ .

**Définitions 1.** — Une **fibration en droites**  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{P}^2$  est la donnée d'une application linéaire  $(\ell_1 : \ell_2) : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  où les  $\ell_i$  sont des formes linéaires non proportionnelles. Les fibres de la fibration sont les droites  $\lambda \ell_1 + \mu \ell_2 = 0$ . Le **point de base** de  $\mathcal{L}$  est le point  $m$  intersection commune des droites précédentes. On parle aussi du **pinceau** de droites  $\mathcal{L}$  passant par  $m$ , ou du feuilletage en droites singulier au point  $m$ .

Soit  $f$  une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$ . On dit que la fibration en droites  $\mathcal{L}$  est **invariante** par  $f$  si chaque droite de  $\mathcal{L}$  est envoyée par  $f$  sur une autre chaque fois que cela a un sens. Ceci se traduit par  $(\ell_1/\ell_2) \circ f = h(\ell_1/\ell_2)$  où  $h(t) = \frac{at+b}{ct+d}$  est un élément de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ . Lorsque  $h = \text{id}$  on dit que  $f$  **préserve la fibration**  $\mathcal{L}$   **fibre à fibre**.

La donnée d'une fibration en droites se ramenant à celle d'un point, le point base, elles sont toutes équivalentes à automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  près ; on peut prendre par exemple comme modèle la fibration  $x_2 = \text{cte}$  (donnée en carte affine  $x_0 = 1$ ). Si  $f$  préserve cette fibration, alors, dans cette carte,  $f$  s'écrit sous la forme suivante :

$$f(x_1, x_2) = \left( f_1(x_1, x_2), \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta} \right), \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

La fibration est préservée fibre à fibre si et seulement si  $\alpha = \delta$  et  $\beta = \gamma = 0$ .

La remarque qui suit nous sera utile.

**Remarque 2.3.** — Soit  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{P}^2$  une droite (plus généralement une courbe quelconque) invariante par le germe de flot  $\Phi_t$ , *i.e.* si  $m$  appartient à  $\mathcal{D}_0$ , alors  $\Phi_t(m)$  appartient à  $\mathcal{D}_0$  chaque fois que cela a un sens. Le générateur infinitésimal  $\chi$  de  $\Phi_t$  est tangent à  $\mathcal{D}_0$ , toujours là où cela a un sens. En particulier  $\mathcal{D}_0$  est invariante par le feuilletage associé à  $\chi$ . En fait on a la propriété inverse : si  $\chi$  est tangent à  $\mathcal{D}_0$ , alors  $\mathcal{D}_0$  est fixée par  $\Phi_t$ .

Remarquons que si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage en droites de  $\mathbb{P}^2$ , alors  $\mathcal{F}$  est un pinceau de droites : les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont les droites passant par le point base  $m$  (privées de ce point). La démonstration élémentaire est laissée en exercice ([28]).

En résulte la :

**Proposition 2.4.** — *Si le flot  $\Phi_t$  laisse invariante une infinité de droites  $\mathcal{D}_s$ , i.e.  $\Phi_t(\mathcal{D}_s) = \mathcal{D}_s$  pour une infinité de droites  $\mathcal{D}_s$ , alors les  $\mathcal{D}_s$  font partie d'un pinceau de droites. Dit autrement  $\Phi_t$  laisse invariante une fibration en droites fibre à fibre.*

*Démonstration.* — Le champ  $\chi$  est tangent à une infinité de droites ; ceci implique (exercice) que le feuilletage associé à  $\chi$  est un feuilletage en droites. Ce feuilletage définit donc une fibration en droites qui satisfait l'énoncé.  $\square$

**Proposition 2.5.** — *Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$ . Supposons que  $\phi_t$  contracte une droite mobile ; alors  $\phi_t$  laisse une fibration en droites invariante.*

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{D}_t$  la droite contractée par  $\phi_t$  et  $m_t$  son image,  $\phi_t(\mathcal{D}_t) = m_t$ .

*i.* Commençons par montrer que ou bien  $m_t$  est immobile, ou bien  $\phi_t$  laisse une fibration invariante fibre à fibre. Écrivons que  $\phi_t$  et  $\phi_s$  commutent :

$$\phi_t^\bullet(\phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t)) = \phi_s^\bullet(\phi_t^\bullet(\mathcal{D}_t)) = \phi_s^\bullet(m_t).$$

Comme, à  $s$  fixé,  $\phi_s^\bullet$  contracte un nombre fini de courbes et que  $\mathcal{D}_t$  est mobile, génériquement sur  $t$ , à  $s$  fixé,  $\phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t)$  est une courbe. Si cette courbe est contractée par  $\phi_t^\bullet$  on aura  $\phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_t$  (toujours parce que  $\text{Exc } \phi_t^\bullet$  est fini et  $\phi_0^\bullet = \text{id}$ ). Ainsi tous les  $\phi_s^\bullet$  laissent  $\mathcal{D}_t$  invariante ;  $\mathcal{D}_t$  étant mobile,  $\phi_s^\bullet$  laisse une infinité de droites invariantes et la Proposition 2.4 nous donne le résultat souhaité.

Si  $\mathcal{D}_t$  n'est pas invariante par  $\phi_s^\bullet$ , alors  $\phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t)$  n'est pas contractée par  $\phi_t^\bullet$  (toujours parce que  $\text{Exc } \phi_t^\bullet$  est fini). Il en résulte que  $m_t$  appartient à  $\text{Ind } \phi_s^\bullet$  ; la transformation  $\phi_s^\bullet$  ayant un nombre fini de points d'indétermination  $m_t$  est immobile.

*ii.* Montrons que si  $m_t$  est immobile  $\phi_t^\bullet$  préserve une fibration en droites ;  $m_t$  étant immobile, nous le notons  $m$ . Puisque  $\phi_s^\bullet$  et  $\phi_t^\bullet$  commutent on a

$$\phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t) = \phi_s^\bullet(\phi_{-t}^\bullet(m)) = \phi_{-t}^\bullet(\phi_s^\bullet(m)) = \phi_{-t}^\bullet(\mathcal{D}_s)$$

que l'on peut réécrire sous la forme  $\phi_{t+s}^\bullet(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_s$ . Par suite chaque  $\phi_t^\bullet$  préserve la famille infinie de droites  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_s)$ .

- Supposons que  $\phi_t$  appartienne à  $\Sigma^1$  pour  $t$  générique ; alors  $\phi_t$  s'écrit  $A_t \tau B_t$  où  $A_t, B_t$  désignent des éléments de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Un calcul direct montre qu'un ensemble de droites dont l'image par  $\tau$  est encore un ensemble de droites fait partie du pinceau de droites passant par  $(0 : 0 : 1)$ . Par suite, en raisonnant à  $t$  fixé, on constate que la famille infinie  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_s)$  fait partie d'un certain pinceau de droites, a priori dépendant de  $t$ , mais évidemment indépendant de  $t$ . Ce pinceau produit la fibration invariante.

- Si  $\phi_t$  est dans  $\Sigma^2$ , alors, pour  $t$  générique,  $\phi_t$  est de la forme  $A_t \rho B_t$  avec  $A_t, B_t$  des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ . Comme précédemment on constate qu'un ensemble de droites dont l'image par  $\rho$  est encore un ensemble de droites est inclus dans les deux pinceaux aux points d'indétermination  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 1 : 0)$  de  $\rho$ . On montre là aussi que  $\mathcal{D}$  est contenu dans un pinceau de droites (exercice).
- Lorsque  $\phi_t$  admet trois points d'indétermination, il est du type  $A_t \sigma B_t$ . Les droites dont l'image par l'involution de CREMONA sont encore des droites font partie des trois pinceaux de droites passant par les points  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$ . Il s'en suit que  $\mathcal{D}$  est contenue dans l'union de trois pinceaux de droites. Le flot  $\phi_t$  laisse donc ici encore un pinceau de droites invariant (exercice). □

**Remarque 2.6.** — En fait la preuve montre que la famille de droites contractées fait partie d'une fibration qui se trouve être invariante par chaque élément du flot.

**Exemple 2.7.** — Soit  $f$  un élément du groupe abélien

$$G = \{ (x_0(x_2 + \beta x_1) : x_1(x_2 + \alpha x_0) : (x_2 + \beta x_1)(x_2 + \alpha x_0)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \};$$

on a  $\text{Exc } f = \{x_2 = 0, x_2 + \beta x_1 = 0, x_2 + \alpha x_0 = 0\}$ . La droite mobile d'équation  $x_2 + \beta x_1 = 0$  (resp.  $x_2 + \alpha x_0 = 0$ ) est contractée sur le point immobile  $(0 : 1 : 0)$  (resp.  $(0 : 0 : 1)$ ). Dans la carte affine  $x_1 = 1$ , un élément  $f$  de  $G$  est du type

$$\left( \frac{x_0(x_2 + \beta)}{x_2 + \alpha x_0}, x_2 + \beta \right);$$

le groupe  $G$  laisse donc la fibration  $x_2 = \text{cte}$  invariante.

Dans le groupe  $G$  ci-dessus il y a beaucoup de flots par exemple :

$$\phi_t = (x_0(x_2 + tx_1) : x_1(x_2 + tx_0) : (x_2 + tx_1)(x_2 + tx_0)).$$

Ce flot  $\phi_t$  contracte les deux familles mobiles  $x_2 + tx_0 = 0$  et  $x_2 + tx_1 = 0$ . Il laisse ainsi les deux fibrations  $x_2/x_0$  et  $x_2/x_1$  invariantes avec permutation des fibres.

**Lemme 2.8.** — Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$ . Un point mobile éclaté par  $\phi_t$  l'est sur une droite immobile.

*Démonstration.* — Notons  $m_t$  le point mobile éclaté par  $\phi_t^\bullet$  et  $\mathcal{D}_t$  la droite sur laquelle il est éclaté. Écrivons la commutation de  $\phi_t^\bullet$  et  $\phi_s^\bullet$  :

$$\phi_t^\bullet(\phi_s^\bullet(m_t)) = \phi_s^\bullet(\phi_t^\bullet(m_t)) = \phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t).$$

Puisque  $\text{Ind } \phi_s^\bullet$  est fini et  $m_t$  mobile, l'image de  $m_t$  par  $\phi_s^\bullet$  est un point  $p_s$  pour  $s, t$  génériques. Si  $\mathcal{D}_t$  est mobile,  $\phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t)$  est en général une courbe (car  $\text{Exc } \phi_s^\bullet$  est fini); alors l'égalité

$$\phi_t^\bullet(p_s) = \phi_s^\bullet(\mathcal{D}_t)$$

assure que  $p_s$  est un point d'indétermination de  $\phi_t^\bullet$  ce qui contredit le fait que  $\phi_t^\bullet$  ne compte qu'un nombre fini de points d'indétermination (noter qu'à  $t$  fixé  $s \mapsto p_s = \Phi_s^\bullet(m_t)$  n'est pas constant puisque pour  $s = t$  on a  $\Phi_t(m_t) = \mathcal{D}_t$ ). □

**Exemple 2.9.** — Soit  $G$  le sous-groupe abélien de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  défini par

$$G = \{((x_0 + \alpha x_2)^2 : x_0 x_1 + \beta x_2^2 : x_2(x_0 + \alpha x_2)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Chaque transformation  $((x_0 + \alpha x_2)^2 : x_0 x_1 + \beta x_2^2 : x_2(x_0 + \alpha x_2))$  éclate le point  $(-\alpha^2 : \beta : \alpha)$  qui est donc mobile sur la droite d'équation  $x_0 = 0$  qui est fixe.

**Lemme 2.10.** — Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$ . Il y a au plus une droite immobile contractée par  $\phi_t$ .

*Démonstration.* — Écrivons  $\phi_t$  sous la forme  $(Q_{1,t} : Q_{2,t} : Q_{3,t})$  où les  $Q_{i,t}$  sont des formes quadratiques dépendant analytiquement de  $t$ . Comme  $\phi_0^\bullet = \text{id}$ , les  $Q_{i,0}$  sont divisibles par une même forme linéaire que l'on peut supposer être  $x_2$ , i.e. on peut supposer que  $\phi_t$  est du type

$$(x_0 x_2 + tA_1(x_0, x_1, x_2, t) : x_1 x_2 + tA_2(x_0, x_1, x_2, t) : x_2^2 + tA_3(x_0, x_1, x_2, t)).$$

On constate en coordonnées homogènes que lorsque  $t = 0$ , l'unique droite contractée est  $x_2 = 0$ . Il suffit, pour terminer, de remarquer que si une droite  $\mathcal{D}$  est contractée pour une infinité de  $t$  elle l'est par tous les  $\phi_t^\bullet$ .  $\square$

**Remarques 2.11.** — *i.* On peut avoir cohabitation entre droites mobiles et droites immobiles contractées. Considérons le flot

$$\phi_t = (x_0 x_2 : x_1(tx_0 + x_2) : x_2(tx_0 + x_2));$$

on constate que  $\phi_t^\bullet$  contracte les droites  $x_2 = 0$  (immobile) et  $tx_0 + x_2 = 0$  (mobile), ces dernières sur le point  $(1 : 0 : 0)$ .

*ii.* On pourrait penser que le Lemme 2.10 se généralise en degré quelconque, à savoir qu'un flot birationnel a au plus une courbe rationnelle immobile contractée. Il n'en est rien comme le montre l'exemple qui suit. Soit  $e^{tA}$  un flot linéaire générique ; alors  $\sigma e^{tA} \sigma$  est un flot de transformations de degré 4 ayant trois droites fixes et trois coniques mobiles contractées.

**Définition 3.** — Soit  $\phi_t$  un flot de  $\text{Bir}_2$ ; on dit que  $\phi_t$  est un **flot polynomial** s'il existe une carte affine  $\mathbb{C}^2$  invariante telle que  $\phi_t^\bullet : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  soit polynomial pour chaque  $t$ .

**Proposition 2.12.** — Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$ . Si  $\phi_t$  contracte une unique droite qui de plus est immobile,  $\phi_t$  est un germe de flot polynomial.

*Démonstration.* — S'il s'agit d'un flot linéaire il n'y a rien à faire. On peut supposer à conjugaison près que l'unique droite contractée par  $\phi_t$  est la droite d'équation  $x_0 = 0$ . Pour chaque  $t$  tel que  $\phi_t^\bullet$  soit vraiment quadratique  $\phi_t^\bullet$  est g.d. conjugué à  $\tau$ , i.e. pour ces  $t$  le flot  $\phi_t$  s'écrit

$$A_t(x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2 - x_0 x_2)B_t$$

où  $A_t, B_t$  désignent des éléments de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $B_t$  préserve la droite d'équation  $x_0 = 0$ . Par suite l'unique point d'indétermination de

$$\phi_t = A_t(x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2 - x_0 x_2)B_t$$

est situé sur la droite d'équation  $x_0 = 0$ . Ainsi les points d'indétermination et les courbes contractées sont à l'infini dans la carte  $x_0 = 1$  pour presque tout  $t$ , donc pour tout  $t$ , ce qui signifie que  $\phi_t^\bullet$  y est polynomial.  $\square$

Le groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  contient le groupe, dit **groupe affine**,

$$A = \{(x_0, x_1) \mapsto (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1, a_2x_0 + b_2x_1 + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$$

des automorphismes affines et le groupe des automorphismes préservant la fibration  $x_1 = \text{cte}$ , encore appelé **groupe élémentaire**

$$E = \{(x_0, x_1) \mapsto (\alpha x_0 + P(x_1), \beta x_1 + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[x_1]\}.$$

Plus précisément JUNG a montré que  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est le produit amalgamé de E et A le long de leur intersection ([69, 72]). Le groupe des automorphismes polynomiaux a fait l'objet de nombreuses études. En particulier FRIEDLAND et MILNOR (voir [53]) ont montré qu'un élément  $f$  de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est ou bien conjugué à un automorphisme élémentaire, ou bien conjugué à un automorphisme s'écrivant comme la composée d'un nombre fini de transformations de HÉNON ; dans ce dernier cas on dit que  $f$  est **de type HÉNON**.

La classification des groupes abéliens de transformations polynomiales a été établie par MOLDAVANDSKI ([71, 79, 97]). À conjugaison près dans le groupe des automorphismes polynomiaux, un tel groupe H vérifie l'une des assertions suivantes :

- H est contenu dans le groupe élémentaire E ou le groupe affine A;
- $H = \cup_i H_i$  où les  $H_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , satisfont  $H_i \subset H_{i+1}$  et sont individuellement conjugués à des sous-groupes finis de  $A \cap E$ ;
- $G = F \times \langle f \rangle$  où  $f$  désigne un automorphisme de type HÉNON et F un sous-groupe fini de l'intersection  $A \cap E$ .

Parmi les trois types ci-dessus seul le premier est susceptible de contenir un groupe à un paramètre, les deux derniers étant dénombrables.

Nous allons utiliser le résultat suivant qui fait partie du folklore.

**Lemme 2.13.** — *Soit  $f$  un automorphisme polynomial de degré 2 de  $\mathbb{C}^2$  qui ne soit pas affine. Alors, à conjugaison affine près,*

$$f = (\alpha x_0 + P(x_1), \alpha x_1 + b) \quad \text{ou} \quad f = (x_1, P(x_1) - \delta x_0);$$

*dit autrement,  $f$  est, à conjugaison affine près, un automorphisme élémentaire ou une transformation de HÉNON.*

*Démonstration.* — Posons  $f := (P, Q)$  où  $P$  et  $Q$  désignent des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Écrivons  $P$  (resp.  $Q$ ) sous la forme  $P_0 + P_1 + P_2$  (resp.  $Q_0 + Q_1 + Q_2$ ) avec  $P_0, Q_0$  constant et  $\deg P_i = \deg Q_i = i$  pour  $i \neq 0$ .

Puisque le déterminant jacobien de  $f$  est constant, i.e.  $dP \wedge dQ = \text{cte}$ , la quantité  $dP_2 \wedge dQ_2$  est nulle. Il en résulte que  $P_2 = \varepsilon_1 q$  et  $Q_2 = \varepsilon_2 q$  où les  $\varepsilon_i$  désignent des complexes et  $q$  une forme quadratique ; notons que les  $\varepsilon_i$  sont non tous nuls sinon  $f$  serait affine. L'égalité  $dP \wedge dQ = \text{cte}$

implique alors que  $(\varepsilon_2 dP_1 - \varepsilon_1 dQ_1) \wedge dq = 0$ ; la forme quadratique  $q$  et la forme linéaire non triviale  $\varepsilon_2 P_1 - \varepsilon_1 Q_1$  ont donc les mêmes niveaux. Par suite

$$q = \varepsilon(\varepsilon_2 P_1 - \varepsilon_1 Q_1)^2, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}^*.$$

On peut supposer que l'automorphisme  $f$  est de la forme

$$(P_0 + P_1 + \varepsilon_1 x_1^2, Q_0 + Q_1 + \varepsilon_2 x_1^2).$$

Si  $\varepsilon_2$  est nul, le déterminant jacobien de  $f$  étant constant,  $Q_1$  ne dépend que de  $x_1$  et  $f$  est élémentaire. Si  $\varepsilon_2$  est non nul, alors, à conjugaison linéaire près par  $(x_0 + \varepsilon_1 x_1 / \varepsilon_2, x_1)$ , l'automorphisme  $f$  s'écrit  $(\tilde{P}_0 + \tilde{P}_1, \tilde{Q}_0 + \tilde{Q}_1 + \varepsilon_2 x_1^2)$ . Puisque le déterminant jacobien de  $f$  est constant, on obtient que  $\tilde{P}_1 = \tilde{P}(x_1)$ ; à conjugaison linéaire près  $f$  est alors un automorphisme de HÉNON.  $\square$

Soit  $\phi_t$  un germe de flot polynomial quadratique non affine. On choisit une valeur du paramètre  $t_0$  telle que  $\phi_{t_0}^\bullet = f$  soit purement quadratique. Puisque le centralisateur d'un automorphisme de type HÉNON dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est dénombrable ([71]), le Lemme 2.13 assure qu'à conjugaison affine près  $f$  s'écrit de la façon suivante

$$f = (\alpha x_0 + \beta + x_1^2, \alpha x_1 + b), \quad \alpha a \neq 0.$$

En fait la classification de MOLDAVANSKI donne aussi ce résultat mais pas de façon directe.

**Lemme 2.14.** — *Soit  $g$  un automorphisme quadratique commutant à l'automorphisme polynomial*

$$f = (\alpha x_0 + \beta + x_1^2, \alpha x_1 + b), \quad \alpha a \neq 0.$$

*Alors  $g$  préserve la fibration  $x_1 = \text{cte}$ .*

*Démonstration.* — Posons  $g = (g_1, g_2)$ . La commutation de  $g$  à  $f$  assure en particulier que

$$(2.1.1) \quad g_2 \circ f = a g_2 + b$$

Écrivons  $g_2$  sous la forme  $p_0 + p_1 x_0 + p_2 x_1 + p_3 x_0^2 + p_4 x_0 x_1 + p_5 x_1^2$ . En développant (2.1.1) on obtient les égalités suivantes

$$p_3 = p_4 = (\alpha - a)p_1 = b p_5 = p_1 + a(a - 1)p_5 = 0.$$

Comme  $p_3 = p_4 = 0$ , la fibration  $x_1 = \text{cte}$  est invariante par  $g$  si  $p_1 = 0$ ; c'est le cas si  $\alpha \neq a$ . Supposons  $p_1 \neq 0$  alors  $\alpha = a$  et  $a(a - 1)p_5 \neq 0$ ; en particulier  $a \neq 1$  et  $b = 0$ . Par suite  $f$  s'écrit  $(\alpha x_0 + \beta + x_1^2, \alpha x_1)$ . Comme  $a$  est distinct de 1, la transformation  $f$  est affinement conjuguée à  $\tilde{f} = (a x_0 + x_1^2, a x_1)$ . Un calcul direct montre que si  $g$  commute à  $\tilde{f}$ , alors  $g$  est du type suivant

$$((\mu^2 + a(1 - a)a_2)x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2, \mu x_1)$$

et en particulier préserve la fibration  $x_1 = \text{cte}$ .  $\square$

**Proposition 2.15.** — Soit  $\phi_t$  un germe de flot polynomial quadratique. Alors  $\phi_t$  laisse un pinceau de droites invariant. Le flot  $\phi_t$  est affine ou, à conjugaison linéaire près, de l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} & (x_0 + t(\alpha + x_1^2), x_1); \\ & \left( (x_0 + \alpha x_1^2)e^{t/\alpha} - \alpha x_1^2, x_1 \right), \alpha \neq 0; \\ & \left( x_0 + t(p_0 + p_1 x_1 + x_1^2) + t^2 \left( \frac{p_1}{2} + x_1 \right) + \frac{t^3}{3}, x_1 + t \right), p_i \in \mathbb{C}; \\ & \left( (x_0 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 x_1 + \alpha x_1^2)e^{t/\alpha} - \alpha(2\alpha^2 + 2\alpha x_1 + x_1^2) - 2\alpha(\alpha + x_1)t - \alpha t^2, x_1 + t \right), \alpha \neq 0; \\ & \left( x_0 + \varepsilon t + \frac{x_1^2}{2\mu}(e^{2\mu t} - 1), x_1 e^{\mu t} \right), \varepsilon \in \{0, 1\}, \mu \neq 0; \\ & \left( x_0 e^{\alpha t} + \frac{x_1^2}{2\mu - \alpha}(e^{2\mu t} - e^{\alpha t}), x_1 e^{\mu t} \right), \alpha \neq 2\mu; \\ & \left( x_0 e^{\alpha t} + \varepsilon x_1 t e^{\alpha t} + \frac{x_1^2}{\alpha}(e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}), x_1 e^{\alpha t} \right), \varepsilon \in \{0, 1\}, \alpha \neq 0; \\ & (x_0 e^{\alpha t} + x_1^2 t e^{\alpha t}, x_1 e^{\alpha t/2}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — On suppose  $\phi_t$  non affine. D'après les Lemmes 2.13 et 2.14,  $\Phi_t$  est, à conjugaison affine près, de la forme suivante :

$$\phi_t = (\alpha(t)x_0 + P(x_1, t), \mu(t)x_1 + b(t))$$

où  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $b$  sont holomorphes en  $t$  et  $P(x_1, t)$  est un polynôme du second degré en  $x_1$  à paramètre  $t$ . Le générateur infinitésimal  $\chi = \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  est donc de la forme

$$\chi = (\alpha x_0 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + (\mu x_1 + b) \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Comme on peut exclure le cas où  $\phi_t$  est affine pour tout  $t$ , on suppose  $p_2 \neq 0$  et par homothétie on se ramène à  $p_2 = 1$ . Nous allons à conjugaison affine près donner des formes normales des champs  $\chi$  ci-dessus suivant les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $\mu$ , ... À transformation affine près en  $x_1$  on peut supposer que la seconde composante de  $\chi$  est de l'un des trois types  $0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $\mu x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ .

- Supposons que  $\chi = (\alpha x_0 + p_0 + p_1 x_1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0}$ ; si  $\alpha$  est nul  $\phi_t$  est donné, à conjugaison près par un élément du type  $(x_0, x_1 + \varepsilon)$ , par :

$$\phi_t = (x_0 + t(\beta + x_1^2), x_1).$$

Si  $\alpha$  est non nul, on se ramène, à conjugaison près par des transformations du type  $(x_0 + a + b x_1, x_1)$ , à  $p_0 = p_1 = 0$ . Dans ce cas le flot s'écrit :

$$\phi_t = \left( \left( x_0 + \frac{x_1^2}{\alpha} \right) e^{\alpha t} - \frac{x_1^2}{\alpha}, x_1 \right).$$

- Supposons que  $\chi$  soit du type  $(\alpha x_0 + p_0 + p_1 x_1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1}$  ; comme précédemment on distingue les cas  $\alpha$  nul et  $\alpha$  non nul. Si  $\alpha = 0$ , alors

$$\phi_t = \left( x_0 + t(p_0 + p_1 x_1 + x_1^2) + t^2 \left( \frac{p_1}{2} + x_1 \right) + \frac{t^3}{3}, x_1 + t \right).$$

Lorsque  $\alpha \neq 0$  on peut de façon analogue au cas précédent supposer  $p_0 = p_1 = 0$ , ce qui conduit à intégrer  $(\alpha x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$  ; on obtient

$$\phi_t = \left( (x_0 + Q(x_1)) e^{\alpha t} - Q(x_1) - \left( \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2x_1}{\alpha} \right) t - \frac{t^2}{\alpha}, x_1 + t \right).$$

où  $Q(x_1) = \frac{2}{\alpha^3} + \frac{2x_1}{\alpha^2} + \frac{x_1^2}{\alpha}$ .

- On considère le cas où

$$\chi = (\alpha x_0 + p_0 + p_1 x_1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mu \neq 0.$$

Si  $\alpha = 0$  le champ  $\chi$  est linéairement conjugué à  $(\varepsilon + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  ; le flot d'un tel champ est de la forme :

$$\phi_t = \left( x_0 + \varepsilon t + \frac{x_1^2}{2\mu} (e^{2\mu t} - 1), x_1 e^{\mu t} \right).$$

Lorsque  $\alpha$  est non nul et distinct de  $\mu$  et  $2\mu$ , alors à conjugaison linéaire près  $\chi$  s'écrit  $(\alpha x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  et son flot est

$$\phi_t = \left( x_0 e^{\alpha t} + \frac{x_1^2}{2\mu - \alpha} (e^{2\mu t} - e^{\alpha t}), x_1 e^{\mu t} \right).$$

Pour  $\alpha = \mu$  on constate que  $\chi$  est linéairement conjugué à  $(\alpha x_0 + \varepsilon x_1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  avec  $\varepsilon$  dans  $\{0, 1\}$  qui conduit à

$$\phi_t = \left( x_0 e^{\alpha t} + \varepsilon x_1 t e^{\alpha t} + \frac{x_1^2}{\alpha} (e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}), x_1 e^{\alpha t} \right).$$

Enfin pour  $\alpha = 2\mu$  il vient à conjugaison linéaire près

$$\phi_t = \left( x_0 e^{\alpha t} + x_1^2 t e^{\alpha t}, x_1 e^{\alpha t/2} \right).$$

□

D'après les énoncés 2.5, 2.10, 2.12 et 2.15 on a le :

**Théorème 2.16.** — *Un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$  préserve une fibration en droites.*

**Définition 4.** — Soit  $\phi_t$  un flot birationnel quadratique de générateur infinitésimal  $\chi$ . Une **symétrie forte**  $Y$  de  $\chi$  est un champ de vecteurs rationnellement intégrable de flot  $\psi_s$  tel que :

- $\phi_t^\bullet$  et  $\psi_s^\bullet$  commutent, i.e.  $[\chi, Y] = 0$ ;
- $\psi_s$  appartient à  $\text{Bir}_2$  pour tout  $s$ ;
- $\chi$  et  $Y$  ne sont pas  $\mathbb{C}$ -colinéaires.

Soit  $\phi_t$  un germe de flot birationnel quadratique ; par définition on peut le représenter comme une application holomorphe du disque de rayon  $R$  à valeurs dans  $\mathbb{P}^{17}$  :

$$\mathbb{D}(0, R) \rightarrow \text{Bir}_2 \subset \mathbb{P}^{17}, \quad t \mapsto \Phi_t$$

avec la condition  $\Phi_{s+t} = \Phi_s \Phi_t = \Phi_t \Phi_s$  dès que  $s, t$  et  $s+t$  sont simultanément dans le disque  $\mathbb{D}(0, R)$ .

**Lemme 2.17.** — Soient  $t_0$  dans  $\mathbb{D}(0, R)$  et  $k$  un entier ; l'itéré  $k$ -ième  $\Phi_{t_0}^k$  de  $\Phi_{t_0}$  est encore birationnel quadratique.

*Démonstration.* — L'ensemble  $T \subset \mathbb{D}(0, R)$  constitué des  $t$  tels que  $\Phi_t^k$  soit de degré inférieur ou égal à 2 est un ensemble algébrique du disque  $\mathbb{D}(0, R)$  (exercice). Cet ensemble contient le disque ouvert  $\mathbb{D}(0, R/k)$  dans lequel on a  $\Phi_{kt} = \Phi_t^k$ . Par suite  $T = \mathbb{D}(0, R)$  et les  $\Phi_{t_0}^k$  sont quadratiques.  $\square$

Il s'en suit que pour  $t_0$  dans  $\mathbb{D}(0, R)$ ,  $t_0$  fixé, les  $\Phi_{t_0}^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , forment un groupe abélien de transformations quadratiques. On peut d'ailleurs en déduire que les transformations  $\Phi_{st_0}^k$  sont, pour  $s$  dans  $[0, 1]$  et  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , bien définies et quadratiques ce qui permet d'introduire le groupe des transformations quadratiques  $\{\Phi_{t_0 s} \mid s \in \mathbb{R}\}$ . En fait en poursuivant cet argument on constate que les  $\{\Phi_{t_0} \mid t_0 \in \mathbb{D}(0, R)\}$  engendrent un groupe abélien de transformations quadratiques que l'on peut noter  $\{\Phi_t \mid t \in \mathbb{C}\}$ ; en ce sens notre germe de groupe à un paramètre est en fait global. De sorte que, bien que  $\text{Bir}_2^\bullet$  ne soit pas un groupe, les notions qui suivent sont pertinentes.

Soient  $\phi_t$  un flot dans  $\text{Bir}_2$  et  $\chi$  (resp.  $\mathcal{F}_\chi$ ) le champ (resp. feuilletage) associé. On note  $\langle \phi_t^\bullet \rangle \subset \text{Bir}_2^\bullet$  le groupe engendré par les  $\phi_t^\bullet$  et  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$  son adhérence de ZARISKI dans  $\text{Bir}_2$ . Enfin  $G(\chi)$  désigne le groupe abélien algébrique maximal contenu dans  $\text{Bir}_2^\bullet$  et contenant  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$ . Avec les notations précédentes on a le :

**Théorème 2.18.** — Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$  de générateur infinitésimal  $\chi$ . On a les assertions suivantes :

- i. Si  $G(\chi)$  est de dimension 1, alors  $\mathcal{F}_\chi$  est une **fibration rationnelle** <sup>(2)</sup>.
  - ii. Si  $\dim G(\chi) \geq 2$ , alors  $\chi$  possède une **symétrie forte**.
- Dans les deux cas  $\mathcal{F}_\chi$  est défini par une forme fermée rationnelle.

*Démonstration.* — i. Si  $\dim G(\chi) = 1$ , alors  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$  est la composante neutre de  $G(\chi)$ . Ce groupe en tant que groupe de LIE est isomorphe à  $\mathbb{C}$ , à  $\mathbb{C}^*$  ou encore à un tore  $\mathbb{C}/\Lambda$ . D'après le Théorème 2.16 le groupe  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$  préserve une fibration en droites, disons  $x_1 = \text{cte}$ . Ceci induit un morphisme

$$\pi : \overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

décrivant en particulier l'action de  $\phi_t$  sur les fibres. Si  $\phi_t$  préserve la fibration  $x_1 = \text{cte}$  fibre à fibre (i.e.  $\pi$  est triviale), alors  $\mathcal{F}_\chi = \{x_1 = \text{cte}\}$  et la conclusion est évidente. Sinon  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$  ne peut être un tore car il n'y a pas de tore complexe parmi les sous-groupes de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ ; par

2. De la même façon que nous avons défini une fibration en droites, une fibration rationnelle est la donnée d'une application rationnelle  $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  telle que les fibres  $f^{-1}(c)$  soient des courbes rationnelles, i.e. paramétrées par  $\mathbb{P}^1$ . Dans notre contexte cela signifie que les trajectoires de  $\chi$  sont contenues dans les niveaux de  $f$ .

suite l'adhérence (topologique) de  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$  dans  $\mathbb{P}^{17} \simeq \text{Rat}_2$  est une courbe rationnelle. On sait depuis DARBOUX qu'un feuilletage de  $\mathbb{P}^2$  dont toutes les feuilles sont d'adhérence des courbes algébriques possède une intégrale première rationnelle non constante ([68]). Dans notre cas ces courbes sont rationnelles (exercice) donc  $\mathcal{F}_\chi$  est une fibration rationnelle.

*ii.* Supposons que  $\dim G(\chi) \geq 2$ . On peut alors trouver un germe de groupe à un paramètre  $\psi_s$  dans  $G(\chi)$  non inclus dans  $\langle \phi_t^\bullet \rangle$ . Soit  $Y$  le générateur infinitésimal de  $\psi_s$ ; alors  $\chi$  et  $Y$  commutent et ne sont pas  $\mathbb{C}$ -colinéaires. Pour terminer soit  $\omega$  une 1-forme rationnelle définissant  $\mathcal{F}_\chi$ , i.e.  $i_\chi \omega = 0$ ; si  $\chi$  et  $Y$  sont génériquement indépendants  $\Omega = \omega / i_Y \omega$  est fermée et définit  $\mathcal{F}_\chi$ . Si ce n'est pas le cas,  $Y$  s'écrit  $r\chi$  avec  $r$  rationnelle non constante et la commutation implique  $\chi(r) = 0$ ; alors  $dr$  est fermée et définit  $\mathcal{F}_\chi$ .  $\square$

**Remarque 2.19.** — Soit  $Y$  une symétrie forte de  $\chi$ ; le flot de  $Y$  est contenu dans  $G(\chi)$ . Comme le groupe  $G(\chi)$  est un groupe de LIE,  $\alpha\chi + \beta Y$  est encore une symétrie forte de  $\chi$  dès que  $\beta$  est non nul.

En reprenant les démonstrations conduisant au Théorème 2.16, on constate que  $G(\chi)$  préserve une fibration en droites, disons  $x_1 = \text{cte}$ ; un élément  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  de  $G(\chi)$  est donc du type (en carte affine)

$$\phi(x_0, x_1) = \left( \frac{a(x_1)x_0 + b(x_1)}{c(x_1)x_0 + d(x_1)}, v(x_1) \right)$$

où  $v$  appartient à  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  et  $a, b, c$  et  $d$  sont des polynômes en  $x_1$ . Dans la carte affine  $x_2 = 1$  on peut donc écrire les champs  $\chi$  et  $Y$  sous l'une des formes

$$\chi = \chi_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + \chi_2(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Y = Y_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + Y_2(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

avec  $\chi_2(x_1) = 0, 1$  ou  $\alpha x_1$ . Puisque  $\chi$  et  $Y$  commutent quitte à changer  $Y_1$  en  $Y_1 - \epsilon\chi$  on peut supposer lorsque  $\chi_2 \neq 0$  que  $Y_2 \equiv 0$ .

**2.1.3. Deux résultats sur les germes de flots dans  $\text{Bir}_n$ .** — Nous présentons des généralisations des énoncés précédents dont les preuves nécessitent un matériau légèrement plus sophistiqué. Nous n'en ferons toutefois pas usage.

Pour un germe de flot quelconque, i.e. dans  $\text{Bir}_n$  (la définition étant la même que pour un flot dans  $\text{Bir}_2$ ), le Théorème 2.18 se généralise de la façon suivante :

**Théorème 2.20.** — Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_n$  de générateur infinitésimal  $\chi$ . Soit  $G(\chi)$  le groupe abélien maximal algébrique contenu dans  $\text{Bir}_n$  et contenant  $\overline{\langle \phi_t^\bullet \rangle}^Z$ . On a :

- Si  $G(\chi)$  est de dimension 1, alors  $\mathcal{F}_\chi$  est une fibration rationnelle ou elliptique.
- Si  $\dim G(\chi) \geq 2$ , alors  $\chi$  possède une symétrie forte.

Dans les deux cas  $\mathcal{F}_\chi$  est défini par une forme fermée rationnelle.

*Démonstration.* — La seconde assertion se démontre comme au Théorème 2.18. Dans la première situation les feuilles de  $\mathcal{F}_\chi$  sont d'adhérence (ordinaire) algébriques et  $\mathcal{F}_\chi$  possède une intégrale première rationnelle ; ses fibres sont nécessairement rationnelles ou elliptiques.  $\square$

Le Théorème 2.16 se généralise comme suit :

**Théorème 2.21.** — *Tout germe de flot birationnel laisse une fibration rationnelle invariante.*

*Esquisse de démonstration.* — Soient  $\phi_t$  un germe de flot birationnel et  $\mathcal{F}$  le feuilletage associé au générateur infinitésimal de  $\phi_t$ ; on a  $\phi_t^* \mathcal{F} = \mathcal{F}$ . Les transformations de type  $F = (x_0^a x_1^b, x_0^c x_1^d)$  ne se plongent pas dans un flot; en effet le degré des itérés  $F^k$  croît, ce qui n'est pas, comme nous l'avons vu dans le Lemme 2.17, le cas pour un élément d'un flot. Par suite, d'après le Théorème 1.2. de [23] (rappelé au Chapitre 2, §2.1.1.2), ou bien  $\mathcal{F}$  est une fibration rationnelle, ou bien  $\text{Bir}(S, \mathcal{F}) = \text{Aut}(S, \mathcal{F})$  pour un certain modèle birationnel de  $\mathcal{F}$ .

Lorsque  $\text{Bir}(S, \mathcal{F}) = \text{Aut}(S, \mathcal{F})$  les  $\phi_t$  induisent un groupe à un paramètre global (le flot du générateur infinitésimal vu sur  $S$ ) d'automorphismes de  $S$  qui bien sûr sont isotopes à l'identité. Par suite ils fixent tous les diviseurs exceptionnels de  $S$  et on peut donc supposer la surface  $S$  minimale, *i.e.*  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou  $\mathbb{P}^2$  ou une surface de HIRZEBRUCH. Un calcul élémentaire - au cas par cas - montre qu'un flot d'automorphismes sur une surface minimale laisse une fibration rationnelle invariante.  $\square$

Dans la suite les  $\bullet$  seront la plupart du temps omis.

## 2.2. Classification des germes de flots birationnels quadratiques

Soit  $\phi_t$  un germe de flot dans  $\text{Bir}_2$ ; d'après la Proposition 2.5 on sait que  $\Phi_t$  préserve une fibration en droites. Par suite  $\phi_t$  s'écrit à conjugaison linéaire près

$$\phi_t = \left( \frac{A(x_1, t)x_0 + B(x_1, t)}{C(x_1, t)x_0 + D(x_1, t)}, v(x_1, t) \right)$$

avec :

- $v(x_1, t) = x_1$  ou  $x_1 + t$  ou  $e^{\beta t} x_1$ ;
- $A, B, C$  et  $D$  sont polynomiaux en  $x_1$  et
 
$$\deg_{x_1} A \leq 1, \quad \deg_{x_1} B \leq 2, \quad \deg_{x_1} C = 0, \text{ i.e. } C(x_1, t) = C(t), \quad \deg_{x_1} D \leq 1;$$
- $B(x_1, 0) = C(x_1, 0) = 0$  et  $A(x_1, 0) = D(x_1, 0)$ , conditions qui traduisent  $\Phi_0 = \text{id}$ .

Le générateur infinitésimal  $\chi := \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right|_{t=0}$  de  $\phi_t$  est de la forme :

$$\frac{\alpha x_0^2 + \ell(x_1)x_0 + P(x_1)}{ax_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

où

- $\alpha, a, b$  désignent des éléments de  $\mathbb{C}$ ;
- $\ell$  et  $P$  des polynômes de degré 1 et 2 respectivement ;
- à conjugaison linéaire près et multiplication scalaire près (renormalisation du temps),  $\varepsilon$  vaut 0, 1 ou  $x_1$ .

**Stratégie :** Nous allons classifier, à automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  et renormalisation près, les champs ci-dessus et détecter parmi eux ceux qui sont rationnellement intégrables. La démarche est la suivante :

- lorsque celà est possible on calcule explicitement le flot par intégration ;
- pour éliminer certains cas on montre que  $\mathcal{F}_\chi$  n'a pas d'intégrale première rationnelle en cherchant une singularité de type nœud-col dans un modèle birationnel de  $\mathcal{F}_\chi$ ; la présence d'une telle singularité est évidemment une obstruction à l'existence d'une intégrale première rationnelle. On montre ensuite (en général via Maple) qu'il n'y a pas de symétrie forte. Le Théorème 2.18 assure alors que  $\chi$  n'est pas rationnellement intégrable ;
- une autre procédure consiste à faire dégénérer  $\chi$  (par renormalisation) sur un champ  $\chi_0$  que l'on sait ne pas être rationnellement intégrable.

L'approche se fait en trois étapes suivant les valeurs de  $\varepsilon$ .

**2.2.1. La seconde composante du flot est triviale, i.e.  $\varepsilon = 0$ .** — Dans ce paragraphe on s'intéresse aux champs du type

$$\frac{\gamma x_0^2 + \ell(x_1)x_0 + P(x_1)}{ax_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

À conjugaison près dans  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  près on se ramène aux cinq familles suivantes :

$$\begin{aligned} \chi &= (x_0^2 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0}, & \chi &= \frac{x_0^2 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}, & \chi &= \frac{(\alpha x_1 + \mu)x_0 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}, \\ \chi &= (\mu x_0 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0}, & \chi &= (\alpha x_0 x_1 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0} \end{aligned}$$

avec  $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$  et  $P \in \mathbb{C}[x_1]$ ,  $\deg P \leq 2$ .

Nous allons dans les Remarques et Lemmes qui suivent étudier ces différentes éventualités.

**Remarque 2.22.** — Considérons la famille  $(\mu x_0 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0}$ ; si  $\mu$  est non nul,  $\chi$  est linéairement conjugué à  $(\mu x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0}$  dont le flot s'écrit

$$\left( x_0 e^{\mu t} + \frac{x_1^2}{\mu} (e^{\mu t} - 1), x_1 \right).$$

Si  $\mu$  est nul, le flot de  $\chi$  est linéairement conjugué à  $(x_0 + t(\alpha + x_1^2), x_1)$ .

Tous les deux sont des flots « polynomiaux » quadratiques rencontrés dans la Proposition 2.15.

**Lemme 2.23.** — Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{C}[x_1]$  de degré inférieur ou égal à 2. Les champs

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (x_0^2 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0}, & \frac{\partial P}{\partial x_1} &\neq 0, \\ \chi_2 &= \frac{x_0^2 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}, & P &\neq 0, \\ \chi_3 &= (\alpha x_0 x_1 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0}, & \alpha &\in \mathbb{C}^*, \\ \chi_4 &= \frac{(\alpha x_1 + \mu)x_0 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}, & \alpha &\in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

ne sont pas rationnellement intégrables.

Le champ  $\frac{x_0^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$  est rationnellement intégrable et a pour flot  $\left(\frac{x_0 x_1}{x_1 - t x_0}, x_1\right)$ .

*Démonstration.* — La preuve se fait dans tous les cas par une intégration élémentaire directe. À titre d'exemple l'intégration de  $\chi_1$  se fait comme suit. On écrit  $\phi_t = (x_0(t), x_1(t))$ ; on a  $x_1(t) = x_1$  et l'équation du flot conduit à  $\frac{dx_0(t)}{dt} = x_0^2(t) + P(x_1)$ , soit

$$\frac{dx_0(t)}{x_0(t)^2 + P(x_1)} = dt.$$

On écrit formellement l'équation différentielle ci-dessus sous la forme

$$\frac{-1}{2i\sqrt{P(x_1)}} \left( \frac{dx_0(t)}{x_0(t) + i\sqrt{P(x_1)}} - \frac{dx_0(t)}{x_0(t) - i\sqrt{P(x_1)}} \right) = dt.$$

On obtient par intégration directe :

$$\log \left( \frac{x_0(t) + i\sqrt{P(x_1)}}{x_0(t) - i\sqrt{P(x_1)}} \right) = \text{cte} - 2i\sqrt{P(x_1)}t$$

soit encore en utilisant la condition initiale  $(x_0(0), x_1(0)) = (x_0, x_1)$

$$\frac{x_0(t) + i\sqrt{P(x_1)}}{x_0(t) - i\sqrt{P(x_1)}} = \frac{x_0 + i\sqrt{P(x_1)}}{x_0 - i\sqrt{P(x_1)}} e^{-2i\sqrt{P(x_1)}t}.$$

Ce qui donne une expression explicite pour  $x_0(t)$ ; puisque  $P$  est non constant le flot  $\phi_t$  est transcendant (multivalué si  $P$  n'est pas un carré).  $\square$

Les cas restants se traitent comme suit; lorsque  $P$  est constant on écrit le champ  $\chi_1$  sous la forme

$$(x_0^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Ce champ est rationnellement intégrable; son flot, qui est dans  $\text{Bir}_2$ , s'écrit

$$\left( \frac{x_0}{1 - t x_0}, x_1 \right) \text{ pour } \alpha = 0, \quad \left( \frac{\alpha(e^{-2\alpha t} + 1)x_0 + \alpha^2(e^{-2\alpha t} - 1)}{(e^{-2\alpha t} - 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} + 1)}, x_1 \right) \text{ sinon.}$$

Lorsque  $\mu$  est nul et  $\alpha$  non nul le champ

$$\chi_4 = \frac{\alpha x_0 x_1 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$$

est conjugué à  $\frac{\alpha x_0 x_1 + 1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$  dont le flot est

$$\left( -\frac{1}{\alpha x_1} + e^{\alpha t} \left( x_0 + \frac{1}{\alpha x_1} \right), x_1 \right)$$

Enfin si  $\alpha$  est nul, le flot de  $\chi_4$  est donné par  $\left( x_0 + t \frac{P(x_1)}{x_1}, x_1 \right)$ .

On déduit de la Remarque 2.22 et du Lemme 2.23 la :

**Proposition 2.24.** — *Un flot birationnel quadratique qui préserve une fibration en droites fibre à fibre est, à conjugaison linéaire près, de l'une des formes suivantes*

$$(x_0 + t(\alpha + x_1^2), x_1), \quad \left( \frac{x_0}{1 - tx_0}, x_1 \right), \quad \left( x_0 + t \frac{P(x_1)}{x_1}, x_1 \right), \quad \left( x_0 e^{\mu t} + \frac{x_1^2}{\mu} (e^{\mu t} - 1), x_1 \right),$$

$$\left( \frac{x_0 x_1}{x_1 - tx_0}, x_1 \right), \quad \left( -\frac{1}{\mu x_1} + e^{\mu t} \left( x_0 + \frac{1}{\mu x_1} \right), x_1 \right), \quad \left( \frac{\mu(e^{-2\mu t} + 1)x_0 + \mu^2(e^{-2\mu t} - 1)}{(e^{-2\mu t} - 1)x_0 + \mu(e^{-2\mu t} + 1)}, x_1 \right)$$

où  $P \in \mathbb{C}[x_1]$ ,  $\deg P \leq 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}^*$ .

### 2.2.2. La seconde composante du flot est une translation, i.e. $\varepsilon = 1$ . —

Pour ce type de flot le générateur infinitésimal a la forme suivante

$$\frac{\alpha x_0^2 + \ell(x_1)x_0 + P(x_1)}{ax_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

avec  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\ell$  affine et  $P$  polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Il se trouve que tous ces champs ne sont pas rationnellement intégrables et nous devons lister ceux qui le sont. Dans un premier temps on démontre de façon élémentaire (exercice) que ces champs font partie, à automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  près, de la liste suivante :

$$\begin{array}{lll} (x_0^2 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{x_0^2 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & (\alpha x_0 + p_0 + p_1 x_1) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ (\alpha x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & (p_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & (\mu x_0 x_1 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \frac{\mu x_0 x_1 + p_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\alpha x_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{x_0 + x_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \frac{x_0 + p_1 x_1 + x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\alpha x_0 + x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\mu x_0 x_1}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \frac{\mu x_0 x_1 + 1}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & & \end{array}$$

avec  $\alpha, b$  dans  $\mathbb{C}^*$ ,  $p_i$  dans  $\mathbb{C}$  et  $P$  dans  $\mathbb{C}[x_1]$ ,  $\deg P \leq 2$ .

Parmi ces champs certains s'intègrent de façon élémentaire : c'est le cas des 3<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> qui conduisent à des flots de transformations polynomiales. Nous n'allons pas présenter en détail toutes les preuves des lemmes mais en donner toutefois quelques-unes typiques.

Commençons par considérer le cas où  $\chi = (x_0^2 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Dans un premier temps supposons  $P$  constant :

**Lemme 2.25.** — *Le champ*

$$(x_0^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*s'intègre en :*

$$\left( \frac{\alpha(e^{-2\alpha} + 1)x_0 + \alpha^2(e^{-2\alpha} - 1)}{(e^{-2\alpha} - 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha} + 1)}, x_1 + t \right).$$

*Démonstration.* — Le champ  $(x_0^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial x_0}$  est conjugué via  $\frac{x_0 + \alpha}{x_0 - \alpha}$  au champ  $-2\alpha x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$  dont le flot est  $e^{-2\alpha t} x_0$  d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 2.26.** — On peut mentionner le fait suivant. Suivant les valeurs des paramètres on a

$$\phi_0 = \text{id} \in \Sigma^0, \quad \phi_t \in \Sigma^1, \forall t \in \frac{2i\pi\mathbb{Z}}{\alpha} \setminus \{0\}, \quad \phi_t \in \Sigma^2, \forall t \notin \frac{2i\pi\mathbb{Z}}{\alpha}$$

ce qui montre que pour une infinité de paramètres on passe dans  $\Sigma^1$  en étant génériquement dans  $\Sigma^2$ .

Nous présentons en détail l'étude du cas  $P$  non constant qui est typique.

**Lemme 2.27.** — *Considérons le champ  $\chi$  défini par*

$$\chi = (x_0^2 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P \in \mathbb{C}[x_1], \deg P \leq 2, \frac{\partial P}{\partial x_1} \neq 0.$$

*Le flot de  $\chi$  n'est pas dans  $\text{Bir}_2$ .*

*Démonstration.* — Nous allons utiliser le Théorème 2.18.

*i.* Commençons par montrer que  $\mathcal{F}_\chi$  n'admet pas d'intégrale première rationnelle.

Posons  $P(x_1) := p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  associé à  $\chi$  est décrit par la forme différentielle « duale » de  $\chi$

$$\omega_\chi = (x_0^2 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2) dx_1 - dx_0.$$

Quitte à changer  $x_0$  en  $1/x_0$  et  $x_1$  en  $1/x_1$ , on obtient :

$$\omega_\chi = (x_1^2 + x_0^2(p_0 x_1^2 + p_1 x_1 + p_2)) dx_1 - x_1^4 dx_0.$$

Nous allons montrer qu'après un certain nombre d'éclatements  $\mathcal{F}_\chi$  présente une singularité de type nœud-col. Pour cela posons  $x_1 := tx_0$ ; alors à facteur multiplicatif près

$$\omega_\chi = t(t^2 + p_0 t^2 x_0^2 + p_1 t x_0 + p_2 - t^3 x_0^2) dx_0 + x_0(t^2 + p_0 t^2 x_0^2 + p_1 t x_0 + p_2) dt.$$

Supposons  $p_2 \neq 0$ . Le 1-jet au point singulier  $(0, -\sqrt{-p_2})$  est de la forme  $t dx_0$ ; la singularité est de type nœud-col et  $\mathcal{F}_\chi$  n'admet donc pas d'intégrale première rationnelle.

Lorsque  $p_2 = 0$  la même suite de transformations conduit à :

$$\omega_\chi = (x_1 + p_0 x_1 x_0^2 + p_1 x_0^2) dx_1 - x_1^3 dx_0.$$

On fait alors deux éclatements, plus précisément on pose  $x_1 = tx_0^2$ , et on obtient la forme

$$t(2t + 2p_0 t x_0 + 2p_1 - t^2 x_0^3) dx_0 + x_0(t + p_0 t x_0 + p_1) dt;$$

on remarque qu'en  $(x_0, t) = (0, -p_1)$  celle-ci présente une singularité de type nœud-col car  $P$  est non constant donc  $p_1$  non nul. Ainsi  $\mathcal{F}_\chi$  ne peut posséder d'intégrale première rationnelle.

*ii.* Pour finir montrons que  $\chi$  n'a pas de symétrie forte  $Y$ .

D'après la Remarque 2.19, on peut supposer qu'un tel  $Y$  s'écrit  $\frac{Q(x_0, x_1)}{Cx_1 + D} \frac{\partial}{\partial x_0}$  avec  $Q$  polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et  $C, D$  dans  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On remarque que les pôles de  $Y$  doivent être invariants par  $\chi$ . Mais le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  ne possède pas de courbe du type  $x_1 = \text{cte}$  invariante autre que  $x_1 = 0$ ; ainsi  $(C, D)$  est à valeurs dans  $\{(0, 1), (1, 0)\}$ . Lorsque  $(C, D) = (1, 0)$  (resp.  $(C, D) = (0, 1)$ ) un calcul direct montre que  $Y$  est nul dès que  $P$  est non constant.  $\square$

Ensuite on étudie le champ  $\chi = \frac{x_0^2 + P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$  en distinguant le cas  $P$  constant du cas  $P$  non constant.

**Lemme 2.28.** — *Le flot de*

$$\frac{x_0^2 - \alpha^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*est birationnel si et seulement si  $2\alpha$  est dans  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $\alpha^2 = 1/4$ .*

*Lorsque  $\alpha^2 = 1/4$  le flot  $\phi_t$  s'écrit*

$$\left( \frac{(t + 2x_1)x_0 - t/2}{t + 2x_1 - 2tx_0}, x_1 + t \right).$$

*Démonstration.* — Si  $\alpha$  est nul, on a

$$\phi_t = \left( \frac{x_0}{1 + x_0(\ln x_1 - \ln(x_1 + t))}, x_1 + t \right)$$

qui n'est évidemment pas birationnel.

Si  $\alpha$  n'est pas nul, une intégration explicite donne

$$\phi_t = \left( \frac{\alpha^2(x_1^{2\alpha} - (x_1 + t)^{2\alpha}) + \alpha(x_1^{2\alpha} + (x_1 + t)^{2\alpha})x_0}{(x_1^{2\alpha} + (x_1 + t)^{2\alpha})\alpha + (x_1^{2\alpha} - (x_1 + t)^{2\alpha})x_0}, x_1 + t \right)$$

d'où l'on déduit le résultat.  $\square$

La démonstration détaillée du résultat suivant est laissée au lecteur (exercice).

**Lemme 2.29.** — *Le flot  $\phi_t$  du champ*

$$\chi = \frac{x_0^2 + p_0 + p_1x_1 + p_2x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_i \in \mathbb{C}, (p_1, p_2) \neq (0, 0),$$

*appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $(p_0, p_1) = (-1/4, 0)$ .*

*Si  $(p_0, p_1) = (-1/4, 0)$ , alors  $\phi_t$  s'écrit*

$$\left( \frac{f(t)(2tx_0 - t + 2x_0x_1) + g(t)(1 - 2x_0 + 4p_2tx_1 + 4p_2x_1^2)}{2(x_1f(t) + g(t)(1 - 2x_0))}, x_1 + t \right)$$

*avec  $f(t) = 2\sqrt{p_2}\cos(\sqrt{p_2}t)$  et  $g(t) = \sin(\sqrt{p_2}t)$ .*

*Esquisse de démonstration.* — On cherche d'abord sous quelles conditions  $\chi$  possède une symétrie forte que l'on peut choisir sous la forme  $\frac{Q(x_0, x_1)}{Cx_1 + D} \frac{\partial}{\partial x_0}$  où  $Q$  désigne un polynôme de degré 2 et  $C, D$  deux complexes non tous deux nuls. Un calcul direct montre que si  $(C, D) = (0, 1)$  alors  $p_0 + p_1x_1 + p_2x_1^2$  est constant, ce que l'on a exclu. Lorsque  $(C, D) = (1, 0)$  c'est encore un calcul direct qui montre que l'existence d'une symétrie non triviale implique  $(p_0, p_1) = (-1/4, 0)$ , cas où l'intégration du flot est explicite. Lorsque  $(p_0, p_1) \neq (-1/4, 0)$  on trouve que  $\mathcal{F}_\chi$  a une singularité de type nœud-col après une suite d'éclatements ad-hoc (exercice).  $\square$

**Remarque 2.30.** — On remarque que

$$\left( \frac{f(t)(2tx_0 - t + 2x_0x_1) + g(t)(1 - 2x_0 + 4p_2tx_1 + 4p_2x_1^2)}{2(x_1f(t) + g(t)(1 - 2x_0))}, x_1 + t \right)$$

avec  $f(t) = 2\sqrt{p_2} \cos(\sqrt{p_2}t)$  et  $g(t) = \sin(\sqrt{p_2}t)$  a pour ensemble d'indétermination

$$\{(1 : 0 : 0), (1 : 0 : 2), (tf(t) - g(t) : 2g(t)t : -2g(t))\};$$

notons que  $g$  s'annule pour  $t \in \mathbb{Z}\pi/\sqrt{p_2}$  et, pour ces valeurs des paramètres,  $\phi_t$  est dans  $\Sigma^2$ , sinon  $\phi_t$  est dans  $\Sigma^3$ .

**Lemme 2.31.** — *Le champ  $\chi = (\mu x_0 x_1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$  n'est pas rationnellement intégrable lorsque  $\mu$  est non nul.*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde : supposons que le flot de  $\chi$  soit birationnel. Posons  $f(x_0, x_1) := (\varepsilon x_0, x_1)$ . Notons

$$\chi_\varepsilon = (\mu x_0 x_1 + \varepsilon \alpha) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

le conjugué de  $\chi$  par  $f$  et  $\phi_t^\varepsilon = f \phi_t f^{-1}$  le flot de  $\chi_\varepsilon$ . Par le théorème de CAUCHY appliqué en un point générique de  $\mathbb{P}^2$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\phi_t^\varepsilon$  tend vers  $\phi_t^0$ , i.e. le flot de  $\chi_0$  est birationnel ; or le flot de  $\chi_0$  s'écrit  $(x_0 e^{\mu x_1 t + \mu^2 t^2/2}, x_1 + t)$  et n'est pas birationnel.  $\square$

Cet énoncé traite aussi la famille des

$$\chi = (\mu x_0 x_1 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

où  $\mu \in \mathbb{C}^*$ ,  $p_i \in \mathbb{C}$ ,  $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$  ; en effet un tel champ est linéairement conjugué à un champ du type  $(\mu x_0 x_1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$  dont on sait d'après le Lemme 2.31 qu'il n'est pas rationnellement intégrable.

C'est encore cette même méthode de dégénérescence (introduire ici  $(x_0, \varepsilon x_1)$ ) qui est utilisé dans le :

**Lemme 2.32.** — *Le champ*

$$\chi = \frac{\mu x_0 x_1 + p_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*est rationnellement intégrable si et seulement si  $p_0 = 0$ , i.e. si et seulement s'il est linéaire.*

Les énoncés 2.33, 2.38, 2.35 s'obtiennent par intégration directe (exercice).

**Lemme 2.33.** — *Le flot de*

$$\chi = \frac{\alpha x_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $\alpha$  appartient à  $\{-1, 1\}$  auquel cas il est donné par*

$$\left( \frac{x_0 x_1}{x_1 + t}, x_1 + t \right), \quad \text{resp.} \quad \left( \frac{x_0}{x_1} (x_1 + t), x_1 + t \right).$$

**Lemme 2.34.** — *Le champ*

$$\chi = \frac{x_0 + x_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*n'est pas rationnellement intégrable.*

**Lemme 2.35.** — *Le flot de*

$$\chi = \frac{x_0 + p_1 x_1 + x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $p_1 = 0$ , auquel cas il vaut*

$$\left( x_0 + \frac{x_0 t}{x_1} + t^2 + x_1 t, x_1 + t \right).$$

Dans le résultat qui suit on utilise encore un procédé de dégénérescence que nous détaillons.

**Lemme 2.36.** — *Le flot de*

$$\chi = \frac{\alpha x_0 + x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

*est dans  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $\alpha$  est dans  $\{-1, 1\}$ .*

*Si  $\alpha = 1$ , on retrouve le cas précédent ; si  $\alpha = -1$  le flot de  $\chi$  s'écrit*

$$\left( \frac{t x_1^2 + t^2 x_1 + x_0 x_1 + t^3/3}{x_1 + t}, x_1 + t \right).$$

*Démonstration.* — Le champ  $\chi$  est linéairement conjugué à

$$X_\varepsilon = \frac{\alpha x_0 + \varepsilon x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

pour  $\varepsilon \neq 0$ . Comme  $X_0$  est rationnellement intégrable et dans  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $\alpha$  appartient à  $\{-1, 1\}$  (Lemme 2.33), le champ  $\chi$  n'est pas dans  $\text{Bir}_2$  pour  $\alpha \notin \{-1, 1\}$ .  $\square$

Lorsque  $\alpha = 0$  on a le résultat suivant (intégration directe) :

**Lemme 2.37.** — *Soit  $\chi$  le champ*

$$\frac{p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_i \in \mathbb{C}.$$

*Le champ  $\chi$  est rationnellement intégrable si et seulement si  $p_0 = 0$  et dans ce cas  $\chi$  est linéaire.*

**Lemme 2.38.** — *Le flot de*

$$\chi = \frac{\mu x_0 x_1}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \in \mathbb{C}^*$$

*est dans Bir<sub>2</sub> si et seulement si  $b\mu = \pm 1$ , ce qui conduit aux flots :*

$$\left( x_0 e^{\mu t} \left( \frac{x_1 + 1/\mu}{x_1 + t + 1/\mu} \right), x_1 + t \right), \quad \left( x_0 e^{\mu t} \left( \frac{x_1 + t - 1/\mu}{x_1 - 1/\mu} \right), x_1 + t \right).$$

Enfin nous détaillons la démonstration du dernier cas qui fait intervenir des arguments un peu différents.

**Lemme 2.39.** — *Le champ*

$$\chi = \frac{\mu x_0 x_1 + 1}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \in \mathbb{C}^*$$

*est rationnellement intégrable si et seulement si  $b\mu = 1$  et dans ce cas*

$$\phi_t = \left( \left( x_0(x_1 + b) + b - b e^{-t/b} \right) \frac{e^{t/b}}{x_1 + b + t}, x_1 + t \right).$$

*Démonstration.* — Pour  $\varepsilon \neq 0$  le champ  $\chi$  est conjugué à

$$X_\varepsilon = \frac{\mu x_0 x_1 + \varepsilon}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1};$$

d'après le Lemme 2.38 le champ  $X_0$  est rationnellement intégrable si et seulement si  $b\mu = \pm 1$  et cette condition est nécessaire pour que  $\chi$  le soit. Il faut donc intégrer l'équation

$$\frac{\partial x_0(t)}{\partial t} = \frac{\mu x_0(t)(x_1 + t) + 1}{x_1 + b + t}, \quad b\mu = \pm 1$$

que l'on traite comme une équation linéaire avec second membre. On cherche  $x_0(t)$  sous la forme  $C(t)e^{\mu t}(x_1 + t + b)^{-b\mu}$  (variation de la constante) ; on obtient

$$C'(t) = \frac{e^{-\mu t}}{(x_1 + t + b)^{1-b\mu}}.$$

Si  $b\mu = 1$  on a le flot suivant :

$$\phi_t = \left( \left( x_0(\mu x_1 + 1) + 1 - e^{-\mu t} \right) \frac{e^{\mu t}}{\mu x_1 + 1 + \mu t}, x_1 + t \right)$$

qui est bien dans Bir<sub>2</sub>.

Lorsque  $b\mu = -1$  on obtient

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{e^{-\mu t}}{(x_1 + t + b)^2} = \frac{e^{-\mu(x_1 + t + b)}}{(x_1 + t + b)^2} e^{\mu(x_1 + b)} \\ &= e^{\mu(x_1 + b)} \left( \frac{1}{(x_1 + b + t)^2} - \frac{\mu}{x_1 + b + t} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-\mu)^n (x_1 + t + b)^{n-2}}{n!} \right). \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$x_0(t) = e^{\mu(x_1+t+b)} \left( -1 - \mu(x_1+t+b) \ln(x_1+t+b) + \sum_{n \geq 2} \frac{(-\mu)^n (x_1+t+b)^n}{(n-1)n!} \right) + D e^{\mu t} (x_1+t+b).$$

La condition initiale  $x_0(0) = x_0$  permet de calculer  $D$ ; on constate alors que le flot obtenu n'est pas birationnel (présence de  $\ln$  en particulier).  $\square$

### 2.2.3. La seconde composante du flot est une homothétie. —

Dans cette situation le champ  $\chi$  a pour seconde composante  $\mu x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  avec  $\mu \in \mathbb{C}^*$ . Dans la suite nous supposons que  $\mu$  vaut 1 pour ne pas alourdir l'exposé. Nous obtenons donc une classification à « renormalisation près du temps » par une homothétie.

Le champ  $\chi$  est de la forme

$$\frac{\delta x_0^2 + \ell(x_1)x_0 + P(x_1)}{Ax_1 + B} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

où  $P$  désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et  $\ell$  un polynôme de degré 1.

Quitte à faire agir une application diagonale  $(ax_0, bx_1)$ , on peut supposer que  $\delta = 1$  ou  $\delta = 0$  et que  $(A, B)$  prend les valeurs  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  ou  $(1, 1)$ .

Suivant les valeurs des différents paramètres et à automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  près les champs à étudier correspondent à des flots linéaires ou polynomiaux (apparaissant dans la Proposition 2.15) ou sont décrits dans les lemmes qui suivent. Les preuves purement calculatoires ne sont pas détaillées.

**Lemme 2.40.** — *On désigne par  $\chi$  le champ  $(x_0^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Le flot de  $\chi$  appartient à  $\text{Bir}_2$  et s'écrit*

$$\left( \alpha \frac{(e^{-2\alpha t} + 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} - 1)}{(e^{-2\alpha t} - 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} + 1)}, e^t x_1 \right).$$

**Remarque 2.41.** — Le flot précédent compte génériquement deux points d'indétermination qui sont immobiles ; on constate que

$$\text{Exc } \phi_t = \{x_2 = 0, (e^{-2\alpha t} - 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} + 1)x_2 = 0\}$$

est constitué d'une droite fixe et d'une droite mobile.

On note que

$$\phi_t \in \Sigma^0, \text{ pour } t \text{ dans } \frac{2i\pi\mathbb{Z}}{\alpha} \quad \text{et} \quad \phi_t \in \Sigma^2, \text{ sinon.}$$

**Lemme 2.42.** — *Le flot du champ*

$$(x_0^2 + P(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P \in \mathbb{C}[x_1], \text{ deg } P \leq 2, \frac{\partial P}{\partial x_1} \neq 0$$

n'appartient pas à  $\text{Bir}_2$ .

*Démonstration.* — On montre que  $\mathcal{F}_\chi$  n'a pas d'intégrale première rationnelle en montrant que  $\mathcal{F}_\chi$  a une singularité nœud-col après un certain nombre d'éclatements.

Ensuite on montre que  $\chi$  admet une symétrie forte si et seulement si  $(p_0, p_1) = (-\frac{1}{4}, 0)$ . Si  $(p_0, p_1) = (-\frac{1}{4}, 0)$  on peut supposer, puisque  $P$  n'est pas constant, que  $p_2 = 1$ ; une intégration explicite montre que le flot n'est pas birationnel.  $\square$

Par intégration élémentaire on obtient le :

**Lemme 2.43.** — *Le flot de*

$$\frac{x_0^2 - \alpha^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

*appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $\alpha = 0$ ; dans ce cas*

$$\phi_t = \left( \frac{x_0 x_1}{x_1 - x_0 + e^{-t} x_0}, e^t x_1 \right).$$

**Remarque 2.44.** — Le flot  $\phi_t = \left( \frac{x_0 x_1}{x_1 - x_0 + e^{-t} x_0}, e^t x_1 \right)$  vérifie :

$$\phi_t = \text{id} \in \Sigma^0, \forall t \in 2i\pi\mathbb{Z}, \quad \phi_t \in \Sigma^2, \forall t \notin 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Dans le lemme qui suit on utilise un procédé de ramification que l'on détaille.

**Lemme 2.45.** — *Soit  $\chi$  le champ défini par*

$$\frac{x_0^2 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_i \in \mathbb{C}, \quad (p_1, p_2) \neq (0, 0).$$

*Le flot  $\phi_t$  de  $\chi$  est birationnel si et seulement si  $p_0 = p_1 = 0$ . Dans ce cas*

$$\phi_t = \left( -\frac{f(t)(x_0(1+\alpha) - 2p_2 x_1) + g(t)(x_0(\alpha-1) + 2p_2 x_1)}{f(t)(x_1(1-\alpha) - 2x_0) + g(t)(2x_0 - x_1(1+\alpha))} x_1 e^t, x_1 e^t \right)$$

*avec*

$$\alpha = \sqrt{1 - 4p_2}, \quad f(t) = e^{-(1+\alpha)t/2}, \quad g(t) = e^{((\alpha-1)t/2)}.$$

*Démonstration.* — En utilisant la Remarque 2.19 on constate que  $\chi$  admet une symétrie forte si et seulement si  $p_0 = p_1 = 0$ . Lorsque  $p_0 = p_1 = 0$ , l'intégration du flot est immédiate. Supposons désormais que  $(p_0, p_1) \neq (0, 0)$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  est décrit par la 1-forme

$$\omega_\chi = (x_0^2 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2) dx_1 - x_1^2 dx_0.$$

Le 1-jet au point singulier  $(\sqrt{-p_0}, 0)$  est du type nœud-col si  $p_0$  est non nul ce qui interdit l'existence d'une intégrale première rationnelle. Voici comment on procède lorsque  $p_0 = 0$ , *i.e.* lorsque la 1-forme  $\omega_\chi$  s'écrit

$$(x_0^2 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2) dx_1 - x_1^2 dx_0.$$

Nous faisons d'abord une ramification  $(x_0, x_1) \mapsto (x_0, x_1^2)$  pour obtenir

$$2(x_0^2 + p_1 x_1^2 + p_2 x_1^4) dx_1 - x_1^3 dx_0;$$

puis nous éclatons l'origine  $(x_0, x_1) = (0, 0)$  en posant  $x_0 = sx_1$  :

$$2(p_1 + s^2 + p_2x_1^2 - sx_1) dx_1 - x_1^2 ds.$$

On remarque alors puisque  $p_1$  est non nul qu'au point  $(s, x_1) = (\sqrt{-p_1}, 0)$  cette 1-forme présente une singularité de type nœud-col ce qui une fois de plus exclut l'existence d'une intégrale première rationnelle pour  $\chi$ .  $\square$

La démonstration du lemme qui suit n'a rien de particulier ; mais elle montre qu'il y a des champs de vecteurs rationnels quadratiques dont le flot est birationnel mais de degré aussi grand que l'on veut. Nous avons déjà vu un tel phénomène dans la démonstration du Lemme 2.28.

**Lemme 2.46.** — *Le flot du champ  $\chi$  défini par*

$$\frac{x_0^2 - \alpha^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

*appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $4\alpha^2 = 1$ .*

*Lorsque  $4\alpha^2 = 1$ , on a*

$$\phi_t = \left( \frac{e^t(4x_0x_1 + 2x_0 - 1) + 2x_0 + 1}{2(e^t(2x_1 + 1 - 2x_0) + 1 + 2x_0)}, e^t x_1 \right).$$

*Démonstration.* — Supposons  $\alpha$  nul. L'équation satisfaite par  $\phi_t$  a pour solution

$$\left( \frac{x_0}{1 + x_0(\ln(e^t x_1 + 1) - \ln(x_1 + 1) - t)}, e^t x_1 \right);$$

le champ  $\chi$  n'est donc pas rationnellement intégrable.

Si  $\alpha$  est non nul,

$$\phi_t = \left( -\alpha \frac{(x_0 + \alpha)(e^t x_1 + 1)^{2\alpha} + (x_0 - \alpha)(x_1 + 1)^{2\alpha} e^{2\alpha t}}{(x_0 - \alpha)(x_1 + 1)^{2\alpha} e^{2\alpha t} - (x_0 + \alpha)(e^t x_1 + 1)^{2\alpha}}, e^t x_1 \right),$$

expression invariante lorsque l'on change  $\alpha$  en  $-\alpha$ . On remarque que  $\phi_t$  est birationnel si et seulement si  $2\alpha$  est un entier non nul ; on constate qu'il est quadratique si et seulement si  $2\alpha = 1$  auquel cas il s'écrit

$$\left( \frac{e^t(4x_0x_1 + 2x_0 - 1) + 2x_0 + 1}{2(e^t(2x_1 + 1 - 2x_0) + 1 + 2x_0)}, e^t x_1 \right).$$

$\square$

**Remarque 2.47.** — Un calcul montre que

$$\phi_t = \left( \frac{e^t(4x_0x_1 + 2x_0 - 1) + 2x_0 + 1}{2(e^t(2x_1 + 1 - 2x_0) + 1 + 2x_0)}, e^t x_1 \right)$$

appartient à  $\Sigma^3$  sauf lorsque  $t \in 2i\pi\mathbb{Z}$  où l'on a  $\phi_t = \text{id}$ .

Dans la démonstration du lemme qui suit on fait appel à un théorème de linéarisation de POINCARÉ ([2]). Toutefois on pourrait se ramener à une procédure de type symétrie/nœud-col en faisant quelques éclatements.

**Lemme 2.48.** — Soit  $\chi$  le champ défini par

$$\frac{x_0^2 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_i \in \mathbb{C}, (p_1, p_2) \neq (0, 0).$$

Le flot de  $\chi$  appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $(p_0, p_1) = (-1/4 + p_2, 2p_2)$ .

Si  $(p_0, p_1) = (-1/4 + p_2, 2p_2)$  et  $p_2 \neq 1/4$ , le flot de  $\chi$  s'écrit

$$\left( \frac{\sin(\beta t) (e^t x_1 (x_1 - 2x_0) + 4\beta^2 (x_1 + 1) (e^t x_1 + 1)) + 2\beta \cos(\beta t) ((e^t - 1)x_1 + 2(e^t x_1 + 1)x_0)}{2(2\beta \cos(\beta t)(x_1 + 1) - \sin(\beta t)(2x_0 - x_1))}, e^t x_1 \right)$$

avec  $\beta = \sqrt{4p_2 - 1}/2$ .

Si  $(p_0, p_1, p_2) = (0, 1/2, 1/4)$ , on obtient

$$\phi_t = \left( \frac{2e^t x_1 t x_0 - e^t x_1^2 t - 4e^t x_1 x_0 - 2e^t x_1 - 4x_0 + 2x_1}{2(-2x_1 - 2 + 2tx_0 - tx_1)}, e^t x_1 \right).$$

**Remarque 2.49.** — A priori  $\beta$  est défini au signe près mais on constate que l'expression du flot est invariante par  $\beta \mapsto -\beta$ .

*Démonstration.* — Si  $\chi$  a une symétrie forte  $Y$ , on peut supposer qu'elle est de la forme

$$\frac{Q(x_0, x_1)}{Cx_1 + D} \frac{\partial}{\partial x_0}$$

où  $Q$  désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à deux et  $C, D$  des complexes non tous deux nuls (voir Remarque 2.19). Un calcul montre que l'existence d'un tel  $Y$  implique que

$$(p_0, p_1) = (-1/4 + p_2, 2p_2) \quad \text{ou} \quad (p_0, p_1) = (-1/4, 0)$$

(dans ce dernier cas  $p_2$  est non nul). Pour  $(p_0, p_1) = (-1/4 + p_2, 2p_2)$  le flot s'obtient par un calcul direct. Lorsque  $(p_0, p_1) = (-1/4, 0)$  on distingue le cas  $p_2 = 1/4$  du cas  $p_2 \neq 1/4$ . Pour  $p_2 = 1/4$  on constate que

$$\phi_t = \left( \frac{\frac{1}{2} (2x_0 - x_1 - 1) (e^t x_1 + 1) \ln \left( \frac{e^t x_1 + 1}{x_1 + 1} \right) - 2(2x_0 - x_1 - 1) x_1 e^t - 2x_1 (e^t x_1 + 1)}{(2x_0 - x_1 - 1) \ln \left( \frac{e^t x_1 + 1}{x_1 + 1} \right) - 2x_1}, e^t x_1 \right)$$

n'est pas birationnel. Si  $p_2 \neq 1/4$ , on obtient

$$\phi_t = \left( \frac{1}{2} + \frac{e^t x_1 (1 - \gamma) (e^t x_1 + 1)^\gamma (2x_0 - 1 - x_1 - \gamma x_1) + (1 + \gamma) (x_1 + 1)^\gamma (1 + x_1 - 2x_0 - \gamma x_1)}{(x_1 + 1)^\gamma (1 + x_1 - 2x_0 - \gamma x_1) + (e^t x_1 + 1)^\gamma (2x_0 - 1 - x_1 - \gamma x_1)}, e^t x_1 \right),$$

avec  $\gamma = \sqrt{1 - 4p_2}$ ; ainsi  $\phi_t$  n'est pas quadratique.

Supposons désormais que  $(p_0, p_1) \neq (-1/4, 0)$  et  $(p_0, p_1) \neq (-1/4 + p_2, 2p_2)$  (rappelons que  $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$ ). Quitte à faire une translation en  $x_1$  et à faire agir  $(x_0, \varepsilon x_1)$  sur  $\chi$ , on obtient le champ

$$Y_\varepsilon := \frac{x_0^2 + p_0 + p_1(\varepsilon x_1 - 1) + p_2(\varepsilon x_1 - 1)^2}{\varepsilon x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\varepsilon x_1 - 1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Posons  $\tilde{Y}_\varepsilon := \varepsilon Y_\varepsilon$ . On constate que

$$\tilde{Y}_0 = \frac{x_0^2 + p_0 - p_1 + p_2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_1}$$

et on remarque que si  $\chi$  est rationnellement intégrable, alors  $\tilde{Y}_0$  aussi. Posons

$$\alpha^2 = -(p_0 - p_1 + p_2);$$

d'après le Lemme 2.28 le flot de  $Y_0$  appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $2\alpha$  vaut 1 ou  $-1$ . Par suite pour que  $\phi_t$  appartienne à  $\text{Bir}_2$  il faut que  $2\alpha = \pm 1$ , i.e.  $p_1 - p_0 - p_2 = 1/4$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  est décrit par la 1-forme

$$(x_0^2 + p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2) dx_1 - x_1(x_1 + 1) dx_0$$

soit à translation en  $x_1$  près

$$(x_0^2 - 1/4 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2 - 2p_2 x_1) dx_1 - x_1(x_1 - 1) dx_0.$$

Au point singulier  $(-1/2, 0)$  le 1-jet de la forme s'écrit

$$(-x_0 + (p_1 - 2p_2)x_1 + \text{termes de degré supérieur}) dx_1 + x_1 dx_0;$$

d'après POINCARÉ ([2]) le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  est localement conjugué au feuilletage linéaire donné par

$$(-x_0 + (p_1 - 2p_2)x_1) dx_1 + x_1 dx_0.$$

Si  $p_1 - 2p_2$  est non nul,  $(-x_0 + (p_1 - 2p_2)x_1) dx_1 + x_1 dx_0$  n'a pas d'intégrale première méromorphe. En effet par homothétie on peut se ramener à  $p_1 - 2p_2 = 1$ ; on constate alors que

$$(-x_0 + x_1) dx_1 + x_1 dx_0$$

a pour intégrale première  $x_1 \exp\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$ . Reste le cas où  $p_1 - 2p_2 = 0$ , l'égalité  $p_1 - p_0 - p_2 = 1/4$  conduit à  $(p_0, p_1) = (p_2 - 1/4, 2p_2)$ , cas que l'on a justement exclu.  $\square$

**Remarque 2.50.** — Pour les flots précédents on a

$$\phi_0 = \text{id} \in \Sigma^0, \quad \phi_t \in \Sigma^2, \forall t \in 2i\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \phi_t \in \Sigma^3, \forall t \notin 2i\pi\mathbb{Z}.$$

**Lemme 2.51.** — Le flot de  $\frac{1+\varepsilon x_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ , avec  $\varepsilon$  dans  $\{0, 1\}$ , s'écrit

$$\left( x_0 + \frac{1}{x_1} + t\varepsilon - \frac{e^{-t}}{x_1}, e^t x_1 \right).$$

Une intégration directe (exercice) conduit au :

**Lemme 2.52.** — *Le flot du champ*

$$\chi = \frac{p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_i \in \mathbb{C},$$

appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $p_1 = p_0 + p_2$  et dans ce cas le champ  $\chi$  est affine.

Une fois de plus c'est la technique de symétrie/nœud-col (exercice) qui permet d'établir le :

**Lemme 2.53.** — *Considérons le champ*

$$\chi = \frac{bx_0 + \mu x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b, \mu \in \mathbb{C}.$$

Le flot de  $\chi$  appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $b = 0$  auquel cas  $\phi_t$  est linéaire.

Les champs suivants s'intègrent et donnent des flots transcendants (exercice).

**Lemme 2.54.** — *Si  $\mu$  est non nul, le champ*

$$\chi = \frac{\mu x_1^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

n'est pas rationnellement intégrable.

Par intégration directe on montre l'énoncé suivant (exercice).

**Lemme 2.55.** — *Le champ*

$$\chi = \frac{bx_0}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \neq 0$$

a son flot dans  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $b = 1$ , resp.  $b = -1$  auquel cas on a

$$\phi_t = \left( \frac{x_0(x_1 + 1)e^t}{(e^t x_1 + 1)}, e^t x_1 \right), \quad \text{resp. } \phi_t = \left( \frac{x_0(e^t x_1 + 1)}{(x_1 + 1)e^t}, e^t x_1 \right).$$

**Remarques 2.56.** — *i.* Lorsque  $\phi_t = \left( \frac{x_0(x_1 + 1)e^t}{(e^t x_1 + 1)}, e^t x_1 \right)$  on constate que

$$\phi_t = \text{id} \in \Sigma^0, \forall t \in 2i\pi\mathbb{Z}; \quad \phi_t \in \Sigma^2, \forall t \notin 2i\pi\mathbb{Z}.$$

*ii.* Les flots

$$\left( \frac{x_0(x_1 + 1)e^t}{(e^t x_1 + 1)}, e^t x_1 \right) \quad \text{et} \quad \left( \frac{x_0(e^t x_1 + 1)}{(x_1 + 1)e^t}, e^t x_1 \right)$$

sont conjugués via  $(1/x_0, x_1)$  qui est dans  $\text{Bir}_2$ .

**Lemme 2.57.** — *Soit  $\chi$  le champ défini par*

$$\frac{bx_0 + \mu x_1^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

Le flot de  $\chi$  est dans  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $b$  vaut 1 auquel cas on a

$$\phi_t = \left( \frac{x_0 + x_0 x_1 - \mu x_1^2 + \mu x_1^2 e^t}{e^t x_1 + 1} e^t, e^t x_1 \right).$$

*Démonstration.* — Si  $\chi$  admet une symétrie forte  $Y$ , on peut supposer (Remarque 2.19) qu'elle est de la forme  $\frac{Q(x_0, x_1)}{Cx_1 + D} \frac{\partial}{\partial x_0}$  où  $Q$  désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et  $C, D$  deux complexes non tous deux nuls. On peut trouver un tel champ  $Y$  si et seulement si  $b = \pm 1$ . Si  $b = 1$ , le calcul du flot est immédiat.

Lorsque  $b$  vaut  $-1$ , le flot  $\phi_t$  est du type

$$\left( (x_1 + e^{-t}) \left( \mu e^t - \frac{\mu}{x_1(e^t x_1 + 1)} - \mu + \frac{x_0 x_1 + \mu}{x_1(x_1 + 1)} + \frac{2\mu}{x_1} \ln \left( \frac{x_1 + 1}{e^t x_1 + 1} \right) \right), e^t x_1 \right);$$

le champ  $\chi$  n'est donc pas rationnellement intégrable.

Supposons que  $b^2 \neq 1$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  est décrit dans la carte  $x_1 = 1$  par la 1-forme

$$((b-1)x_0 x_2 + \mu - x_0) dx_2 + x_2(1 + x_2) dx_0.$$

Le 1-jet au point singulier  $(\mu, 0)$  est du type

$$x_2 dx_0 + (-x_0 + (b-1)\mu x_2) dx_2.$$

Par un argument analogue à celui utilisé dans le Lemme 2.48 on obtient que  $\mathcal{F}_\chi$  n'a pas d'intégrale première rationnelle. Le Théorème 2.18 assure alors que le flot de  $\chi$  n'est pas birationnel quadratique.  $\square$

**Lemme 2.58.** — *Le flot du champ*

$$\frac{x_0 + x_1 + \mu x_1^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

est de la forme

$$\left( \frac{(x_1(t + \mu e^t x_1) + x_0(x_1 + 1) - \mu x_1^2) e^t}{e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right).$$

**Lemme 2.59.** — *Le flot du champ*

$$\chi = (ax_0 x_1 + bx_0 + \mu) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad a \in \mathbb{C}^*, b, \mu \in \mathbb{C},$$

n'est pas birationnel.

*Démonstration.* — En utilisant la Remarque 2.19 on peut montrer que  $\chi$  admet une symétrie forte si et seulement si  $b$  vaut  $-1$  ou  $\mu = 0$ .

Si  $\mu = 0$  ou  $b = -1$ , l'intégration est immédiate ; on obtient respectivement

$$\phi_t = (x_0 e^{-ax_1} e^{ae^t x_1 + bt}, e^t x_1)$$

et

$$\phi_t = \left( -\frac{\mu}{ax_1} e^{-t} + \frac{ax_0 x_1 + \mu}{ax_1} e^{-ax_1} e^{ae^t x_1 - t}, e^t x_1 \right).$$

Dans les deux cas le champ  $\chi$  n'est pas rationnellement intégrable.

Supposons  $\mu \neq 0$  et  $b \neq -1$ . Le feuilletage est défini par la 1-forme

$$\omega_\chi = (ax_0 x_1 + bx_0 + \mu) dx_1 - x_1 dx_0.$$

Quitte à changer  $x_0$  en  $1/x_0$  et  $x_1$  en  $1/x_1$ , la forme  $\omega_\chi$  s'écrit

$$(ax_0 + bx_0x_1 + \mu x^2x_1) dx_1 - x_1^2 dx_0;$$

au point  $(0,0)$  la singularité est de type nœud-col et  $\mathcal{F}_\chi$  n'admet pas d'intégrale première rationnelle. En particulier  $\chi$  ne peut être rationnellement intégrable.  $\square$

La preuve de l'énoncé qui suit se fait par un calcul direct (exercice).

**Lemme 2.60.** — On désigne par  $\chi$  le champ

$$\frac{ax_0x_1 + \mu}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad a \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

Si  $a \neq -1$ , resp.  $a = -1$ , alors à conjugaison linéaire près

$$\phi_t = \left( \left( x_0 + \frac{(1 - e^{-(a+1)t})}{(a+1)x_1} \right) e^{at}, e^t x_1 \right), \quad \text{resp. } \phi_t = \left( \left( \frac{t}{x_1} + x_0 \right) e^{-t}, e^t x_1 \right).$$

Les deux flots précédents sont dans  $\text{Bir}_2$ .

Comme souvent c'est encore la technique symétrie/nœud-col qui s'avère efficace ici :

**Lemme 2.61.** — Le flot de

$$\chi = \frac{ax_0x_1 + bx_0 + \mu}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \in \mathbb{C}^*, a, \mu \in \mathbb{C},$$

n'appartient pas à  $\text{Bir}_2$ .

Parmi les champs qu'il reste à étudier il y a la famille

$$\chi = \frac{bx_0 + \mu}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b, \mu \in \mathbb{C}.$$

Si  $b$  est non nul, alors, à translation près, on peut supposer  $\mu$  nul, cas déjà traité (Lemme 2.55).

Le champ

$$\chi = \frac{\mu}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

est rationnellement intégrable si et seulement si  $\mu$  est nul ; dans ce cas,  $\phi_t$  est linéaire.

Pour le résultat qui suit on utilise les techniques de dégénérescence et de symétrie/nœud-col ; nous mentionnons le plan de la preuve.

**Lemme 2.62.** — Soit  $\chi$  le champ défini par

$$\frac{ax_0x_1 + bx_0 + \mu}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad a \in \mathbb{C}^*, b, \mu \in \mathbb{C}.$$

Si  $\mu$  est nul,  $\phi_t$  appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $a - b$  prend les valeurs  $-1, 0$  ou  $1$ .

Lorsque  $a - b$  appartient à  $\{-1, 0, 1\}$ , on obtient respectivement :

$$\phi_t = \left( \frac{e^{bt} x_0 (x_1 + 1)}{e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right), \quad \phi_t = \left( x_0 e^{bt}, e^t x_1 \right), \quad \phi_t = \left( \frac{e^{bt} x_0 (e^t x_1 + 1)}{x_1 + 1}, e^t x_1 \right).$$

Si  $\mu$  est non nul, le flot de  $\chi$  est birationnel si et seulement si  $a - b = -1$  auquel cas

$$\begin{aligned}\phi_t &= \left( \frac{bx_0(x_1 + 1) + \mu - \mu e^{-bt}}{b(e^t x_1 + 1)} e^{bt}, e^t x_1 \right) && \text{si } b \neq 0; \\ \phi_t &= \left( \frac{x_0(x_1 + 1) + \mu t}{e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right) && \text{sinon.}\end{aligned}$$

*Démonstration.* — En conjuguant  $\chi$  par  $(x_0/\varepsilon, x_1)$ , on obtient

$$\chi_\varepsilon = \frac{ax_0 x_1 + bx_0 + \varepsilon \mu}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1};$$

notons  $\psi_t^\varepsilon$  le flot de  $\chi_\varepsilon$ . La limite de  $\psi_t^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, *i.e.* le flot de

$$\chi_0 = \frac{ax_0 x_1 + bx_0}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

est birationnel si  $\phi_t$  l'est. Or le flot de  $\chi_0$  est

$$\left( \frac{e^{bt}(e^t x_1 + 1)^{a-b} x_0}{(x_1 + 1)^{a-b}}, x_1 e^t \right);$$

il est dans  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $a - b$  prend les valeurs  $-1, 0$  ou  $1$ . On doit donc étudier ces trois possibilités. Notons que,  $\chi_0$  correspondant au cas  $\mu = 0$ , on peut dans la suite supposer  $\mu$  non nul.

*i.* Considérons le cas où  $a = b$ ; nous allons montrer que  $\chi$  n'est pas rationnellement intégrable. En utilisant la Remarque 2.19, on montre que  $\chi$  a des symétries fortes si et seulement si

$$(a, b) = (1, 1), \quad (a, b) = (2, 2), \quad (a, b) = (-1, -1).$$

– Si  $a = b = 1$ , le flot est

$$\left( e^t(x_0 + \mu) - e^t \mu x_1 t - \mu + \mu x_1 e^t \ln \left( \frac{e^t x_1 + 1}{x_1 + 1} \right), e^t x_1 \right)$$

qui n'est pas birationnel.

– Lorsque  $a = b = 2$ , on obtient le flot transcendant

$$\phi_t = \left( e^{2t} \mu x_1^2 \left( t + \ln \left( \frac{x_1 + 1}{e^t x_1 + 1} \right) \right) + e^t \mu x_1 + e^{2t} \left( x_0 - \mu x_1 + \frac{\mu}{2} \right) - \frac{\mu}{2}, e^t x_1 \right).$$

– Pour  $a = b = -1$  on a un phénomène analogue

$$\phi_t = \left( e^{-t} \left( x_0 + \frac{\mu}{x_1} \ln \left( \frac{e^t x_1 + 1}{x_1 + 1} \right) \right), e^t x_1 \right).$$

– Supposons désormais que  $a$  soit distinct de  $1, 2$  et  $-1$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  n'admet pas d'intégrale première rationnelle. En effet  $\mathcal{F}_\chi$  est décrit par

$$\omega_\chi = (ax_0(x_1 + 1) + \mu) dx_1 - x_1(x_1 + 1) dx_0;$$

quitte à changer  $x_0$  en  $1/x_0$ , on obtient  $\omega_\chi = x_0(a(x_1 + 1) + \mu x_0) dx_1 + x_1(x_1 + 1) dx_0$  soit à translation en  $x_1$  près  $(ax_1 + \mu x_0)x_0 dx_1 + x_1(x_1 - 1) dx_0$ . Au point  $(0, 0)$  la singularité est de type nœud-col,  $\mathcal{F}_\chi$  n'a donc pas d'intégrale première rationnelle. Le Théorème 2.18 permet de conclure.

**ii.** Envisageons l'éventualité suivante :  $a - b = 1$ . On va encore appliquer le Théorème 2.18. En utilisant la Remarque 2.19 on constate que  $\chi$  a des symétries fortes si et seulement si  $b = 0$  ou 1. Dans chacun de ces cas, le flot s'écrit respectivement

$$\left( (e^t x_1 + 1) \left( \mu t + \frac{\mu}{e^t x_1 + 1} + \mu \ln \left( \frac{x_1 + 1}{e^t x_1 + 1} \right) + \frac{x_0 - \mu}{x_1 + 1} \right), e^t x_1 \right),$$

$$\left( e^t (e^t x_1 + 1) \left( 2\mu x_1 \ln \left( \frac{e^t x_1 + 1}{x_1 + 1} \right) - 2\mu x_1 t - \frac{\mu x_1}{e^t x_1 + 1} - \frac{\mu}{e^t} + \frac{x_0 + 2\mu x_1 + \mu}{x_1 + 1} \right), e^t x_1 \right),$$

aucun des deux n'étant rationnellement intégrable.

Supposons que  $b$  soit distinct de 0 et 1. Le feuilletage  $\mathcal{F}_\chi$  est décrit par la 1-forme

$$((b + 1)x_0 x_1 + b x_0 + \mu) dx_1 - x_1(x_1 + 1) dx_0;$$

en reprenant l'argument du Lemme 2.48 au point  $(\mu, -1)$  et en utilisant le fait que  $\mu(b + 1) \neq 0$  on montre que  $\mathcal{F}_\chi$  n'a pas d'intégrale première rationnelle.

**iii.** Pour finir lorsque  $a - b = -1$  un calcul direct permet d'obtenir le flot. □

Par calcul direct (exercice) on obtient le :

**Lemme 2.63.** — Le flot du champ  $\chi = \frac{x_0 x_1}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ , avec  $b$  dans  $\mathbb{C}$ , est donné par

$$\left( \frac{x_0 (e^t x_1 + b)}{x_1 + b}, e^t x_1 \right).$$

Le champ

$$\frac{x_0 x_1 + x_1^2}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \in \mathbb{C}$$

n'est pas rationnellement intégrable.

Nous mentionnons la preuve de l'énoncé suivant car elle fait apparaître des flots intéressants.

**Lemme 2.64.** — Le flot du champ

$$\chi = \frac{x_0 x_1 + x_0}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

est dans  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $b = \frac{1}{2}$  auquel cas

$$\phi_t = \left( x_0 e^{2t} \left( \frac{x_1 + 1/2}{e^t x_1 + 1/2} \right), e^t x_1 \right).$$

**Remarque 2.65.** — Pour  $b = 1$  le champ  $\chi$  est linéaire.

*Démonstration.* — En effet par calcul direct on obtient :

– lorsque  $b = 0$  le flot s'écrit

$$\left( e^t x_0 \exp\left(\frac{tx_1 - e^{-t}}{x_1}\right) \exp\left(\frac{1 - e^{-t}}{x_1}\right), e^t x_1 \right)$$

et n'est pas rationnellement intégrable ;

– lorsque  $b \neq 0$  on a

$$\phi_t = \left( x_0 e^{t/b} \left( \frac{e^t x_1 + b}{x_1 + b} \right)^{1-1/b}, e^t x_1 \right).$$

□

**Remarque 2.66.** — Le premier flot est global en  $t$ , transcendant et holomorphe dans le complément de  $x_1 = 0$ . Les seconds sont birationnels pour  $1/b$  entier.

**Lemme 2.67.** — *Le flot du champ*

$$\chi = \frac{x_0 x_1 + x_0 + x_1^2}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b \in \mathbb{C}$$

appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $b = \frac{1}{2}$  auquel cas

$$\phi_t = \left( \frac{(2tx_1^2 + x_0(2x_1 + 1))e^{2t}}{2e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right).$$

*Démonstration.* — Le champ

$$\frac{x_0 x_1 + x_0 + x_1^2}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

est linéairement conjugué à

$$X_\varepsilon = \frac{x_0 x_1 + x_0 + \varepsilon x_1^2}{x_1 + b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \varepsilon \neq 0.$$

Or d'après le Lemme 2.64 le flot de  $X_0$  appartient à  $\text{Bir}_2$  si et seulement si  $b = \frac{1}{2}$ ; ainsi par dégénérescence pour que le flot de  $\chi$  soit birationnel quadratique il faut que  $b = \frac{1}{2}$ . Par intégration directe on obtient pour  $b = \frac{1}{2}$  le flot annoncé. □

**Remarque 2.68.** — On constate que

$$\phi_t = \left( \frac{(2tx_1^2 + x_0(2x_1 + 1))e^{2t}}{2e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right)$$

vérifie

$$\phi_0 = \text{id}, \quad \phi_t \in \Sigma^1 \quad \forall t \in 2i\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \phi_t \in \Sigma^2 \quad \forall t \notin 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Pour finir on a le :

**Lemme 2.69.** — *Le champ*

$$\chi = \frac{x_0 x_1 + x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

est rationnellement intégrable si et seulement si  $p_1 = p_2$  auquel cas il est linéaire.

*Démonstration.* — Un calcul montre que le flot de  $\chi$  s'écrit

$$\phi_t = \left( x_0 + p_1 t x_1 + (p_2 - p_1) x_1 \ln \left( \frac{e^t x_1 + 1}{x_1 + 1} \right), e^t x_1 \right).$$

□

#### 2.2.4. Récapitulatif. —

Rappelons qu'à conjugaison linéaire près les champs linéaires et leurs flots sont en carte affine du type suivant :

| champ de vecteurs   | flot associé                                     |
|---|--|
| $\frac{\partial}{\partial x_1}$   | $(x_0, x_1 + t)$                                 |
| $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                           | $(x_0 e^t, x_1 + t)$                             |
| $(x_1 + 1) \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$          | $(x_0 + x_1(e^t - 1) + t, e^{\alpha t} x_1)$     |
| $\alpha_1 x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$     | $(x_0 e^{\alpha_1 t}, x_1 e^{\alpha_2 t})$       |
| $(\alpha x_0 + x_1) \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $((x_0 + t x_1) e^{\alpha t}, x_1 e^{\alpha t})$ |
| $x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                           | $(x_0 + t x_1 + \frac{t^2}{2}, x_1 + t)$         |

On dit que le flot  $\phi_t$  appartient à  $\Sigma^i$  si c'est le cas pour  $t$  générique. Lorsque la seconde composante du flot est du type homothétie nous avons, pour simplifier la présentation, fait une renormalisation dans le temps de sorte que la seconde composante du générateur infinitésimal  $\chi$  soit  $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  (ceci revient à considérer les champs  $\chi$  à multiplication près par une constante). Les tableaux qui suivent donnent la liste des flots dans  $\text{Bir}_2$ ; pour chaque flot sont mentionnés le générateur infinitésimal, une symétrie forte et une intégrale première. Leur lecture doit donc être comprise à automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  et renormalisation près ; au niveau des champs  $\chi$  cela se traduit par une lecture à conjugaison linéaire près et multiplication scalaire près.

Dans ce qui suit certaines valeurs des paramètres produisent des flots linéaires ; nous ne les avons pas mentionnées.

|            | champ de vecteurs   | flot associé   | symétrie forte   | IP  |
|------------|---|--|--|---|
| $\Sigma^1$ | $\frac{P(x_1)}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$  | $(x_0 + t \frac{P(x_1)}{x_1}, x_1)$  | $\frac{\partial}{\partial x_0}$  | $x_1$   |
|            | $\frac{\alpha x_0 x_1 + 1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$                                      | $(-\frac{1}{\alpha x_1} + e^{\alpha t} (x_0 + \frac{1}{\alpha x_1}), x_1)$ | $\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$             | $x_1$   |
|            | $(\alpha x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0}, \alpha \neq 0$                                 | $(x_0 e^{\alpha t} + \frac{x_1^2}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1), x_1)$        | $-2x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}$                         | $x_1$   |
|            | $(\alpha + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0}$  | $(x_0 + t(\alpha + x_1^2), x_1)$   | $\frac{\partial}{\partial x_0}$  | $x_1$   |
|            | $(\alpha x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \neq 0$ | $\psi_t$   | $(1 + \alpha x_1 + \frac{\alpha^2 x_1^2}{2} + \frac{\alpha^3 x_0}{2}) \frac{\partial}{\partial x_0}$ | $(x_0 + \frac{2}{\alpha^3} + \frac{2x_1}{\alpha^2} + \frac{x_1^2}{\alpha}) e^{-\alpha x_1}$ |
|            | $(\alpha + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                    | $(x_0 + t(\alpha + x_1^2) + t^2 x_1 + \frac{t^3}{3}, x_1 + t)$             | $\frac{\partial}{\partial x_0}$  | $\alpha x_1 + \frac{x_1^3}{3} - x_0$  |
|            | $(1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$                    | $(x_0 - \frac{x_1^2}{2} + t + \frac{x_1^2 e^{2t}}{2}, e^t x_1)$            | $\frac{\partial}{\partial x_0}$  | $x_1 \exp(\frac{x_1^2}{2} - x_0)$   |
|            | $\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$                  | $(x_0 + \frac{1}{x_1} - \frac{e^{-t}}{x_1}, e^t x_1)$                      | $\frac{\partial}{\partial x_0}$  | $-\frac{1}{x_1} - x_0$  |

avec  $\psi_t = (x_0 e^{\alpha t} + (\frac{2}{\alpha^3} + \frac{2x_1}{\alpha^2} + \frac{x_1^2}{\alpha})(e^{\alpha t} - 1) - (\frac{2x_1 t}{\alpha} + \frac{t^2}{\alpha} + \frac{2t}{\alpha^2}), x_1 + t)$

|            | champ de vecteurs  | flot associé   | symétrie forte  | IP   |
|------------|--|--|---|--|
| $\Sigma^1$ | $\frac{1+x_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$                             | $\left(x_0 + \frac{1}{x_1} + t - \frac{e^{-t}}{x_1}, e^t x_1\right)$                               | $\frac{\partial}{\partial x_0}$                                 | $x_1 \exp\left(-\frac{1}{x_1} - x_0\right)$        |
|            | $\frac{\alpha x_0 x_1 + 1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \neq -1$ | $\left(\left(x_0 + \frac{(1-e^{-(\alpha+1)t})}{(\alpha+1)x_1}\right) e^{\alpha t}, e^t x_1\right)$ | $\frac{1+(1+\alpha)x_0 x_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$ | $\frac{x_1^{1+\alpha}}{1+(1+\alpha)x_0 x_1}$       |
|            | $\frac{1-x_0 x_1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                          | $\left(\left(\frac{t}{x_1} + x_0\right) e^{-t}, e^t x_1\right)$                                    | $\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$                   | $x_1 e^{-x_0 x_1}$                                 |
|            | $(1+x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$                                     | $(x_0 + t + \frac{x_1^2}{2}(e^{2t} - 1), x_1 e^t)$   | $\frac{\partial}{\partial x_0}$                                 | $x_1 \exp\left(\frac{x_1^2}{2} - x_0\right)$       |
|            | $x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$   | $(x_0 + \frac{x_1^2}{2}(e^{2t} - 1), x_1 e^t)$   | $\frac{\partial}{\partial x_0}$                                 | $\frac{x_1^2}{2} - x_0$                            |
|            | $(\alpha x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \notin \{1, 2\}$   | $(x_0 e^{\alpha t} + \frac{x_1^2}{2-\alpha}(e^{2t} - e^{\alpha t}), x_1 e^t)$                      | $(x_1^2 + (\alpha - 2)x_0) \frac{\partial}{\partial x_0}$       | $\frac{x_1^\alpha}{x_1^2 + (\alpha - 2)x_0}$       |
|            | $(x_0 + x_1 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$                           | $(x_0 e^t + x_1 t e^t + x_1^2(e^{2t} - e^t), x_1 e^t)$   | $x_1 \frac{\partial}{\partial x_0}$                             | $x_1 \exp\left(x_1 - \frac{x_0}{x_1}\right)$       |
|            | $(x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$                                 | $(x_0 e^t + x_1^2(e^{2t} - e^t), x_1 e^t)$   | $x_1 \frac{\partial}{\partial x_0}$                             | $x_1 - \frac{x_0}{x_1}$                            |
|            | $(2x_0 + x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                                 | $(x_0 e^{2t} + x_1^2 t e^{2t}, x_1 e^t)$   | $x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_0}$                           | $\frac{1}{x_1} \exp\left(\frac{x_0}{x_1^2}\right)$ |

|            | champ de vecteurs   | flot associé   | symétrie forte                                    | IP   |
|------------|---|--|---|--|
| $\Sigma^2$ | $x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0}$   | $\left( \frac{x_0}{1-tx_0}, x_1 \right)$   | $\frac{x_0^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$ | $x_1$  |
|            | $\frac{x_0^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$   | $\left( \frac{x_0 x_1}{x_1 - tx_0}, x_1 \right)$   | $x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0}$             | $x_1$  |
|            | $\frac{-x_0}{x_1+1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                  | $\left( \frac{x_0(e^t x_1 + 1)}{(x_1 + 1)e^t}, e^t x_1 \right)$  | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$               | $\frac{x_0 x_1}{x_1 + 1}$                            |
|            | $-\frac{x_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                        | $\left( \frac{x_0 x_1}{x_1 + t}, x_1 + t \right)$  | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$               | $x_0 x_1$  |
|            | $\frac{x_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                         | $\left( \frac{x_0}{x_1} (x_1 + t), x_1 + t \right)$  | $(x_0 + x_1) \frac{\partial}{\partial x_0}$       | $\frac{x_0}{x_1}$                                    |
|            | $\frac{x_0 + x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                 | $\left( x_0 + \frac{x_0 t}{x_1} + t^2 + x_1 t, x_1 + t \right)$  | $x_1 \frac{\partial}{\partial x_0}$               | $x_1 - \frac{x_0}{x_1}$                              |
|            | $\frac{x_1^2 - x_0}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                 | $\left( \frac{x_1^2 t + x_1 t^2 + x_0 x_1 + t^3 / 3}{x_1 + t}, x_1 + t \right)$                            | $\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$     | $\frac{x_1^3}{3} - x_0 x_1$                          |
|            | $x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                                   | $\left( \frac{x_0}{1-tx_0}, x_1 + t \right)$   | $\frac{\partial}{\partial x_1}$                   | $x_1 + \frac{1}{x_0}$                                |
|            | $\frac{\alpha^2 x_0 x_1}{\alpha x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $\left( x_0 e^{\alpha t} \left( \frac{\alpha x_1 + 1}{\alpha x_1 + \alpha t + 1} \right), x_1 + t \right)$ | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$               | $\frac{e^{\alpha x_1}}{x_0 (\alpha x_1 + 1)}$        |
|            | $\frac{\alpha^2 x_0 x_1}{\alpha x_1 - 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $\left( x_0 e^{\alpha t} \left( \frac{\alpha x_1 + \alpha t - 1}{\alpha x_1 - 1} \right), x_1 + t \right)$ | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$               | $\frac{(\alpha x_1 - 1) e^{\alpha x_1}}{\alpha x_0}$ |

|   | champ de vecteurs  | flot associé   | symétrie forte  | IP   |
|---|--|--|---|--|
| $\Sigma^2$  | $(x_0^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \neq 0$  | $\left( \frac{\alpha(e^{-2\alpha t} + 1)x_0 + \alpha^2(e^{-2\alpha t} - 1)}{(e^{-2\alpha t} - 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} + 1)}, x_1 + t \right)$  | $\frac{\partial}{\partial x_1}$   | $e^{2\alpha x_1} \left( \frac{x_0 + \alpha}{x_0 - \alpha} \right)$ |
|   | $\frac{\alpha^2 x_0 x_1 + \alpha}{\alpha x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$                                 | $\left( \left( x_0 \left( x_1 + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha x_1 + 1 + \alpha t}, x_1 + t \right)$ | $\frac{1 + x_0 + \alpha x_0 x_1}{1 + \alpha x_1} \frac{\partial}{\partial x_0}$ | $e^{-\alpha x_1} (1 + x_0 + \alpha x_0 x_1)$                       |
|   | $\frac{(\alpha + 1)x_0 x_1 + \alpha x_0}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                             | $\left( \frac{(e^t x_1 + 1)e^{\alpha t}}{x_1 + 1} x_0, e^t x_1 \right)$  | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$   | $\frac{x_1^\alpha (x_1 + 1)}{x_0}$                                 |
|   | $\frac{x_0}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  | $\left( \frac{x_0(x_1 + 1)e^t}{(e^t x_1 + 1)}, e^t x_1 \right)$  | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$   | $\frac{x_1}{x_0(x_1 + 1)}$   |
|   | $\frac{x_0^2 - 1/4}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  | $\left( \frac{e^t(4x_0 x_1 + 2x_0 - 1) + 2x_0 + 1}{2(e^t(2x_1 + 1 - 2x_0) + 1 + 2x_0)}, e^t x_1 \right)$   | $(1 - 4x_0^2) \frac{\partial}{\partial x_0}$                                    | $\frac{x_1(1 + 2x_0)}{(x_1 + 1)(1 - 2x_0)}$                        |
|   | $\frac{x_0^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  | $\left( \frac{x_0 x_1}{x_1 - x_0 + e^{-t} x_0}, e^t x_1 \right)$   | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$         | $\frac{x_0 x_1}{x_1 - x_0}$  |
|   | $(x_0^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \neq 0$  | $\left( \alpha \frac{(e^{-2\alpha t} + 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} - 1)}{(e^{-2\alpha t} - 1)x_0 + \alpha(e^{-2\alpha t} + 1)}, e^t x_1 \right)$   | $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$   | $x_1^{2\alpha} \left( \frac{x_0 + \alpha}{x_0 - \alpha} \right)$   |
|   | $x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  | $\left( \frac{x_0}{1 - t x_0}, e^t x_1 \right)$  | $x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0}$   | $x_1 \exp\left(\frac{1}{x_0}\right)$                               |
|   | $\frac{\alpha - x_0 x_1}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$  | $\left( \frac{\alpha + x_0(x_1 + 1)}{e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right)$  | $\frac{1}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0}$                               | $\frac{\exp(x_0(x_1 + 1))}{x_1^\alpha}$                            |
|   | $\frac{(\beta - 1)x_0 x_1 + \beta x_0 + \alpha}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \beta \neq 0$ | $\left( \frac{\beta x_0(x_1 + 1) + \alpha - \alpha e^{-\beta t}}{\beta(e^t x_1 + 1)} e^{\beta t}, e^t x_1 \right)$   | $\frac{\alpha/\beta + x_0 + x_0 x_1}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0}$    | $\frac{\alpha + \beta x_0 + \beta x_0 x_1}{x_1^\beta}$             |
| $\frac{x_0}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $\left( \frac{x_0 + x_0 x_1}{e^t x_1 + 1}, e^t x_1 \right)$  | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$  | $\frac{(x_1 + 1)x_0}{x_1}$  |  |

|   | champ de vecteurs  | flot associé   | symétrie forte  | IP   |
|---|--|--|---|--|
| $\Sigma^2$  | $\frac{x_0+x_1^2}{x_1+1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  | $\left( \frac{x_0+x_0x_1-x_1^2+x_1^2e^t}{e^t x_1+1} e^t, e^t x_1 \right)$                | $(x_0 - x_1) \frac{\partial}{\partial x_0}$                             | $\frac{(x_1+1)(x_0-x_1)}{x_1}$   |
|   | $\frac{x_0^2+\beta x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \beta \notin \{0, \frac{1}{4}\}$ | $\Psi_t$   | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $x_1 \left( \frac{\sqrt{4\beta-1-i} \left( \frac{2\beta x_1}{x_0} - 1 \right)}{\sqrt{4\beta-1+i} \left( \frac{2\beta x_1}{x_0} - 1 \right)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{4\beta-1}}}$ |
|   | $\frac{x_0^2+\frac{x_1^2}{4}}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                              | $\left( \frac{e^t x_1 (2tx_0 - 4x_0 - tx_1)}{2(2tx_0 - tx_1 - 2x_1)}, e^t x_1 \right)$   | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $x_1 \exp\left(\frac{4x_0}{2x_0-x_1}\right)$   |
|   | $\frac{x_0+x_1+\mu x_1^2}{x_1+1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                                | $\left( \frac{(x_1(t+\mu e^t x_1)+x_0(x_1+1)-\mu x_1^2)e^t}{e^t x_1+1}, e^t x_1 \right)$ | $\frac{x_1}{x_1+1} \frac{\partial}{\partial x_0}$                       | $x_1 \exp\left(\frac{\mu x_1^2 - x_0 - x_0 x_1}{x_1}\right)$   |
|   | $\frac{x_0 x_1}{x_1+b} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  | $\left( \frac{x_0(e^t x_1+b)}{x_1+b}, e^t x_1 \right)$                                   | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$                                     | $\frac{x_1+b}{x_0}$  |
|   | $\frac{x_0 x_1+x_0}{x_1+1/2} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$                                    | $\left( x_0 e^{2t} \left( \frac{x_1+1/2}{e^t x_1+1/2} \right), e^t x_1 \right)$          | $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$                                     | $\frac{x_0(x_1+\frac{1}{2})}{x_1^2}$   |
| $\frac{x_0 x_1+x_0+x_1^2}{x_1+1/2} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $\left( \frac{(2tx_1^2+x_0(2x_1+1))e^{2t}}{2e^t x_1+1}, e^t x_1 \right)$   | $\frac{x_1^2}{2x_1+1} \frac{\partial}{\partial x_0}$                                     | $\frac{1}{x_1^2} \exp\left(\frac{(2x_1+1)x_0}{x_1^2}\right)$            |  |

avec  $\Psi_t = \left( -\frac{e^{-(1+\alpha)t/2} (x_0(1+\alpha) - 2\beta x_1) + e^{((\alpha-1)t/2) (x_0(\alpha-1) + 2\beta x_1)}}{e^{-(1+\alpha)t/2} (x_1(1-\alpha) - 2x_0) + e^{((\alpha-1)t/2) (2x_0 - x_1(1+\alpha))}} x_1 e^t, x_1 e^t \right)$  et  $\alpha = \sqrt{1-4\beta}$

|            | champ de vecteurs   | flot associé   | symétrie forte   | IP   |
|------------|---|--|--|--|
| $\Sigma^3$ | $\frac{x_0^2 - \frac{1}{4}}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$ $\frac{x_0^2 - 1/4 + \alpha x_1^2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \neq 0$ $\frac{x_0^2 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_1^2}{4}}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ $\frac{x_0^2 - \frac{1}{4} + \alpha(x_1 + 1)^2}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$ $\alpha \notin \{0, \frac{1}{4}\}$ | $\left( \frac{(t+2x_1)x_0 - \frac{t}{2}}{-2tx_0 + t + 2x_1}, x_1 + t \right)$ $\Psi_t$ $\left( \frac{2e^t tx_0 x_1 - e^t tx_1^2 - 4e^t x_0 x_1 - 2e^t x_1 - 4x_0 + 2x_1}{2(-2x_1 - 2 + 2tx_0 - tx_1)}, e^t x_1 \right)$ $\tilde{\Psi}$ | $\left(x_0^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\partial}{\partial x_0}$ $\frac{x_0 - 1/2}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}$ $\frac{-x_0^2 - \frac{x_1^2}{4} + x_0 x_1}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0}$ $\frac{(x_0 + \frac{1}{2})x_1}{x_1 + 1} \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ | $\frac{2x_0 - 1}{x_1(2x_0 + 1)}$ $\frac{2x_0 - 1 + 2i\sqrt{\alpha}x_1}{2x_0 - 1 - 2i\sqrt{\alpha}x_1} \exp(2i\sqrt{\alpha}x_1)$ $x_1 \exp\left(\frac{2(x_1 + 1)}{2x_0 - x_1}\right)$ $\frac{2\beta(x_1 + 1) - i(2x_0 - x_1)}{2\beta(x_1 + 1) + i(2x_0 - x_1)} x_1^{2i\beta},$ $\beta = \sqrt{4\alpha - 1}/2$ |

avec

$$\Psi_t = \left( \frac{2\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}t)(2tx_0 - t + 2x_1x_0) + \sin(\sqrt{\alpha}t)(1 - 2x_0 + 4\alpha x_1 + 4\alpha x_1^2)}{2(2x_1\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}t) + \sin(\sqrt{\alpha}t)(1 - 2x_0))}, x_1 + t \right),$$

$$\tilde{\Psi}_t = \left( \frac{\sin(\beta t)(e^t x_1(x_1 - 2x_0) + 4\beta^2(x_1 + 1)(e^t x_1 + 1)) + 2\beta \cos(\beta t)((e^t - 1)x_1 + 2(e^t x_1 + 1)x_0)}{2(2\beta \cos(\beta t)(x_1 + 1) + \sin(\beta t)(x_1 - 2x_0))}, e^t x_1 \right),$$

$$\beta = \sqrt{4\alpha - 1}/2.$$

L'examen au cas par cas de tous les modèles de flots birationnels quadratiques (*cf.* tableaux) montre que la dimension de l'espace des symétries fortes est supérieure ou égale à 2. Nous pouvons donc maintenant préciser l'énoncé 2.18 :

**Théorème 2.70.** — *Soit  $\phi_t$  un flot birationnel quadratique de générateur infinitésimal  $\chi$ . On a l'inégalité  $\dim G(\chi) \geq 2$ .*

Dans un contexte complètement différent (celui des applications birationnelles de degré dynamique strictement supérieur à 1) CANTAT et FAVRE démontrent qu'une transformation birationnelle qui préserve un feuilletage en préserve un deuxième distinct ([23]).

**Remarques 2.71.** — *i.* Ceci généralise le fait suivant : les groupes abéliens maximaux de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  sont de dimension 2.

*ii.* Il y a des exemples où  $\dim G(\chi) \geq 3$ , par exemple pour  $\chi = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_0}$ .

*iii.* L'éventualité *i.* du Théorème 2.18 ne se présente donc pas. Toutefois l'alternative a été utilisée dans les preuves.

**Remarque 2.72.** — On constate en fait a posteriori que si  $\phi_t$  est un germe de flot, alors pour  $(x_0, x_1)$  générique fixé, l'application  $t \mapsto \phi_t(x_0, x_1)$  est une fonction méromorphe globale.

**Remarque 2.73.** — On vérifie sur chaque exemple que si  $m_t$  est un point d'indétermination mobile, alors  $m_t$  paramètre une feuille de  $\mathcal{F}_\chi$ . En fait soit  $\mathcal{D}_0$  une droite telle que  $\phi_{-t}(\mathcal{D}_0) = m_t$  et fixons une valeur  $t_0$  de  $t$ ; on a  $m_t = \phi_{-t}(\mathcal{D}_0) = \phi_{t_0-t}(m_0)$  ce qui confirme l'affirmation ci-dessus.

**Remarque 2.74.** — Les configurations de droites contractées et points éclatés qu'on a rencontrées sont les suivantes (chaque configuration est précisée avec un exemple) :

- une droite immobile, un point immobile :

$$((tx_2^2 + x_0x_1)e^{-t} : e^t x_1^2 : x_1x_2);$$

- une droite immobile, une droite mobile, deux points immobiles :

$$(x_0x_2 : x_1(x_2 - tx_0) : x_2(x_2 - tx_0));$$

- une droite immobile, une droite mobile, un point immobile, un point mobile :

$$(x_0x_1 : (x_1 + tx_2)^2 : x_2(x_1 + tx_2));$$

- une droite immobile, deux droites mobiles, deux points immobiles, un point mobile :

$$(e^t(4x_0x_1 + 2x_0x_2 - x_2^2) + x_2(2x_0 + x_2) : 2e^t x_1 P : 2x_2 P),$$

avec  $P = e^t(2x_1 + x_2 - 2x_0) + x_2 + 2x_0$ .

**Remarque 2.75.** — Soit  $f$  une transformation birationnelle quadratique non périodique telle que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , l'élément  $f^n$  soit encore dans  $\text{Bir}_2$ . Alors  $G = \overline{\langle f^n \rangle}^Z$  est un groupe algébrique abélien non dénombrable. Le groupe  $G$  a un nombre fini de composantes connexes. Comme dans un groupe de LIE abélien connexe l'application exponentielle est surjective, il y a un itéré  $f^l$  de  $f$  qui se plonge dans un flot ; par suite  $f^l$  préserve une fibration en droites.

**Problème.** L'adhérence dans  $\overline{\text{Bir}}_2$  de l'ensemble des flots birationnels quadratiques forme une variété algébrique singulière invariante sous l'action dynamique de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . On peut s'interroger sur la nature de cette variété.

**Problème.** Nous n'avons pas vérifié si la classification établie dans ce chapitre présente ou non des redondances. La façon dont on l'a effectuée tend plutôt à penser que non.

**Problème.** On peut aussi s'intéresser à la classification birationnelle des flots quadratiques ; les flots  $\varphi_t$  et  $\phi_t$  sont conjugués s'il existe une transformation birationnelle  $\psi$  (dont on ne précise pas le degré) telle que  $\psi\varphi_t = \phi_t\psi$ . Noter que la présence de droites contractées mobiles fait qu'il existe des flots quadratiques non birationnellement conjugués à des flots d'automorphismes.



## CHAPITRE 3

### TRANSFORMATIONS RATIONNELLES, FEUILLETAGES, CONJUGAISON DANS LES $\Sigma^i$

#### 3.1. Généralités

Un feuilletage de degré  $v$  sur  $\mathbb{P}^2$  est donné par une 1-forme différentielle homogène :

$$\omega = F_0 dx_0 + F_1 dx_1 + F_2 dx_2,$$

les  $F_i$  désignant des éléments de  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{v+1}$  satisfaisant

$$\text{pgcd}(F_0, F_1, F_2) = 1 \quad \text{et} \quad x_0 F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 = 0 \text{ (identité d'EULER).}$$

Le lieu singulier  $\text{Sing } \mathcal{F}_\omega$  du feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  associé à  $\omega$  est le projectivisé de

$$\text{Sing } \omega := \{F_0 = F_1 = F_2 = 0\}.$$

L'identité d'EULER montre que cet ensemble est toujours non vide ; plus précisément

$$\#\text{Sing } \mathcal{F}_\omega = v^2 + v + 1,$$

chaque point singulier étant compté avec multiplicité ([88]).

Le théorème de division de DE RHAM-SAITO ([88]) sous sa version la plus élémentaire implique l'existence de polynômes homogènes  $G_0, G_1$  et  $G_2$  de degré  $v$  tels que l'on ait avec des notations évidentes :

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}.$$

Évidemment les coefficients de la 2-forme  $d\omega$  produisent en fait directement ces  $G_i$ .

Une courbe  $C$  d'équation réduite  $h = 0$  est dite invariante par le feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  si la 2-forme  $\omega \wedge dh$  est divisible par  $h$ .

On note  $\mathcal{F}_v$  le projectivisé de l'espace vectoriel des formes  $\omega$  satisfaisant l'identité d'EULER :

$$\mathcal{F}_v = \mathbb{P}\{\omega = F_0 dx_0 + F_1 dx_1 + F_2 dx_2 \mid x_0 F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 = 0, \deg F_i = v + 1\}.$$

À chaque élément de  $\mathcal{F}_v$  on peut associer un feuilletage de degré inférieur ou égal à  $v$  défini par  $\frac{\omega}{\text{pgcd}(F_0, F_1, F_2)}$ . L'espace des feuilletages de degré inférieur ou égal à  $v$  est noté  $\mathcal{F}_v^\bullet$  ; les

feuilletages de degré précisément  $v$  correspondent aux formes  $\omega$  telles que  $\text{pgcd}(F_0, F_1, F_2) = 1$ . Il s'agit donc d'un ouvert de ZARISKI noté  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_v$ . L'application naturelle

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}}_v \mapsto \mathcal{F}_v^\bullet$$

est injective ce qui permettra des abus de langage.

Un feuilletage défini par la 1-forme  $F_0 dx_0 + F_1 dx_1 + F_2 dx_2$  est décrit dans la carte affine  $x_2 = 1$  par la 1-forme polynomiale

$$\omega' = F_0(x_0, x_1, 1) dx_0 + F_1(x_0, x_1, 1) dx_1.$$

Le champ de vecteurs  $\chi = F_1(x_0, x_1, 1) \frac{\partial}{\partial x_0} - F_0(x_0, x_1, 1) \frac{\partial}{\partial x_1}$  lui est tangent, i.e.  $i_\chi \omega' = 0$ .

À toute transformation rationnelle  $f$  on peut associer un feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  de la façon suivante :

$$f = (f_0 : f_1 : f_2) \mapsto \mathcal{F}(f) = (x_1 f_2 - x_2 f_1) dx_0 + (x_2 f_0 - x_0 f_2) dx_1 + (x_0 f_1 - x_1 f_0) dx_2.$$

**Proposition 3.1.** — Soient  $f$  une transformation de CREMONA et  $\mathcal{F}(f)$  le feuilletage associé. Si  $A$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ , alors  $\mathcal{F}(A^{-1}fA) = A^* \mathcal{F}(f)$ .

*Démonstration.* — Le feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  est déterminé par les champs de vecteurs associés à  $\text{id}$  et  $f$ ; son conjugué  $A^* \mathcal{F}(f)$  est donc donné par  $A^{-1} \text{id} A = \text{id}$  et  $A^{-1} f A$ . Or ces deux champs sont tangents au feuilletage  $\mathcal{F}(A^{-1} f A)$  d'où le résultat.  $\square$

Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA ; un **point fixe** de  $f$  est un point  $p$  tel que  $p$  n'appartienne pas à  $\text{Ind } f \cup \text{Ind } f^{-1}$  et  $f(p) = p$ . On note  $\text{Fix } f$  l'ensemble des points fixes de  $f$ . Si  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{P}^2$ , i.e. une application rationnelle dont l'ensemble d'indétermination est vide,  $\text{Fix } f$  est l'ensemble des points fixes au sens usuel, i.e.

$$\text{Fix } f = \{m \in \mathbb{P}^2 \mid f(m) = m\}.$$

**Exemple 3.2.** — La transformation  $f = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$  définit un endomorphisme quadratique du plan projectif complexe ayant sept points fixes, qui sont exactement les points singuliers de son feuilletage associé  $\mathcal{F}(f)$ ; notons que  $\mathcal{F}(f)$  est défini par la 1-forme

$$x_1 x_2 (x_2 - x_1) dx_0 + x_0 x_2 (x_2 - x_0) dx_1 + x_0 x_1 (x_1 - x_0) dx_2.$$

Par suite ce phénomène persiste pour une transformation rationnelle générique.

**Exemple 3.3.** — L'involution de CREMONA compte trois points d'indétermination

$$(1 : 0 : 0), \quad (0 : 1 : 0), \quad (0 : 0 : 1)$$

et quatre points fixes

$$(1 : 1 : 1), \quad (1 : -1 : 1), \quad (-1 : 1 : 1), \quad (1 : 1 : -1).$$

Le feuilletage associé  $\mathcal{F}(\sigma)$  est donné par la forme

$$\begin{aligned} & x_0(x_2^2 - x_1^2) dx_0 + x_1(x_0^2 - x_2^2) dx_1 + x_2(x_1^2 - x_0^2) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}(x_0^2, x_1^2, x_2^2)^* ((x_2 - x_1) dx_0 + (x_0 - x_2) dx_1 + (x_1 - x_0) dx_2). \end{aligned}$$

On remarque qu'il possède l'intégrale première  $\frac{x_0^2 - x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}$ ; ses feuilles (plutôt l'adhérence de ses feuilles) sont les coniques  $x_0^2 - x_2^2 = \alpha(x_1^2 - x_2^2)$ . Le feuilletage associé  $\mathcal{F}(\sigma)$  est de degré 2; il possède 7 points singuliers qui sont exactement les points fixes et les points d'indétermination de  $\sigma$ . On en déduit la :

**Proposition 3.4.** — *Si  $f$  est une transformation birationnelle quadratique générique  $\mathcal{F}(f)$  possède 7 points singuliers distincts; quatre sont des points fixes de  $f$ , les trois autres sont des points d'indétermination.*

Dans la Proposition 3.4 générique signifie dans un ouvert de ZARISKI de  $\text{Bir}_2$ . L'exemple qui suit montre que les points fixes ne sont pas toujours isolés.

**Exemple 3.5.** — Considérons l'involution  $f$  de  $\Sigma^3$  donnée par  $f = (x_0x_2 : x_1x_2 : x_0x_1)$ . On a

$$\text{Ind } f = \text{Ind } f^{-1} = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}.$$

L'ensemble des points fixes de  $f$  est précisément la conique  $\{x_2^2 - x_0x_1 = 0\}$  privée des deux points  $(1 : 0 : 0)$  et  $(0 : 1 : 0)$  qui sont d'indétermination. En fait  $f$  est bien défini en restriction à la conique  $\overline{\text{Fix } f}$  sur laquelle elle coïncide avec l'identité.

Dans une telle situation nous disons que  $f$  possède une ***courbe de points fixes***.

Notons que  $\mathcal{F}(f)$  est ici le feuilletage en droites  $\frac{x_1}{x_0} = \text{cte}$  dont la seule singularité est le point  $(0 : 0 : 1)$ ; bien que la transformation soit quadratique son feuilletage associé ne l'est pas : il est de degré 0. L'énoncé qui suit précise cela :

**Proposition 3.6.** — *Soient  $f$  un élément du groupe de CREMONA et  $\mathcal{F}(f)$  le feuilletage associé à  $f$ . La transformation  $f$  a une courbe de points fixes si et seulement si  $\deg \mathcal{F}(f) < \deg f$ .*

*Si  $C$  est une courbe de points fixes de  $f$ , alors  $\deg C \leq \deg f$ .*

**Démonstration.** — On écrit  $f$  sous la forme  $(f_0 : f_1 : f_2)$ ; dire que  $\deg \mathcal{F}(f) < \deg f$  c'est dire que la 1-forme

$$\omega = (x_1f_2 - x_2f_1) dx_0 + (x_2f_0 - x_0f_2) dx_1 + (x_0f_1 - x_1f_0) dx_2$$

est divisible par un polynôme homogène  $\varphi$  de degré strictement supérieur à 1. La courbe  $\varphi = 0$  est visiblement une courbe de points fixes (un calcul immédiat montre que  $\varphi = 0$  ne peut pas être contractée).

On peut écrire  $\omega = \varphi\omega'$ , la forme  $\omega'$  s'annulant sur un ensemble de codimension 2 (une union de droites). Comme  $\omega$  et donc  $\omega'$  annulent le champ radial on a  $1 \leq \deg \varphi \leq \deg f$ .  $\square$

Les points fixes peuvent être de « multiplicité » strictement supérieure à 1 : ainsi la transformation  $(x_0^2 + x_1x_2 : x_1^2 + x_0x_2 : x_2^2 - x_0x_1)$  compte trois points d'indétermination

$$(1 : 1 : -1), \quad (1 - i\sqrt{3} : 1 + i\sqrt{3} : 2), \quad (1 + i\sqrt{3} : 1 - i\sqrt{3} : 2),$$

et trois points fixes  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$ ; on peut vérifier que  $(0 : 0 : 1)$  est double. La transformation

$$f = (x_0(x_2 - x_1) : x_1(x_2 - x_0) : x_2^2 + \alpha x_1x_2 + \beta x_0x_2 - (1 + \alpha + \beta)x_0x_1)$$

satisfait

$$\text{Ind } f = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (1 : 1 : 1)\}, \quad \text{Fix } f = \{(0 : 0 : 1)\}$$

et  $(0 : 0 : 1)$  est de multiplicité 4. Les droites d'équation  $x_0 = x_2$ ,  $x_1 = x_2$  et  $x_1 = x_0 - x_2$  sont contractées et celles d'équation  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_1 = x_0$  sont invariantes. On peut vérifier qu'un point fixe peut aussi être de multiplicité 3.

En général un élément  $f$  du groupe de CREMONA ne préserve pas son feuilletage associé ; il en est ainsi pour l'involution de CREMONA. Ceci signifie en un certain sens qu'il n'y a pas de lien dynamique entre  $f$  et  $\mathcal{F}(f)$ . Il y a quelques cas spéciaux intéressants. Supposons que  $f$  préserve une fibration  $\ell$  en droites fibre à fibre, *i.e.*  $\ell \circ f = \ell$ ; on peut se ramener à  $\ell = \frac{x_1}{x_0}$ . Alors  $f$  s'écrit

$$f = (x_0\phi : x_1\phi : \psi), \quad \deg \psi = \deg \phi + 1.$$

Un calcul élémentaire montre que  $\mathcal{F}(f)$  est la fibration  $\frac{x_1}{x_0} = \text{cte}$ , et dans ce cas  $f$  préserve le feuilletage  $\mathcal{F}(f)$ . On peut démontrer (c'est long et fastidieux) que dans le cas quadratique c'est la seule possibilité : si  $f \in \mathring{\text{Bir}}_2$  laisse  $\mathcal{F}(f)$  invariant, alors  $f$  préserve une fibration en droites fibre à fibre.

Toutefois certains invariants de  $\mathcal{F}(f)$ , en particulier aux points singuliers, vont posséder une traduction naturelle pour  $f$ .

### 3.2. Transformations birationnelles quadratiques et feuilletages

Lorsque  $n = 2$  on a  $\text{Rat}_2 \simeq \mathbb{P}^{17}$  et  $\mathcal{F}_2 \simeq \mathbb{P}^{14}$ ; ainsi l'application  $f \mapsto \mathcal{F}(f)$  induit une application linéaire notée encore  $\mathcal{F}(\cdot)$  de  $\mathbb{P}^{17}$  dans  $\mathbb{P}^{14}$ . Nous allons démontrer que l'application  $\mathcal{F}(\cdot)$  est dominante en restriction à  $\text{Bir}_2$ .

Pour cela on se donne un feuilletage  $\mathcal{F}$  générique au sens où son ensemble singulier  $\text{Sing } \mathcal{F}$  est constitué de 7 points en position générale (pas d'alignement 3 à 3). Comme on l'a dit on peut trouver une transformation quadratique  $F = (F_0 : F_1 : F_2)$  telle que  $\mathcal{F}$  soit défini par

$$(x_1F_2 - x_2F_1)dx_0 + (x_2F_0 - x_0F_2)dx_1 + (x_0F_1 - x_1F_0)dx_2;$$

l'ensemble  $\text{Sing } \mathcal{F}$  est alors précisément l'ensemble des points  $m$  pour lesquels il existe  $\eta$  dans  $\mathbb{C}$  tels que  $F(m) = \eta m$ . Choisissons trois points  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  dans  $\text{Sing } \mathcal{F}$ . Comme les  $m_i$  ne sont pas alignés on peut trouver  $\ell$  une forme linéaire telle qu'avec les notations ci-dessus  $\ell(m_i) = -\eta_i$ ; l'application  $f = F + \ell \text{id}$  satisfait  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(F) = \mathcal{F}$  et les points  $m_i$  sont

d'indétermination pour  $f$ . En particulier  $f$  est birationnelle. On en déduit que la restriction de  $\mathcal{F}(\cdot)$  à  $\text{Bir}_2$  est dominante et par suite à fibre générique finie puisque  $\dim \text{Bir}_2 = \dim \mathcal{F}_2$ .

On sait d'après [57] qu'un feuilletage de degré 2 est déterminé par la position de ses 7 points singuliers et que toute configuration ZARISKI générique est réalisée. On hérite d'une propriété analogue pour les éléments de  $\Sigma^3$  :

**Proposition 3.7.** — *Une transformation birationnelle quadratique générique est déterminée par la position de ses points d'indétermination et de ses points fixes.*

*Démonstration.* — Si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux transformations birationnelles ayant trois points d'indétermination communs on peut supposer qu'elles sont du type  $A_1\sigma$  et  $A_2\sigma$ ; si de plus elles ont les mêmes points fixes, on a, puisque les sept points sont en position générale,  $\mathcal{F}(Q_1) = \mathcal{F}(Q_2)$ . Il existe donc  $\eta$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\ell$  une forme linéaire tels que  $(A_1 - \eta A_2)\sigma = \ell \cdot \text{id}$ . Un calcul direct montre que  $\ell = 0$  et donc  $Q_1 = Q_2$ .  $\square$

On en déduit que la fibre générique de l'application

$$\mathcal{F}(\cdot)|_{\text{Bir}_2} : \text{Bir}_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$$

a exactement  $35 = \overline{C}_7^3$  points ; il s'agit en effet de désigner parmi 7 points 3 points d'indétermination. Comme  $\overline{\text{Bir}}_2$  est algébrique de dimension 14, on constate que toute configuration générique de 7 points est réalisée par une (en fait 35) transformation birationnelle quadratique.

Remarquons que  $\mathcal{F}(\cdot)$  a des fibres non finies. Par exemple si  $\tilde{\mathcal{F}}$  est le feuilletage donné par  $x_1 dx_0 - x_0 dx_1$  qui définit la fibration  $x_1/x_0 = \text{cte}$ , toutes les transformations qui laissent invariante fibre à fibre cette fibration sont dans  $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathcal{F}})$ ; en particulier toutes les transformations  $A\sigma$  de la forme

$$(*x_1x_2 + *x_0x_2 : *x_1x_2 + *x_0x_2 : *x_1x_2 + *x_0x_2 + *x_0x_1)$$

sont dans cette fibre.

Il y a aussi des fibres multiples *i.e.* ayant moins de 35 points. C'est le cas de  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\sigma))$  que nous allons déterminer. Remarquons qu'un élément de  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\sigma))$  est nécessairement dans  $\Sigma^3$ , *i.e.* s'écrit  $A\sigma B$ . Ainsi les éléments  $Q_i$  de  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\sigma))$  sont du type :

$$Q_i = A_i\sigma B_i = \sigma + (x_0\ell_i : x_1\ell_i : x_2\ell_i), \quad A_i, B_i \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}), \ell_i \text{ forme linéaire.}$$

On obtient donc la :

**Proposition 3.8.** — *L'ensemble  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\sigma))$  est constitué des transformations birationnelles quadratiques suivantes :*

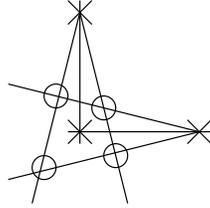
$$\begin{aligned} Q_0 &= \sigma, & Q_1 &= \sigma + (x_0 + x_1 + x_2)\text{id}, & Q_2 &= \sigma + (x_0 - x_1 - x_2)\text{id}, \\ Q_3 &= \sigma + (-x_0 - x_1 + x_2)\text{id}, & Q_4 &= \sigma + (-x_0 + x_1 - x_2)\text{id}. \end{aligned}$$

Remarquons que les  $Q_i$ ,  $i \neq 0$ , sont conjugués entre eux par des éléments qui commutent avec  $\sigma$  :

$$Q_2 = (-x_0 : x_1 : x_2)Q_1(-x_0 : x_1 : x_2), \quad Q_3 = (x_0 : x_1 : -x_2)Q_1(x_0 : x_1 : -x_2),$$

$$Q_4 = (x_0 : -x_1 : x_2)Q_1(x_0 : -x_1 : x_2).$$

La configuration des points fixes et d'indétermination de  $\sigma$  est schématisée par la figure suivante :



où les croix représentent les points d'indétermination et les cercles les points fixes. On note que cette configuration n'est pas générique dans le sens où chaque point est en alignement avec deux autres.

**Remarque 3.9.** — Soit  $f$  dans  $\text{Bir}_2$  telle que  $\deg \mathcal{F}(f) = 2$ . Supposons que trois points fixes de  $f$  soient alignés, par exemple situés sur la droite  $x_2 = 0$ ; alors  $\mathcal{F}(f)$  a trois points singuliers sur  $x_2 = 0$  qui est donc invariante par  $\mathcal{F}(f)$ . Ceci implique que  $x_2 = 0$  est aussi invariante par  $f$ ; la restriction de  $f$  à  $x_2 = 0$  s'identifie à une transformation de MÖBIUS avec trois points fixes c'est donc l'identité. Par suite la droite  $x_2 = 0$  est une courbe de points fixes de  $f$ .

Revenons à la figure précédente. Si  $f$  est un élément de  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\sigma))$ , alors

$$\text{Fix } f \cup \text{Ind } f = \text{Fix } \sigma \cup \text{Ind } \sigma$$

avec les contraintes suivantes : trois points de  $\text{Ind } f$  (resp.  $\text{Fix } f$ ) ne peuvent être alignés. On retrouve ainsi  $\#\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\sigma)) = 5$ .

Des arguments du même ordre montrent que  $\#\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\rho)) = 15$ . Notons que dans  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tau))$  on trouve à la fois des éléments de  $\Sigma^1$  (par exemple  $\tau, \tau - x_2 \text{id}, \tau + x_2 \text{id}$ ) et des éléments de  $\Sigma^2$  comme  $\tau + (-2x_1 + x_2) \text{id}$ . Ainsi la donnée du feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  ne permet pas de déterminer de l'orbite g.d. de  $f$ .

### 3.3. Relations de type LEFSCHETZ, BAUM-BOTT

Certains invariants de conjugaison initialement introduits pour les feuilletages s'adaptent aux transformations birationnelles. En 2004 GUILLOT a montré le :

**Théorème 3.10 ([61]).** — Soit  $B$  un polynôme sur l'espace des transformations linéaires de  $\mathbb{C}^n$ , homogène de degré  $v \leq n$  et invariant par conjugaison. Soit  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  une application rationnelle de degré algébrique  $d \geq 2$  définie en tout point et dont les points fixes sont isolés et simples. Alors

$$\sum_{x \in \text{Fix } f} \frac{B(Df_{(x)} - \text{id})}{\det(Df_{(x)} - \text{id})}$$

est un complexe qui ne dépend que du polynôme  $B$  et des entiers  $n$  et  $d$ .

Lorsque  $B = 1$  on retrouve un cas particulier du théorème de LEFSCHETZ suivant :

**Théorème 3.11** ([73, 59]). — Soient  $M$  une variété complexe compacte de dimension  $n$  et  $f$  une application holomorphe de  $M$  dans elle-même dont les points fixes sont simples et isolés. Alors

$$\sum_{x \in \text{Fix}_f} \frac{1}{\det(Df_{(x)} - \text{id})} = (-1)^n L(f, 0)$$

où  $L(f, 0)$  est le nombre de LEFSCHETZ qui ne dépend que de l'action de  $f$  sur la cohomologie de DOLBEAULT de  $M$ .

Pour un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{P}^n$  vérifiant les hypothèses précédentes,  $(-1)^n L(f, 0)$  vaut  $(-1)^n$  (voir [59]).

Comme l'indique GUILLOT le théorème s'adapte aux transformations birationnelles ayant des points d'indétermination simples pourvu que  $\deg B \leq 1$ . En effet en un tel point on peut considérer les valeurs propres comme infinies. On obtient en particulier le :

**Théorème 3.12.** — Soit  $f$  un élément de  $\Sigma^3$  ayant quatre points fixes en position générale ; alors

$$(3.3.1) \quad \sum_{x \in \text{Fix}_f} \frac{\text{tr}(Df_{(x)} - \text{id})}{\det(Df_{(x)} - \text{id})} = -4 \quad \text{et} \quad \sum_{x \in \text{Fix}_f} \frac{1}{\det(Df_{(x)} - \text{id})} = 1.$$

*Démonstration.* — Il suffit de le vérifier pour l'involution  $\sigma$  de CREMONA.  $\square$

**Remarque 3.13.** — Si  $f$  satisfait les hypothèses du théorème, en chaque point fixe  $m$ , on a deux valeurs propres  $\delta_1(m)$ ,  $\delta_2(m)$  pour  $Df_{(m)}$ . Il y a donc en tout 8 valeurs propres qui sont reliées par les relations (3.3.1). Ces valeurs propres sont invariantes par conjugaison dynamique et on sait que l'orbite dynamique d'un élément générique de  $\Sigma^3$  est de codimension 6 (voir Chapitre 1). Nous verrons que la donnée de trois couples de valeurs propres génériques peut être réalisée (démonstration du Théorème 3.23).

La multiplicité des points fixes d'une transformation birationnelle se lit sur celle du feuilletage associé. Par exemple on a la proposition suivante dont la preuve est élémentaire.

**Proposition 3.14.** — Soient  $f$  une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  et  $m$  un point fixe de  $f$ . On note  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les valeurs propres de la partie linéaire de  $f$  en  $m$ . Si les  $\delta_i$  sont distinctes de 1, le point  $m$  est une singularité non dégénérée (i.e. de multiplicité 1) du feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  associé à  $f$ .

On sait que pour un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  générique (i.e. ayant trois points fixes distincts) les trois points fixes ne peuvent pas être contractants. En appliquant le Théorème 3.10 pour  $B = \text{tr}$ , on obtient une généralisation de ce fait :

**Corollaire 3.15.** — Soit  $f$  une transformation de  $\Sigma^3$  ayant quatre points fixes distincts. Les valeurs propres de la partie linéaire de  $f$  aux points fixes ne peuvent pas toutes être de module strictement inférieur à 1; autrement dit les points fixes ne peuvent pas tous être des attracteurs.

*Démonstration.* — D'après le Théorème 3.12, on a :

$$(3.3.2) \quad \sum_{m \in \text{Fix} f} \frac{\text{tr}(Df_{(m)} - \text{id})}{\det(Df_{(m)} - \text{id})} = -4$$

Notons  $\delta_1(m)$ ,  $\delta_2(m)$  les valeurs propres de  $Df_{(m)}$ ; on remarque que (3.3.2) se réécrit

$$(3.3.3) \quad \sum_{m \in \text{Fix} f} \frac{1}{1 - \delta_1(m)} + \frac{1}{1 - \delta_2(m)} = 4.$$

Pour  $j = 1, 2$  posons  $\eta_j(m) := (1 - \delta_j(m))^{-1}$  puis  $\eta_j(m) = y_j(m) + iz_j(m)$ . L'égalité (3.3.3) est équivalente à

$$\sum_{m \in \text{Fix} f} \sum_{j=1}^2 y_j(m) = 4, \quad \sum_{m \in \text{Fix} f} \sum_{j=1}^2 z_j(m) = 0$$

Supposons que pour tout point fixe  $m$  de  $f$  on ait  $|\delta_1(m)|, |\delta_2(m)| \leq 1$ ; les  $1 - \delta_j(m)$  sont alors dans le disque de rayon 1 centré en 1. Par l'application  $w \mapsto 1/w$  ce disque est transformé en le demi-plan  $\text{Re } w \geq 1/2$  de sorte que

$$y_1(m) \geq \frac{1}{2}, \quad y_2(m) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall m \in \text{Fix } f;$$

il en résulte que  $|\delta_1(m)| = |\delta_2(m)| = 1$  pour tout point fixe  $m$  de  $f$ .  $\square$

Par contre on peut produire des exemples où les points fixes sont soit contractants, soit dilatants (*i.e.* aucun des points fixes n'est hyperbolique). De même il existe des exemples où toutes les valeurs propres sont de module 1.

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $\mathbb{P}^2$ . Plaçons-nous dans  $\mathbb{C}^2$ , carte affine de  $\mathbb{P}^2$ ; on désigne par  $\chi$  un champ polynomial définissant  $\mathcal{F}$  et par  $m$  un point singulier de  $\mathcal{F}$ . La matrice jacobienne de  $\chi$  au point  $m$ , notée  $\text{jac } \chi(m)$ , appartient à  $M_2(\mathbb{C})$  et admet 2 valeurs propres  $\eta_1(m)$  et  $\eta_2(m)$ . La quantité

$$\text{BB}(\mathcal{F}(m)) = \frac{\text{tr}^2(\text{jac } \chi(m))}{\det(\text{jac } \chi(m))} = \frac{\eta_1(m)}{\eta_2(m)} + \frac{\eta_2(m)}{\eta_1(m)} + 2$$

ne dépend pas du choix du champ ([58]); c'est l'**indice de BAUM-BOTT** de  $\mathcal{F}$  au point  $m$ . Remarquons que cet indice est encore défini pour un point  $m$  où le déterminant jacobien s'annule ([4]).

**Lemme 3.16.** — Soient  $f, g$  deux transformations rationnelles quadratiques et  $\mathcal{F}(f)$ ,  $\mathcal{F}(g)$  les feuilletages induits par  $f$  et  $g$ . Soit  $m$  (resp.  $p$ ) un point fixe simple pour  $f$  (resp.  $g$ ). Supposons que les germes  $f_m$  et  $g_p$  soient holomorphiquement conjugués; alors

$$\text{BB}(\mathcal{F}(f)(m)) = \text{BB}(\mathcal{F}(g)(p)).$$

*Démonstration.* — C'est un calcul immédiat. Quitte à faire une translation on peut supposer que  $m = p = (0 : 0 : 1)$ . Dans la carte affine  $x_2 = 1$ , la transformation  $f$  s'écrit

$$(a_0x_0 + a_1x_1, b_0x_0 + b_1x_1) + \text{termes de plus haut degré}$$

autrement dit  $f$  est du type suivant :

$$(x_2^{n-1}(a_0x_0 + a_1x_1) + x_2^{n-2}q_2 + \dots + q_n : x_2^{n-1}(b_0x_0 + b_1x_1) + x_2^{n-2}r_2 + \dots + r_n : x_2^n + x_2^{n-1}s_1 + \dots + s_n)$$

avec  $q_i, r_i, s_i$  dans  $\mathbb{C}[x_0, x_1]_i$ .

Ainsi

$$\text{tr}(\text{jac } f_{(0)}) = a_0 + a_1, \quad \det \text{jac } f_{(0)} = a_0b_1 - a_1b_0.$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  est décrit dans la carte affine  $x_2 = 1$  par

$$\omega = (x_1 - b_0x_0 - b_1x_1)dx_0 + (a_0x_0 + a_1x_1 - x_0)dx_1 + \text{termes de plus haut degré}.$$

Ici encore intervient la condition de généricité : si  $\omega = adx_0 + bdx_1$  alors  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} \text{BB}(\mathcal{F}(f)(0)) &= \frac{(a_0 + b_1 - 2)^2}{(a_0 - 1)(b_1 - 1) - a_1b_0} \\ &= (\text{tr}(\text{jac } f_{(0)}) - 2)^2 (\det \text{jac } f_{(0)} - \text{tr}(\text{jac } f_{(0)}) + 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque  $f_{,0}$  et  $g_{,0}$  sont holomorphiquement conjugués, on a les égalités

$$\text{tr}(\text{jac } f_{(0)}) = \text{tr}(\text{jac } g_{(0)}), \quad \det \text{jac } f_{(0)} = \det \text{jac } g_{(0)};$$

par suite  $\text{BB}(\mathcal{F}(f)(0)) = \text{BB}(\mathcal{F}(g)(0))$ . □

Pour tout feuilletage  $\mathcal{F}$  de degré  $d$  sur  $\mathbb{P}^2$ , on a ([4]) :

$$\sum_{m \in \text{Sing } \mathcal{F}} \text{BB}((\mathcal{F})(m)) = (d + 2)^2.$$

On en déduit une formule pour tout  $Q$  générique dans  $\text{Rat}_2$  tel que  $\deg \mathcal{F}(Q) = 2$  :

$$(3.3.4) \quad \sum_{m \in \Omega} \frac{\text{tr}^2(\text{jac } \chi_Q(m))}{\det \text{jac } \chi_Q(m)} = 16$$

où  $\Omega = \text{Ind } Q \cup \text{Fix } Q$  et  $\chi_Q$  désigne un champ local définissant le feuilletage  $\mathcal{F}(Q)$  en  $m$ .

De la même manière que précédemment cette formule est valable pour tout élément générique de  $\Sigma^3$ .

**Remarque 3.17.** — La formule (3.3.4) n'est pas valable pour les éléments  $Q$  de  $\Sigma^2$  et  $\Sigma^1$  : au point base  $m$  de multiplicité strictement supérieure à 1, la quantité  $\frac{\text{tr}^2(\text{jac } \chi_Q(m))}{\det \text{jac } \chi_Q(m)}$  n'est pas bien définie.

### 3.4. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$

Le problème de la classification des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  modulo conjugaison birationnelle est traité dans [13]; l'auteur y démontre que tout automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  est birationnellement conjugué à une transformation soit diagonale  $(\alpha_0 x_0 : \alpha_1 x_1 : \alpha_2 x_2)$ , soit de la forme  $(x_0 : x_0 + x_1 : \alpha x_2)$ . Il montre par exemple que deux transformations diagonales birationnellement conjuguées le sont par une *transformation monomiale*, i.e. une transformation de la forme

$$(\gamma x_0^p x_1^q, \delta x_0^r x_1^s), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{C}^*, \quad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Voici un cas spécial (générique) :

**Proposition 3.18.** — *Soit  $A$  un automorphisme diagonal de  $\mathbb{P}^2$ ; on suppose que l'adhérence de ZARISKI du groupe engendré par  $A$  est tout le groupe diagonal :*

$$\overline{\langle A \rangle}^Z = \{(\alpha x_0, \beta x_1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}.$$

*Soit  $B$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  birationnellement conjugué à  $A$ . Alors :*

- $B$  est linéairement conjugué à un élément diagonal  $(cx_0, dx_1)$ ;
- $A$  et  $(cx_0, dx_1)$  sont conjugués via une transformation monomiale.

*Démonstration.* — Écrivons  $A$  sous la forme  $(ax_0, bx_1)$ . Il suffit d'étudier les cas où

$$B = (cx_0, dx_1) \quad \text{et} \quad B = (cx_0, x_0 + cx_1).$$

Supposons que  $B = (cx_0, dx_1)$ ; soit  $f = (f_0, f_1)$  une transformation birationnelle conjuguant  $A$  à  $B$ . On a

$$(f_0, f_1)(a^n x_0, b^n x_1) = (c^n f_0, d^n f_1), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Puisque  $\overline{\langle A \rangle}^Z = \{(\alpha x_0, \beta x_1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*\}$ , on a

$$(f_0, f_1)(\alpha x_0, \beta x_1) = (\eta(\alpha, \beta) f_0, \zeta(\alpha, \beta) f_1), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$

Un calcul élémentaire (du même type que celui qui suit) montre que

$$(f_0, f_1) = (\gamma x_0^p x_1^q, \delta x_0^r x_1^s), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{C}^*, \quad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Reste à considérer le cas où  $B = (cx_0, cx_1 + x_0)$ . Comme l'adhérence de ZARISKI  $\overline{\langle A \rangle}^Z$  est de dimension 2 l'égalité  $f \circ B^n = A^n \circ f$  implique que l'adhérence de ZARISKI  $\overline{\langle B \rangle}^Z$  est aussi de dimension 2. Il en résulte que

$$\overline{\langle B \rangle}^Z = \{(sx_0, sx_0 + tx_1) \mid s \in \mathbb{C}^*, t \in \mathbb{C}\};$$

par suite on a

$$f(sx_0, sx_1 + tx_0) = (\alpha(s, t)x_0, \beta(s, t)x_1), \quad \forall s \in \mathbb{C}^*, t \in \mathbb{C}.$$

Considérons la première composante :

$$(3.4.1) \quad f_0(sx_0, sx_1 + tx_0) = \alpha(s, t)f_0(x_0, x_1);$$

comme le membre de gauche est dérivable par rapport à  $s$  celui de droite aussi. On obtient en dérivant par rapport à  $s$  et en évaluant en  $(s, t) = (1, 0)$  :

$$x_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} f_0;$$

il s'en suit que  $f_0$  est homogène. Dérivons (3.4.1) par rapport à  $t$  :

$$x_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(sx_0, sx_1 + tx_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, t)f_0(x_0, x_1).$$

Puisque  $f_0$  est homogène on a pour  $t = 0$

$$x_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(sx_0, sx_1) = s^v x_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(x_0, x_1) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, 0)f_0(x_0, x_1)$$

autrement dit

$$\frac{\partial f_0 / \partial x_1}{f_0} = \frac{\text{cte}}{x_0}.$$

On constate alors que nécessairement  $\partial f_0 / \partial x_1 \equiv 0$ , i.e.  $f_0 = f_0(x_0)$ . Un raisonnement analogue conduit à  $f_1 = f_1(x_0)$  autrement dit  $f = f(x_0)$  ce qui est impossible.  $\square$

SERRE établit un résultat analogue en toute dimension :

**Théorème 3.19 ([91]).** — Soient  $A$  et  $B$  deux parties du tore  $T$  de  $\text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$  et soit  $f$  un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$  tel que  $fA f^{-1} = B$ . Alors  $A$  et  $B$  sont conjuguées via une transformation monomiale.

### 3.5. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\Sigma^3$

Évidemment deux transformations birationnellement conjuguées ne sont pas nécessairement linéairement conjuguées. Par exemple

$$Q_1 = (2(x_0 + x_1)x_2 : x_1(x_2 - x_0) : (x_0 + x_1)(x_2 - x_0))$$

et

$$Q_2 = (x_0 - x_2 : 2(x_1 + x_0) : 2x_0)$$

sont birationnellement conjuguées par  $\sigma$ ; par contre elles ne peuvent pas l'être via un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  (elles n'ont pas même degré).

Néanmoins les transformations  $A\sigma$  et  $\sigma A$  sont birationnellement conjuguées via  $\sigma$  et linéairement conjuguées via  $A^{-1}$ . Ainsi pour tout élément  $Q$  de  $\Sigma^3$  il existe une transformation de  $\Sigma^3$ , en général distincte de  $Q$ , birationnellement conjuguée à  $Q$  par une transformation quadratique mais aussi par un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ .

**Proposition 3.20.** — Soient  $A$  et  $B$  deux automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  tels que les transformations  $A\sigma$  et  $B\sigma$  aient quatre points fixes en position générale. Supposons que  $A\sigma$  (resp.  $B\sigma$ ) ne laisse pas de courbe rationnelle invariante. Si  $A\sigma$  et  $B\sigma$  sont birationnellement conjuguées par  $\varphi$ , alors  $\varphi$  est un difféomorphisme local holomorphe en chaque point fixe de  $A\sigma$ . De plus, à conjugaison linéaire près, on a

- $\text{Fix}(A\sigma) = \text{Fix}(B\sigma)$ ;
- $\varphi|_{\text{Fix}(A\sigma)=\text{Fix}(B\sigma)} = \text{id}$ ;
- et pour tout point fixe  $m$  de  $A\sigma$

$$\text{tr}(\text{jac } A\sigma_{(m)}) = \text{tr}(\text{jac } B\sigma_{(m)}), \quad \det \text{jac } A\sigma_{(m)} = \det \text{jac } B\sigma_{(m)}.$$

**Remarque 3.21.** — Si chaque matrice  $A$  et  $B$  a ses coefficients  $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants, alors, comme nous le verrons au Chapitre 4, les transformations  $A\sigma$  et  $B\sigma$  satisfont les conclusions de la Proposition 3.20.

*Démonstration.* — Soit  $m$  un point fixe pour  $A\sigma$ ; alors  $\varphi(m) = B\sigma\varphi(m)$ . Par hypothèse  $B\sigma$  ne fixe pas de courbe rationnelle; il en résulte que  $m$  n'est pas d'indétermination pour  $\varphi$ . En particulier  $\varphi$  est holomorphe en chaque point fixe de  $A\sigma$  et l'image par  $\varphi$  d'un point fixe de  $A\sigma$  est un point fixe de  $B\sigma$ . De même  $\varphi^{-1}$  est holomorphe aux points fixes de  $B\sigma$ . Par suite

$$\varphi(\text{Fix}(A\sigma)) = \text{Fix}(B\sigma)$$

et  $\varphi$  est un difféomorphisme local en chaque point de  $\text{Fix}(A\sigma)$ . Comme deux quadruplets de points en position générale s'échangent par un automorphisme, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Pour une transformation de type  $A\sigma$  ayant quatre points fixes en position générale on obtient, par un bon positionnement des points fixes, des formes normales qui s'avèrent utiles.

**Proposition 3.22.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  tel que les points fixes et les points d'indétermination de  $A\sigma$  soient en position générale. Alors  $A\sigma$  est linéairement conjugué à une transformation de la forme

$$(x_0^2 + A_0x_1x_2 + B_0x_0x_2 + C_0x_0x_1 : x_1^2 + A_1x_1x_2 + B_1x_0x_2 + C_1x_0x_1 : x_2^2 + A_2x_1x_2 + B_2x_0x_2 + C_2x_0x_1)$$

les  $A_i, B_i, C_i$  étant des éléments de  $\mathbb{C}$  satisfaisant :

$$A_1B_0 - A_0B_1 \neq 0, \quad A_2 = \frac{B_0 - A_0C_1}{A_1B_0 - A_0B_1}, \quad B_2 = \frac{A_1 - B_1C_0}{A_1B_0 - A_0B_1}, \quad C_2 = \frac{1 - C_0C_1}{A_1B_0 - A_0B_1}.$$

Remarquons que par la Proposition 3.7 un automorphisme  $A$  générique vérifie les conditions de l'énoncé.

*Démonstration.* — Soit  $f$  une transformation linéairement conjuguée à  $A\sigma$  de sorte que

$$(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1) \in \text{Fix } f;$$

alors  $f$  est du type  $(Q_0 : Q_1 : Q_2)$  où

$$Q_0 = \eta_0x_0^2 + A_0x_1x_2 + B_0x_0x_2 + C_0x_0x_1, \quad Q_1 = \eta_1x_1^2 + A_1x_1x_2 + B_1x_0x_2 + C_1x_0x_1,$$

$$Q_2 = \eta_2 x_2^2 + A_2 x_1 x_2 + B_2 x_0 x_2 + C_2 x_0 x_1.$$

Comme les points fixes sont distincts,  $\eta_0 \eta_1 \eta_2$  est non nul et, à conjugaison par homothétie près, on peut supposer que  $\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = 1$ . Considérons l'intersection  $C$  des deux coniques  $Q_0 = 0$  et  $Q_1 = 0$ ; on remarque que  $C$  contient les trois points d'indétermination  $p_1, p_2$  et  $p_3$  de  $f$  et le point  $(0 : 0 : 1)$ . Puisque ces quatre points sont en position générale les deux coniques sont transverses. Par suite si  $P$  est un polynôme homogène de degré  $v$  s'annulant sur  $C$ , alors  $P$  s'écrit

$$D_0 Q_0 + D_1 Q_1, \quad D_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{v-2}.$$

On remarque que  $x_0 Q_2$  s'annule en  $(0 : 0 : 1)$  et en les  $p_i$ ; il en résulte que  $x_0 Q_2$  s'écrit

$$(\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1 + \gamma_0 x_2) Q_0 + (\alpha_1 x_0 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2) Q_1.$$

Remarquons que  $(A_0, B_0)$  est non nul : si  $A_0$  et  $B_0$  étaient nuls, l'intersection de  $Q_0 = 0$  et  $Q_1 = 0$  en  $(0 : 0 : 1)$  serait multiple ce qui contredirait l'hypothèse sur les points fixes ; de même  $(A_1, B_1) \neq (0, 0)$ . Ainsi  $B_0 A_1 - B_1 A_0 = 0$  si et seulement s'il existe  $t$  dans  $\mathbb{C}^*$  tel que  $(A_1, B_1) = t(A_0, B_0)$ ; si tel était le cas l'intersection de  $tQ_0 - Q_1 = 0$  et  $Q_1 = 0$  en  $(0 : 0 : 1)$  serait multiple. Il s'en suit que  $B_0 A_1 - B_1 A_0 \neq 0$ .

À partir de

$$(\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1 + \gamma_0 x_2) Q_0 + (\alpha_1 x_0 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2) Q_1 = x_2^2 + A_2 x_1 x_2 + B_2 x_0 x_2 + C_2 x_0 x_1$$

on obtient

$$A_2 = \delta(B_0 - A_0 C_1), \quad B_2 = \delta(A_1 - B_1 C_0), \quad C_2 = \delta(1 - C_0 C_1)$$

avec  $\delta = (B_0 A_1 - B_1 A_0)^{-1}$  d'où la forme normale annoncée.  $\square$

L'énoncé suivant est un résultat de rigidité ; il dit que deux transformations quadratiques génériques birationnellement conjuguées sont linéairement conjuguées.

**Théorème 3.23.** — *Il existe une hypersurface  $\mathcal{H}$  dans  $\Sigma^3$  ayant la propriété suivante : soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Sigma^3 \setminus \mathcal{H}$  sans courbe invariante et ayant leurs sept points spéciaux en position générale ; si  $f$  et  $g$  sont birationnellement conjugués, ils le sont linéairement.*

*Démonstration.* — D'après la Proposition 3.20 les traces et déterminants des matrices jacobiniennes de  $f$  et  $g$  aux quatre points fixes correspondants coïncident. La Proposition 3.22 nous permet d'écrire  $f$  sous la forme normale

$$\begin{aligned} & (x_0^2 + A_0 x_1 x_2 + B_0 x_0 x_2 + C_0 x_0 x_1 : x_1^2 + A_1 x_1 x_2 + B_1 x_0 x_2 + C_1 x_0 x_1 : \\ & x_2^2 + \eta(B_0 - A_0 C_1) x_1 x_2 + \eta(A_1 - B_1 C_0) x_0 x_2 + \eta(1 - C_0 C_1) x_0 x_1) \end{aligned}$$

avec  $\eta = (B_0 A_1 - B_1 A_0)^{-1}$ . Les points  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$  appartiennent à  $\text{Fix } f$ ; notons  $m$  le quatrième point fixe de  $f$ . Pour démontrer l'énoncé il suffit d'établir que  $f$  est

uniquement déterminé par la connaissance des traces et déterminants aux quatre points fixes. Posons

$$\begin{aligned} t_1 &:= \operatorname{tr}(\operatorname{jac} f_{(0:0:1)}) = B_0 + A_1, & \delta_1 &:= \det \operatorname{jac} f_{(0:0:1)} = 1/\eta, \\ t_2 &:= \operatorname{tr}(\operatorname{jac} f_{(0:1:0)}) = C_0 + \eta(B_0 - A_0 C_1), & \delta_2 &:= \det \operatorname{jac} f_{(0:1:0)} = \eta(C_0 B_0 - A_0), \\ t_3 &:= \operatorname{tr}(\operatorname{jac} f_{(1:0:0)}) = C_1 + \eta(A_1 - C_0 B_1), & \delta_3 &:= \det \operatorname{jac} f_{(1:0:0)} = \eta(C_1 A_1 - B_1), \\ t_4 &:= \operatorname{tr}(\operatorname{jac} f_{(m)}), & \delta_4 &:= \det \operatorname{jac} f_{(m)}. \end{aligned}$$

Considérons l'application  $\Theta$  définie par

$$\Theta : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6, \quad (A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1) \mapsto (t_1, \delta_1, t_2, \delta_2, t_3, \delta_3).$$

Le calcul de  $\Theta^{-1}(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu, \zeta)$  se ramène à résoudre le système constitué des équations suivantes :

$$\begin{aligned} B_0 + A_1 &= \alpha, & B_0 A_1 - B_1 A_0 &= \beta, & C_0 \beta + B_0 - A_0 C_1 &= \gamma, \\ C_0 B_0 - A_0 &= \varepsilon, & C_0 \beta + A_1 - B_1 C_0 &= \mu, & C_1 A_1 - B_1 &= \zeta. \end{aligned}$$

À l'aide de Maple, on obtient

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{-\alpha\beta^2 + \beta(\alpha^2 + \varepsilon + \beta)A_1 - \alpha(2\beta + \varepsilon)A_1^2 + (\varepsilon + \beta)A_1^3}{-\alpha\beta\zeta + (\beta\zeta - \beta + \alpha\mu)A_1 - \mu A_1^2}, \\ B_0 &= -A_1 + \alpha, & B_1 &= \frac{-\alpha\beta\zeta + (\beta\zeta - \beta + \alpha\mu)A_1 - \mu A_1^2}{\alpha\beta - (\beta + \varepsilon)A_1}, \\ C_0 &= \frac{-\beta(\zeta\varepsilon + \beta) + (\alpha\beta + \mu\varepsilon)A_1 - (\varepsilon + \beta)A_1^2}{-\alpha\beta\zeta + (\beta\zeta - \beta + \alpha\mu)A_1 - \mu A_1^2}, & C_1 &= \frac{\mu\alpha - \beta - \varepsilon\zeta - \mu A_1}{\alpha\beta - (\beta + \varepsilon)A_1}. \end{aligned}$$

Quant à  $A_1$  il satisfait l'équation quadratique

$$\begin{aligned} \beta(\mu\alpha + \alpha\gamma\zeta - (\beta + \zeta\varepsilon)(1 + \beta)) + (\alpha\beta(\beta + 2\zeta - \alpha\zeta) + \beta(\mu\varepsilon - \gamma\zeta - \mu + \gamma) + \alpha(\zeta\varepsilon - \gamma\mu))A_1 \\ + (\gamma\mu - \varepsilon(\zeta + \beta) - \beta(\beta + \zeta))A_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre en particulier que pour  $\chi = (\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu, \zeta)$  générique dans l'image de  $\Theta$ , la fibre  $\Theta^{-1}(\chi)$  contient exactement deux points  $\chi_1, \chi_2$  : c'est cette condition qui détermine l'hy-persurface  $\mathcal{H} = \{\chi \mid \#\Theta^{-1}(\chi) \neq 2\}$ . Pour conclure il suffit de trouver une valeur explicite de  $\chi$  pour laquelle on aura  $t_4(\chi_1) \neq t_4(\chi_2)$ . Un calcul conduit à

$$\Theta^{-1}(0, 1, 1, 1, -1, 2) = \left( -\frac{\xi}{3}, \xi, -\xi, -\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}, \frac{7\xi}{6} + \frac{1}{2}, -\frac{7\xi}{4} - \frac{3}{4} \right)$$

où

$$\xi \in \left\{ \xi_1 = \frac{-1 + \mathbf{i}\sqrt{167}}{14}, \xi_2 = -\frac{1 + \mathbf{i}\sqrt{167}}{14} \right\}.$$

On constate que  $t_4(\chi_1)$  (correspondant au choix  $\xi = \xi_1$ ) et  $t_4(\chi_2)$  sont distincts :

$$t_4(\chi_1) \sim 3.67 + 0.16 \cdot 10^{-8} \mathbf{i} \neq t_4(\chi_2) \sim 3.67 - 0.16 \cdot 10^{-8} \mathbf{i}.$$

□

**Remarques 3.24.** — L'hypersurface  $\mathcal{H}$  n'est pas explicite dans notre énoncé ; un examen plus précis de l'application  $\Theta$  permettrait sans doute d'affiner notre résultat.

La démonstration précédente montre deux choses :

- si l'on se donne trois couples  $(\xi_j, \mu_j)$  génériques, on peut les réaliser comme valeurs propres en 3 points fixes  $p_j$  d'une certaine transformation quadratique. Par exemple les  $\xi_j, \mu_j$  peuvent être des complexes de module 1 génériques.
- soit  $g = A\sigma$  générique,  $m_i$  ses points fixes,  $i = 1, \dots, 4$ . On note  $t(g, m_i)$  et  $\delta(g, m_i)$  les traces et déterminants de la matrice jacobienne de  $A\sigma$  en  $m_i$ . Si un élément  $f$  de  $\Sigma^3$  a quatre points fixes  $p_i$  en lesquels

$$\delta(f, p_i) = \delta(g, m_i), \quad t(f, p_i) = t(g, m_i)$$

alors  $f$  et  $g$  sont dynamiquement conjugués via un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ . En effet comme  $f$  est dans  $\Sigma^3$  il ne peut avoir trois points fixes alignés donc les  $p_i$  peuvent être envoyés sur les  $m_i$  par un automorphisme et on conclut aisément.

### 3.6. Conjugaison birationnelle entre automorphismes de HÉNON

Ce qui suit étend le Théorème 3.23 aux transformations de HÉNON quadratiques.

**Proposition 3.25.** — Soient  $f$  et  $g$  deux automorphismes de HÉNON quadratiques. Si  $f$  et  $g$  sont birationnellement conjugués, ils le sont linéairement.

*Démonstration.* — À conjugaison linéaire près  $f$  est du type  $(1 + x_1 - ax_0^2, bx_0)$  et  $g$  de la forme  $(1 + x_1 - \alpha x_0^2, \beta x_0)$ . Notons  $\varphi$  la conjugante birationnelle. Soit  $m$  un point fixe de  $f$ ; on a  $\varphi(m) = g\varphi(m)$ . En utilisant la théorie des courants BEDFORD et SMILLIE ont démontré qu'un automorphisme de type HÉNON ne fixe pas de courbe algébrique dans  $\mathbb{C}^2$  (voir [10]) ; le point  $m$  n'est donc pas d'indétermination pour  $\varphi$ . Par conséquent  $\varphi$  est holomorphe au voisinage de  $m$  et  $\varphi(\text{Fix } f) = \text{Fix } g$ . Le même argument montre que  $\varphi^{-1}$  est holomorphe en  $\varphi(m)$ . Ainsi puisque  $D\varphi_{(\varphi(m))}^{-1} D\varphi_{(m)} = \text{id}$ , la transformation  $\varphi$  est un difféomorphisme local aux points fixes  $p_1$  et  $p_2$  de  $f$ . Si les  $q_j = \varphi(p_j)$  sont les points fixes de  $g$  on a :

$$(3.6.1) \quad (\det \text{jac } f_{(p_j)}, \text{tr}(\text{jac } f_{(p_j)})) = (\det \text{jac } g_{(q_j)}, \text{tr}(\text{jac } g_{(q_j)})).$$

Or un calcul immédiat montre qu'à permutation des indices près :

$$\text{jac } f_{(p_1)} = \begin{bmatrix} 1-b-\delta & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{jac } f_{(p_2)} = \begin{bmatrix} 1-b+\delta & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \sqrt{(1-b)^2 + 4a},$$

$$\text{jac } g_{(q_1)} = \begin{bmatrix} 1-\beta-\tilde{\delta} & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{jac } g_{(q_2)} = \begin{bmatrix} 1-\beta+\tilde{\delta} & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\delta} = \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\alpha}.$$

À partir de (3.6.1) on obtient  $b = \beta$  et

$$(3.6.2) \quad (1 - \beta - \tilde{\delta})(1 - \beta + \tilde{\delta}) = (1 - b - \delta)(1 - b + \delta)$$

soit  $(a, b) = (\alpha, \beta)$ . Remarquons que  $\delta$  et  $\tilde{\delta}$  sont définis à  $\pm 1$  près mais les produits (3.6.2) sont eux bien définis.  $\square$

**Problème.** Comme l'a suggéré le rapporteur l'énoncé qui suit semble pertinent : soient  $f$  et  $g$  deux automorphismes de type HÉNON conjugués par la transformation birationnelle  $h$ ; alors  $f$  et  $g$  sont conjugués par un automorphisme polynomial. On peut aussi espérer que  $h$  soit lui-même polynomial.

**Problème.** Deux transformations birationnelles quadratiques génériques topologiquement conjuguées le sont-elles par un automorphisme holomorphe (ou anti-holomorphe) ?

## CHAPITRE 4

### QUELQUES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES

#### 4.1. Stabilité algébrique

Rappelons une notion introduite dans [52]. Soient  $S$  une surface et  $f: S \dashrightarrow S$  une transformation birationnelle. On dit que  $f$  est *algébriquement stable* si pour toute courbe  $C$  de  $S$  et tout entier  $n$  positif,  $f^n(C)$  n'est pas un point d'indétermination de  $f$ . Dit autrement pour une transformation algébriquement stable la situation qui suit n'arrive pas :

$$\left. \begin{array}{ccccccc} & f & & f & & f & \dots & & f & & f \\ & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \end{array} \right\} \\ C$$

Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat plus général donné dans [45].

**Théorème 4.1.** — *Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA ;  $f$  n'est pas algébriquement stable si et seulement si il existe un entier  $k$  pour lequel  $\deg f^k < (\deg f)^k$ .*

*Démonstration.* — Soit  $k$  le plus petit entier pour lequel  $\deg f^k < (\deg f)^k$ ; il existe alors une transformation birationnelle  $h$  de degré strictement inférieur à  $(\deg f)^{k+1}$  et  $\varphi$  un polynôme homogène tels que en tant que triplet de formes homogènes  $f^{k+1} = \varphi h$ . On constate que l'image par  $f^k$  de tout point de la courbe d'équation  $\varphi = 0$  est d'indétermination pour  $f$ , i.e.  $f^k$  contracte une courbe sur un point d'indétermination.

Ce raisonnement donne en fait l'autre implication. □

Il y a d'autres façons de caractériser la stabilité algébrique (voir [46]).

Introduisons un invariant birationnel pour les transformations de CREMONA. Si  $f$  et  $g$  désignent deux éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , alors en général  $\deg(gfg^{-1}) \neq \deg f$ ; par contre il existe deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que pour tout entier  $n$  on ait ([45], Proposition 1.15) :

$$\alpha \deg f^n \leq \deg(gf^n g^{-1}) \leq \beta \deg f^n.$$

Le « taux de croissance des degrés » est donc un invariant birationnel : on appelle **premier degré dynamique** de  $f$  la quantité

$$\lambda(f) := \liminf(\deg f^n)^{1/n}.$$

On peut aussi définir cette notion pour une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne ([45]).

Lorsque  $f$  est algébriquement stable, on a  $\lambda(f) = \deg f$ . En particulier pour  $f = A\sigma$  avec  $A$  générique on a  $\lambda(A\sigma) = 2$ ; ceci est précisé ci-après.

Dans [45] DILLER et FAVRE montrent que toute transformation birationnelle  $f: S \dashrightarrow S$  d'une surface complexe compacte peut être rendue algébriquement stable : il existe un morphisme birationnel  $\pi: S' \rightarrow S$  tel que  $\pi^{-1}f\pi$  soit algébriquement stable. Bien que ce résultat soit important, nous ne l'utiliserons pas.

Soient  $A = (a_0x_0 + b_0x_1 + c_0x_2 : a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2)$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  et  $C$  une courbe contractée par  $(A\sigma)^{p+1}$  sur un point  $q$ , l'entier  $p$  étant minimal. La courbe  $\tilde{C} = (A\sigma)^p(C)$  est contractée par  $A\sigma$ ; par suite  $\tilde{C}$  est l'une des droites de  $\text{Exc } \sigma$ , disons  $x_2 = 0$ , et donc  $q = (c_0 : c_1 : c_2)$ . Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que  $q$  soit éclaté par  $(A\sigma)^{k+1}$  (avec  $k$  minimal) dit autrement  $(A\sigma)^k(q)$  est un point d'indétermination de  $\sigma$ , i.e. deux des composantes de  $(A\sigma)^k(q)$  sont nulles. Écrivons  $(A\sigma)^k$  sous la forme  $(P_0 : P_1 : P_2)$ ; visiblement les  $P_i$  sont des polynômes en  $(x_0, x_1, x_2)$  dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes universels à coefficients entiers positifs en les variables  $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ . Ceci permet de produire des exemples explicites de transformations  $A\sigma$  algébriquement stables ; en effet si  $A$  est une matrice à coefficients réels tous strictement positifs les  $P_i(c_0, c_1, c_2)$  sont strictement positifs. On obtient donc la :

**Proposition 4.2.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont des nombres réels strictement positifs ; la transformation  $A\sigma$  (resp.  $A\rho$ ) est algébriquement stable.

**Remarque 4.3.** — C'est la « positivité des coefficients » de  $\sigma$  et  $\rho$  qui permet d'obtenir l'énoncé 4.2. On trouve des coefficients de signes contraires dans l'expression de  $\tau$  ce qui ne permet pas d'avoir de façon rapide un énoncé de type 4.2. Voici comment on peut l'obtenir. Si l'élément  $h$  de  $\Sigma^1$  est un automorphisme de HÉNON,  $\deg h^n = 2^n = (\deg h)^n$  de sorte que  $h$  est algébriquement stable ; c'est par exemple le cas si  $h$  est de la forme  $(y, y^2 + x)$ . Pour  $A$  linéaire générique  $Ah$  est algébriquement stable de sorte qu'un élément générique de  $\Sigma^1$  est aussi algébriquement stable.

**Définition 5.** — Nous dirons qu'un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  a ses **coefficients algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$**  s'il possède un représentant  $A$  dans  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

De même une transformation  $A\sigma$  a ses coefficients algébriquement indépendants si c'est le cas pour  $A$ .

**Remarque 4.4.** — La condition ci-dessus est invariante sous l'action des automorphismes du corps  $\mathbb{C}$ . En fait deux automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  à coefficients algébriquement indépendants sont échangés par un automorphisme du corps  $\mathbb{C}$ ; en particulier toutes leurs propriétés de nature «

algébriques » sont conservées et il en est de même pour les  $A\sigma$ . Par contre la condition d'indépendance des coefficients n'est pas invariante par conjugaison dynamique. En effet si  $A\sigma$  a ses coefficients rationnellement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , elle possède quatre points fixes distincts tous situés en dehors de  $x_0x_1x_2 = 0$ . En conjuguant par une homothétie ad-hoc  $(\alpha_0x_0 : \alpha_1x_1 : \alpha_2x_2)$  on peut supposer par exemple que  $(1 : 1 : 1)$  est point fixe : on obtient ainsi une nouvelle transformation  $\tilde{A}\sigma$  conjuguée à la précédente mais dont les coefficients ne sont plus rationnellement indépendants.

Notons  $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$  l'ensemble des automorphismes du corps  $\mathbb{C}$ . Si  $A$  appartient à  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $\kappa$  à  $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , on désigne par  $A^\kappa$  l'élément obtenu en faisant agir  $\kappa$  sur les coefficients de  $A$ .

**Corollaire 4.5.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ ; alors  $A\sigma$  et  $(A\sigma)^{-1}$  sont algébriquement stables.

*Démonstration.* — Soit  $B$  un élément de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  dont tous les coefficients sont réels positifs et algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Les coefficients de  $B$  font partie d'une base de transcendance de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{Q}$ . Donnons-nous un élément  $A$  de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ ; il existe un automorphisme  $\kappa$  du corps  $\mathbb{C}$  tel que  $A = B^\kappa$ . Alors  $A\sigma = (B\sigma)^\kappa$  est algébriquement stable puisque  $B\sigma$  l'est.

Comme une transformation birationnelle  $f$  d'une surface  $S$  dans elle-même est algébriquement stable si et seulement si  $f^{-1}$  l'est ([67]) l'inverse de  $A\sigma$  est algébriquement stable.  $\square$

**Remarque 4.6.** — Dans le cas de  $\mathbb{P}^2$  on peut démontrer que le degré algébrique de  $f$  est aussi celui de  $f^{-1}$  (pour plus de détails voir la Remarque 6.3). En l'appliquant aux  $f^k$ , on obtient que  $f$  et  $f^{-1}$  sont simultanément algébriquement stables ou non.

**Remarque 4.7.** — On a un énoncé analogue lorsqu'on remplace  $A\sigma$  par  $A\rho$  ou  $A\tau$ .

Sous les mêmes hypothèses  $(A\sigma)^n$  (resp.  $(A\rho)^n$ , resp.  $(A\tau)^n$ ) est algébriquement stable.

## 4.2. Feuilletages et courbes invariants pour des transformations du type $A\sigma$

**4.2.1. Feuilletages invariants.** — Comme nous l'avons déjà évoqué au Chapitre 2 l'article [23] de CANTAT et FAVRE porte sur l'étude des feuilletages laissés invariants par les transformations birationnelles. Nous nous intéressons à ce problème dans le cadre quadratique en utilisant des techniques élémentaires.

Dans l'introduction nous avons mentionné que tout automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  possède des feuilletages invariants ; nous avons d'autre part rencontré des transformations birationnelles qui préservent une fibration rationnelle. Comme l'indique l'exemple suivant il existe des transformations birationnelles qui laissent invariant un feuilletage ne définissant pas une fibration. Considérons dans la carte affine  $x_2 = 1$  la transformation  $f$  de degré 3 définie par :

$$f(x_0, x_1) = (x_0^2x_1, x_0x_1).$$

L'élément  $f$  préserve les feuilletages associés aux formes différentielles

$$\omega_\eta = x_1 dx_0 + \eta x_0 dx_1, \quad \eta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

dont les feuilles sont transcendentes ; elles sont données par les « niveaux » de  $\log x_0 + \eta \log x_1$ . On peut démontrer que les seuls feuilletages invariants par  $f$  sont les deux précédents.

La Proposition qui suit montre que la présence de feuilletages invariants est rare.

**Proposition 4.8.** — *Un élément générique (au sens de BAIRE) de  $\text{Bir}_2$  ne possède pas de fibration invariante. Plus précisément un élément générique de  $\text{Bir}_2$  ne possède pas de feuilletage algébrique invariant.*

*Démonstration.* — Les notations étant celles du Chapitre 3, on considère dans le produit  $\mathcal{F}_n \times \text{Bir}_2$  le sous-ensemble fermé

$$\Lambda_n = \{([\omega], \phi) \in \mathcal{F}_n \times \text{Bir}_2 \mid \phi^* \omega \wedge \omega = 0\}.$$

Si  $([\omega], \phi)$  appartient à  $\Lambda_n$ , le feuilletage associé à  $\omega$  est invariant par  $\phi$ . Soit  $\pi_2$  la projection de  $\mathcal{F}_n \times \text{Bir}_2$  sur  $\text{Bir}_2$ . La projection de  $\Lambda_n$  par  $\pi_2$  est un fermé car les fibres de  $\pi_2$  sont compactes. Par suite  $\pi_2(\Lambda_n)$  est fermé algébrique dans  $\text{Bir}_2$ . BRUNELLA montre qu'un automorphisme de type HÉNON ne possède pas de feuilletage invariant ([19], p. 293). Le complément  $\mathcal{B}_n$  de  $\pi_2(\Lambda_n)$  est donc un ouvert de ZARISKI non vide dans  $\text{Bir}_2$ . En réinvokant qu'un automorphisme de HÉNON n'a pas de feuilletage invariant et que  $\text{Bir}_2$  est irréductible, on obtient que l'intersection  $\cap \mathcal{B}_n$  est non vide, d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 4.9.** — Il semble raisonnable de penser que si les coefficients de la matrice  $A$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , alors  $f = A\sigma$  ne possède pas de feuilletage invariant ; mais l'élimination directe de  $\omega$  dans l'identité  $f^* \omega \wedge \omega = 0$  s'avère pénible. Le Corollaire 4.11 qui établit ce fait est conséquence de la remarque qui suit.

**Remarque 4.10.** — Dans la Proposition 4.8 le terme « générique » signifie dans le complément d'une union dénombrable d'ensembles algébriques propres de  $\text{Bir}_2$ , en fait de chaque  $\Sigma^i$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ). En particulier pour  $A$  dans le complément d'une union dénombrable d'ensembles algébriques propres de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  la transformation  $A\sigma$  ne possède pas de feuilletage invariant. Puisqu'on ne peut écrire  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  comme une union dénombrable d'ensembles algébriques propres il existe des matrices  $A_0$  à coefficients indépendants sur  $\mathbb{Q}$  telles que  $A_0\sigma$  n'ait pas de feuilletage invariant. Mais alors (toujours en utilisant un automorphisme de corps ad hoc) pour toute matrice  $A$  à coefficients indépendants sur  $\mathbb{Q}$  on a la même propriété d'où l'énoncé suggéré dans la Remarque 4.9 :

**Corollaire 4.11.** — *Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont  $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants ; la transformation  $A\sigma$  ne possède pas de feuilletage invariant.*

**4.2.2. Courbes invariantes.** — Nous allons prouver qu’une transformation quadratique générique de type  $A\sigma$  ne possède pas de courbe invariante. Nous proposons deux démarches. La première ne concerne que les courbes invariantes irréductibles ; elle donne une classification des transformations ayant certains types de courbes invariantes. On pourrait penser procéder comme nous l’avons fait dans le cas des feuilletages, par dégénérescence sur un automorphisme de HÉNON, applications pour lesquelles cet énoncé est connu mais cette démarche ne convient pas.

Pour la première approche nous allons invoquer des arguments de nature dynamique. La seconde, qui s’appuie sur la première, traite des courbes non irréductibles (*i.e.* des courbes invariantes par les itérés) et invoque des arguments d’indépendance algébrique et de points fixes. Avant toute chose il faut rappeler qu’une courbe contractée par une transformation birationnelle est une courbe rationnelle, autrement dit de genre arithmétique zéro<sup>(1)</sup>. C’est une conséquence directe du théorème de NETHER ou, comme nous l’a signalé le rapporteur, une conséquence du théorème de CASTELNUOVO.

De nombreux auteurs se sont intéressés au problème des courbes invariantes. Dans sa thèse JACKSON décrit les transformations birationnelles quadratiques  $f$  qui préservent une courbe  $C$  et qui satisfont  $\text{Ind } f \cup \text{Ind } f^{-1} \subset C$  (voir [67]).

Comme une surface de RIEMANN compacte de genre  $g \geq 2$  ne possède qu’un nombre fini d’automorphismes, on devine que pour une transformation birationnelle le fait de posséder une courbe invariante de genre  $g \geq 2$  est très restrictif ; ceci est précisé par la :

**Remarque 4.12.** — Si  $f$  est une transformation birationnelle laissant une courbe  $C$  invariante, alors  $f|_C$  est un automorphisme de  $C$ . En particulier si le genre arithmétique de  $C$  est supérieur ou égal à 2, il existe un itéré  $f^n$  de  $f$  tel que  $C$  soit une courbe de points fixes de  $f^n$ .

Commençons par mentionner un cas particulier d’un résultat de DILLER, JACKSON et SOMMESE :

**Théorème 4.13** ([46]). — Soit  $f$  une transformation de CREMONA algébriquement stable telle que  $\lambda(f) > 1$ . Si  $C$  est une courbe invariante par  $f$ , alors le genre (arithmétique) de  $C$  est 0 ou 1.

Ce résultat est précisé par PAN dans [84] :

**Théorème 4.14** ([84]). — Soit  $C$  une courbe irréductible de  $\mathbb{P}^2$  de genre (arithmétique) strictement plus grand que 1. Soit  $f$  une transformation de CREMONA qui préserve  $C$ . On a :

- $\lambda(f) = 1$  et la suite  $(\deg f^n)_n$  croît au plus linéairement ;
- si  $f$  est conjugué à un automorphisme d’une surface rationnelle (lisse),  $f$  est d’ordre fini ;
- si la normalisation de  $C$  n’est pas hyperelliptique<sup>(2)</sup>,  $f$  est d’ordre fini.

1. Soit  $C$  une courbe plane ; on peut désingulariser  $C$  au sens suivant : il existe une courbe lisse  $C'$  et un morphisme  $\pi: C' \rightarrow C$  tel que  $\#\pi^{-1}(c) = 1$  pour tout point non singulier  $c$  de  $C$ . La courbe  $C'$  s’appelle *désingularisée* ou *normalisée* de  $C$ . Le *genre arithmétique* de  $C$  est par définition le genre topologique de  $C'$ .

2. Le prototype d’une courbe hyperelliptique est donnée par  $x^2 + P(y) = 0$  avec  $P$  polynôme scindé de degré supérieur ou égal à 3.

**Définition 6.** — Soit  $M$  un élément de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . On dit que les valeurs propres  $\eta_1, \eta_2$  de  $M$  sont résonnantes s'il existe des entiers  $m_1$  et  $m_2$  non tous deux nuls tels que  $\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} = 1$ . Un point fixe  $p$  d'une transformation birationnelle  $f$  sera dit **résonnant** si  $Df_{(p)}$  a ses valeurs propres résonnantes.

**Proposition 4.15.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont  $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants. Les points fixes de  $A\sigma$  sont non résonnants.

*Démonstration.* — On constate que

$$\{B\sigma \mid B \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})\} = \overline{\{A^\kappa\sigma \mid \kappa \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)\}}$$

où l'adhérence est prise au sens ordinaire. Remarquons que les points fixes de  $A\sigma$  sont en position générale ; en effet si trois d'entre eux étaient alignés, alors cette propriété, invariante par action d'un automorphisme de corps sur  $A$ , serait vérifiée par tous les  $B\sigma$  ce qui est absurde. Soit  $C$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  tel que les points fixes de  $g := CA\sigma C^{-1}$  soient

$$(0 : 0 : 1), \quad (0 : 1 : 0), \quad (1 : 0 : 0) \quad \text{et} \quad (1 : 1 : 1).$$

On note  $\Omega$  l'ensemble des éléments de  $\mathrm{Bir}_2$  fixant ces quatre points ; l'orbite de  $g$  sous l'action de  $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$  est dense dans  $\Omega$ . Supposons que  $A\sigma$  possède un point fixe résonnant ; alors  $g$  et  $g^\kappa$ , avec  $\kappa$  dans  $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , en possèdent un aussi, disons le point  $(0 : 0 : 1)$ . Maintenant il est facile de trouver un élément de  $\Omega$  non résonnant en  $(0 : 0 : 1)$ , par exemple en utilisant la forme normale donnée par la Proposition 3.22 (exercice).  $\square$

**Proposition 4.16.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . La transformation  $(A\sigma)^n$  n'a pas de courbe de points fixes pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Démonstration.* — Supposons que  $C$  soit une courbe de points fixes pour  $(A\sigma)^n$  ; si  $d$  est le degré de  $C$ , pour tout  $\kappa$  dans  $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , l'itéré  $n$ -ième de  $A^\kappa\sigma$  a une courbe de points fixes de degré  $d$ . En passant à l'adhérence de ZARISKI on obtient que pour tout  $f$  dans  $\Sigma^3$  l'itéré  $n$ -ième de  $f$  admet une courbe de points fixes de degré  $d$  ; puisque  $\Sigma^3$  est dense dans  $\mathrm{Bir}_2$  on en déduit que toute transformation birationnelle quadratique, et en particulier tout automorphisme de HÉNON, vérifie une telle propriété ce qui est interdit par la dynamique des transformations de HÉNON ([53]).  $\square$

**Remarque 4.17.** — Tous ces énoncés se généralisent aux transformations du type  $(A\rho)^n$  et  $(A\tau)^n$ .

**Remarque 4.18.** — L'hypothèse d'indépendance sur les coefficients de  $A$  est indispensable : on remarque par exemple que si  $A$  est du type

$$(\alpha x_0 - \alpha x_1 + x_2 : \beta x_0 - \beta x_1 + x_2 : \delta x_0 + (1 - \delta)x_1)$$

avec  $\alpha \neq \beta$ , l'élément  $A\sigma$  laisse la droite  $x_0 = x_1$  invariante.

**Proposition 4.19.** — Soit  $f = A\sigma$  une transformation birationnelle quadratique laissant une courbe rationnelle  $C$  invariante. Supposons que  $f$  soit algébriquement stable et que les itérés

de  $f$  n'aient ni courbe de points fixes, ni point fixe résonnant ; alors  $C$  est une droite, une conique lisse ou une cubique à point double.

*Démonstration.* — Si  $C$  est lisse de degré  $d$ , la formule d'HURWITZ dit que le genre de  $C$  est  $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$  ce qui assure que  $C$  est une droite ou une conique lisse.

Supposons désormais que  $C$  soit non lisse et que  $p$  soit un point singulier de  $C$ .

Montrons que  $A\sigma$  est un difféomorphisme local en  $p$ , i.e. que  $p$  n'est pas dans  $\text{Exc}\sigma \cup \text{Ind}\sigma$ . D'après [46] le point  $p$  n'est pas d'indétermination pour  $\sigma$ . Si  $p$  appartient à  $\text{Exc}\sigma \setminus \text{Ind}\sigma$ , alors  $A\sigma(p)$  est un point d'indétermination de  $(A\sigma)^{-1}$ . Le germe de  $A\sigma_p$  est du type

$$(u, v) \mapsto (u, uv)$$

à conjugaison locale g.d. près. En particulier il envoie courbe singulière irréductible sur courbe singulière ;  $A\sigma(p)$  est donc un point d'indétermination de  $(A\sigma)^{-1}$  mais aussi un point singulier ce qui est exclu (toujours d'après [46]). Ainsi  $A\sigma$  est un difféomorphisme local en  $p$  et  $A\sigma(C_p)$  est singulière.

Si  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  est la normalisation de  $C$  et  $\tilde{A}\sigma$  le relevé à  $\tilde{C}$  de la restriction  $A\sigma|_C$ , on note

$$\Lambda = \pi^{-1}(\text{Sing}(C)) = \{p_1, \dots, p_s\}.$$

Comme  $A\sigma$  est un difféomorphisme local en chaque point singulier de  $C$ , l'ensemble  $\Lambda$  est invariant par  $\tilde{A}\sigma$ . Puisque  $\tilde{C}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ ,  $\tilde{A}\sigma$  est conjugué à une translation ou une homothétie ;  $\Lambda$  compte donc au maximum deux points. En effet si  $\#\Lambda \geq 3$ , la transformation  $A\sigma$  est périodique en restriction à  $C$  ; il existe alors un entier  $n$  tel que  $C \subset \text{Fix}(A\sigma)^n$  ce qui est exclu d'après l'hypothèse. Notons qu'à chaque branche locale de  $C_p$  correspond un  $p_i$  ; par suite on a l'alternative suivante :

- $C$  a un seul point singulier  $p$  (qui est donc fixe) et  $C$  a au plus deux branches en  $p$  ;
- $C$  a deux points singuliers distincts  $q_1, q_2$  et  $C_{q_1}, C_{q_2}$  sont irréductibles.

Étudions ces différentes possibilités.

Remarquons que si un germe de difféomorphisme holomorphe de  $\mathbb{C}^2, 0$  fixe une courbe singulière irréductible ou bien deux courbes lisses tangentes ce point fixe est résonnant.

- Puisque les valeurs propres de la partie linéaire de  $A\sigma$  en  $p$  ne peuvent être résonnantes,  $C$  a un unique point singulier et  $C_p$  est un croisement ordinaire ; la formule du genre assure que  $C$  est une cubique à point double.
- On remarque que  $(A\sigma)^2$  fixe les points  $q_1$  et  $q_2$  ; comme  $C_{q_1}$  est irréductible non lisse, les valeurs propres de la partie linéaire de  $(A\sigma)^2$  en  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) sont alors résonnantes ce qui est impossible.

□

Comme toujours il y a un énoncé analogue pour les transformations génériques de  $\Sigma^2$  et  $\Sigma^1$ .

Comme on le voit les cubiques cuspidales n'apparaissent pas dans la Proposition 4.19. Certaines transformations quadratiques possèdent de telles cubiques invariantes ; dans [8] BEDFORD et KIM étudient la famille de transformations de CREMONA définie par :

$$g_{a,b} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0(x_1 + bx_0) : x_2(x_1 + bx_0) : x_0(x_2 + ax_0)).$$

Notons que les  $g_{a,b}$  ne sont pas algébriquement stables : la droite  $x_0 = 0$  est contractée par  $g_{a,b}$  sur  $(0 : 1 : 0)$ , point qui est éclaté par  $g_{a,b}$  sur la droite  $x_2 = 0$ .

Cette famille possède, pour certains paramètres, une cubique cuspidale invariante. Introduisons l'application

$$\varphi(t) = \left( \frac{t - t^3 - t^4}{(1+t)^2}, \frac{1 - t^5}{t^2(1+t)} \right)$$

et le polynôme

$$\begin{aligned} P_{t,a,b}(x_0, x_1, x_2) &= a(t-1)t^4x_0^3 + t(t-1)x_1x_2(tx_1 + x_2) \\ &\quad + x_0(2bt^3x_1x_2 + t^3(t-1)x_1^2 + (t-1)(1+bt)x_2^2) \\ &\quad + t^3(t-1)x_0^2(a(x_1 + tx_2) + t(x_1 + (t-2b)x_2)) \end{aligned}$$

BEDFORD et KIM établissent l'énoncé suivant.

**Théorème 4.20 ([8]).** — Soit  $t$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1, \mathbf{j}, \mathbf{j}^2\}$ . Alors pour  $(a, b) = \varphi(t)$  on a :

$$P_{t,a,b} \circ g_{a,b} = t \det \text{jac } g_{a,b} \cdot P_{t,a,b}$$

qui indique que  $P_{t,a,b} = 0$  est invariante par  $g_{a,b}$ .

Sous les hypothèses du théorème, la cubique irréductible d'équation  $P_{t,a,b} = 0$  invariante par  $g_{a,b}$  contient les deux points fixes de  $g_{a,b}$  :

$$p_1 = \left( \frac{t^3}{1+t}, \frac{t^3}{1+t} \right) \quad \text{et} \quad p_2 = \left( \frac{-1+t^2+t^3}{t^2(1+t)}, \frac{-1+t^2+t^3}{t^2(1+t)} \right)$$

et a son cusp en  $p_1$ .

**Proposition 4.21.** — Soit  $f = A\sigma$  une transformation birationnelle quadratique laissant invariante une courbe irréductible  $C$  de genre arithmétique 1. Supposons que  $f$  soit algébriquement stable et que les itérés de  $f$  n'aient pas de courbe de points fixes ; alors  $C$  est une cubique lisse.

*Démonstration.* — En utilisant des arguments de la démonstration de la Proposition 4.19 on montre que  $C$  est lisse. La restriction de  $f$  à  $C$  induit un automorphisme de la normalisée qui laisse invariant le relevé de l'ensemble singulier de  $C$ . Mais sur une courbe elliptique un automorphisme qui possède une orbite finie est d'ordre fini, ce qui est exclu par hypothèse ; ainsi  $C$  est une courbe elliptique lisse de  $\mathbb{P}^2$  donc une cubique lisse.  $\square$

Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux transformations birationnelles quadratiques préservant une cubique lisse :

**Lemme 4.22.** — Soit  $C$  une cubique lisse. On suppose que  $C' = \sigma(C)$  est aussi une cubique lisse ; alors  $C$  passe par les trois points d'indétermination de  $\sigma$ .

*Démonstration.* — Soient  $h$  et  $h'$  dans  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3$  définissant respectivement  $C$  et  $C'$  ; l'hypothèse implique que :

$$h \circ \sigma = x_0^\alpha x_1^\beta x_2^\gamma h', \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 3.$$

À permutation des coordonnées près le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  prend les valeurs  $(3, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$  ou  $(1, 1, 1)$ . Dans le premier cas un calcul direct montre que  $C$  est l'union de trois droites et dans le second que  $C$  est singulière. On vérifie, dans la dernière éventualité, que  $h$  est du type

$$ax_0^2x_1 + bx_0^2x_2 + cx_0x_1^2 + dx_0x_2^2 + ex_1^2x_2 + fx_1x_2^2 + gx_0x_1x_2.$$

□

Notons que si  $C$  et  $C'$  sont comme dans l'énoncé  $\sigma$  réalise un automorphisme entre  $C$  et  $C'$  de sorte que ces deux cubiques ont même invariant  $j$ ; on en déduit l'existence d'un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  échangeant  $C$  et  $C'$  (voir [62]).

Soit  $\mathcal{T}$  l'espace des polynômes homogènes de degré 3 s'annulant aux trois points d'indétermination de  $\sigma$ . L'application  $\sigma$  induit un isomorphisme linéaire  $\tilde{\sigma} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  défini dans la base  $\{x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_0x_1x_2\}$  par

$$\tilde{\sigma} : (a, b, c, d, e, f, g) \mapsto (f, e, d, c, b, a, g).$$

Les cubiques invariantes par  $\sigma$  correspondent à l'espace linéaire  $\text{Fix } \tilde{\sigma}$  qui est de dimension projective 3.

Soient  $C$  une cubique lisse associée à un élément de  $\mathcal{T}$  et  $C' = \sigma(C)$ . Soit  $A$  un isomorphisme linéaire tel que  $A(C') = C$ ; la cubique  $C$  est alors invariante par  $A\sigma$ . Notons qu'il existe un nombre fini de tels isomorphismes. L'ensemble des éléments  $A$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $A\sigma$  laisse une cubique lisse invariante est d'adhérence une variété algébrique définie sur  $\mathbb{Q}$  de dimension  $\dim \mathbb{P}\mathcal{T} = 6$ .

Plus généralement soit  $C$  une cubique lisse; donnons-nous trois points  $p_1, p_2$  et  $p_3$  non alignés sur  $C$ . À ce triplet de points  $p = (p_1, p_2, p_3)$  on peut associer  $\sigma_p$  une transformation quadratique de CREMONA telle que  $\text{Ind } \sigma_p = \{p_1, p_2, p_3\}$ . L'image de  $C$  par  $\sigma_p$  est encore une cubique isomorphe à  $C$  et il existe une application linéaire  $A_p$  (en fait il en existe un nombre fini) telle que  $A_p\sigma_p(C) = C$ . Nous noterons  $\varphi_p$  les transformations  $A_p\sigma_p$ . L'espace des cubiques lisses est de dimension 9, celui des triplets de points sur une cubique de dimension 3; ainsi l'espace des éléments de  $\Sigma^3$  qui laissent invariante une cubique lisse est de dimension  $9 + 3 = 12$ .

En particulier on obtient le :

**Corollaire 4.23.** — *Génériquement une transformation de  $\Sigma^3$  ne possède pas de courbe invariante de genre arithmétique 1.*

*Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ ; si les coefficients de  $A$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , alors  $A\sigma$  ne préserve pas de telle courbe.*

*Démonstration.* — Le premier point résulte des considérations de dimension qui précèdent.

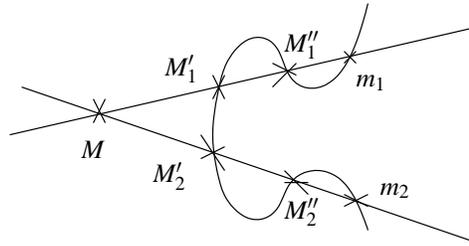
Pour le second, si  $A\sigma$  possédait une courbe elliptique invariante il en serait de même pour  $A^\kappa\sigma$  et ce pour tout  $\kappa$  dans  $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ; comme les orbites dynamiques des  $A^\kappa\sigma$  sont denses dans  $\Sigma^3$  ceci contredit les calculs de dimensions ci-dessus. □

Dans [86] PAN a démontré que le groupe  $\text{Bir}(C)$  des transformations birationnelles qui laissent invariante la cubique lisse  $C$  est engendré par les transformations  $\varphi_p = A_p\sigma_p$ .

Montrons que tout automorphisme abstrait de  $C$  est la restriction ou bien d'un  $\varphi_p$ , ou bien d'un isomorphisme linéaire. On désigne par  $\text{Aut}(C)$  le groupe des automorphismes de  $C$  vue comme courbe elliptique abstraite  $\mathbb{C}/\Lambda$ . En suivant une idée de PAN ([85]) nous allons démontrer que le morphisme de restriction

$$\text{Bir}(C) \rightarrow \text{Aut}(C)$$

est surjectif. Pour cela fixons deux points génériques  $m_1, m_2$  de  $C$  et  $T$  un élément de  $\text{Aut}(C)$ . Soit  $M$  un point générique du plan projectif complexe ; on note  $m_1, M'_1$  et  $M''_1$  (resp.  $m_2, M'_2$  et  $M''_2$ ) les points d'intersection de la droite  $(Mm_1)$  (resp.  $(Mm_2)$ ) avec la cubique  $C$  :



Les couples de points  $T(M'_i)$  et  $T(M''_i)$  déterminent deux droites dont l'intersection est notée  $\tilde{T}(M)$ . L'application  $\tilde{T}$  coïncide avec  $T$  sur  $C$  et est visiblement birationnelle puisque  $\tilde{T}^{-1}$  inverse  $\tilde{T}$ , d'où la surjectivité de l'application de restriction :  $\text{Bir}(C) \rightarrow \text{Aut}(C)$ .

Revenons aux transformations quadratiques  $\varphi_p$ . En fait chaque triplet  $p$  produit un nombre fini de telles applications, autant qu'il y a d'automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  qui fixent  $C$ . L'application  $R : p \mapsto \varphi_{p|_C}$  peut donc être vue comme une application algébrique multivaluée de l'espace des triplets de points distincts de  $C$  dans  $\text{Aut}(C)$ . En général  $\text{Aut}(C)$  s'identifie topologiquement à l'union de deux exemplaires  $C_+$  et  $C_-$  de  $C$  (sauf pour les cubiques spéciales  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$  et  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\mathbf{j}]$ ) :

$$C_+ \simeq \{z+a \mid a \in \mathbb{C}/\Lambda\} \quad \text{et} \quad C_- \simeq \{-z+a \mid a \in \mathbb{C}/\Lambda\}.$$

Si on écrit  $C$  sous forme normale de WEIERSTRASS  $x_1^2 = x_0(x_0 - 1)(x_0 - \eta)$  on constate que l'automorphisme  $\ell : (x_0, x_1) \mapsto (x_0, -x_1)$  laisse  $C$  invariante et sa restriction  $\ell|_C$  est dans la composante  $C_-$ ; l'image de  $R$  intersecte donc  $C_+$  et  $C_-$ .

Remarquons que  $R$  est non constante en tant qu'application multivaluée ; si elle l'était  $\{\varphi_{p|_C}\}$  engendrerait un groupe dénombrable dans  $\text{Aut}(C)$  ce qui contredirait la surjectivité de

$$\text{Bir}(C) \rightarrow \text{Aut}(C)$$

puisque  $\text{Bir}(C)$  est engendré par les  $\varphi_p$ .

Il en résulte, dans le cas des cubiques génériques, que l'image de  $R$  évite au plus un nombre fini d'éléments de  $\text{Aut}(C)$  (en particulier l'identité). Ainsi tout automorphisme de  $C$ , sauf peut-être un nombre fini, est restriction d'un certain  $\varphi_p$ .

**Remarque 4.24.** — Soient  $p = (p_1, p_2, p_3)$  un triplet de points distincts appartenant à  $C$  et  $a$  un élément de la cubique  $C$  que l'on considère avec « sa » structure de groupe. Alors, pour chaque  $a$ , l'application  $\varphi_{p+a}$ , avec  $p+a = (p_1+a, p_2+a, p_3+a)$ , est bien définie. Comme  $C$  est compacte l'application  $a \mapsto \varphi_{p+a|_C}$  est constante (sinon  $\varphi_p$  serait surjective).

Nous passons maintenant à l'étude des transformations birationnelles de type  $A\sigma$  laissant une courbe de genre nul invariante.

**Proposition 4.25.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  défini par

$$(a_0x_0 + b_0x_1 + c_0x_2 : a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2).$$

La transformation  $A\sigma$  laisse une droite invariante  $\mathcal{D}$  si, à conjugaison dynamique par une permutation de coordonnées près, on a :

$$a_0c_1^2 + c_0c_1(b_0 - a_1) - b_1c_0^2 = 0.$$

*Démonstration.* — Remarquons que  $\mathcal{D}$  passe nécessairement par un des points de  $\text{Ind}\sigma$ , par exemple  $(0 : 0 : 1)$ . Plaçons-nous dans la carte  $x_2 = 1$  et supposons que  $\mathcal{D}$  soit paramétrée par  $x_0 \mapsto (x_0, tx_0)$ ; en écrivant l'invariance de  $\mathcal{D}$  on obtient

$$x_0(a_0t^2 + t(b_0 - a_1) - b_1) + tx_0^2(tc_0 - c_1) = 0.$$

Comme  $t$  ne peut être nul ( $x_1 = 0$  est une droite contractée par  $A\sigma$ ) on constate que  $c_1 = tc_0$  d'où l'alternative :

- $c_0 = c_1 = 0$  et  $a_0t^2 + (b_0 - a_1)t - b_1 = 0$ ;
- $t = c_1/c_0$ ; en substituant cette valeur de  $t$  dans  $(a_0t^2 + t(b_0 - a_1) - b_1)$  on obtient

$$a_0c_1^2 + c_0c_1(b_0 - a_1) - b_1c_0^2 = 0.$$

Dans les deux cas la condition annoncée est satisfaite. □

**Remarque 4.26.** — Le cas  $c_0 = c_1 = 0$ , qui apparaît en cours de preuve, correspond aux transformations de type  $A\sigma$  qui laissent la fibration  $x_1/x_0$  invariante.

Remarquons aussi que si une transformation  $A\sigma$  laisse invariante une fibration en droites, alors, à permutation près des coordonnées, il s'agit de la fibration  $x_1/x_0 = \text{cte}$ . Les  $A$  convénables sont du type

$$(a_0x_0 + b_0x_1 : a_1x_0 + b_1x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2);$$

ces transformations forment un groupe.

**Remarque 4.27.** — Les éléments de  $\text{Bir}_2$  possédant une droite invariante forment un ensemble algébrique dont la trace sur  $\Sigma^3$  est une hypersurface.

Passons maintenant à l'étude des transformations préservant une conique. Soit  $C$  une conique lisse;  $\sigma(C)$  est une conique lisse si et seulement si, à permutation près des coordonnées,  $C$  est du type suivant :

$$C_{ab} : x_2^2 + ax_1x_2 + bx_0x_2 + x_0x_1 = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}, 2ab - 1 \neq 0.$$

L'image par  $\sigma$  de  $C_{ab}$  est la conique  $C_{ba}$  de sorte que la permutation

$$P : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 : x_0 : x_2)$$

échange ces deux coniques. Soit  $f = A\sigma$  une transformation laissant invariante une conique  $C$ . À permutation près des coordonnées  $C$  est de type  $C_{ab}$ ; les égalités

$$C_{ab} = A\sigma(C_{ab}) = A(C_{ba}) = AP(C_{ab})$$

impliquent la :

**Proposition 4.28.** — Soient  $f = A\sigma$  laissant une conique lisse invariante et  $P$  l'involution définie par  $(x_1 : x_0 : x_2)$ . À permutation près des coordonnées  $C$  est donnée par

$$x_2^2 + ax_1x_2 + bx_0x_2 + x_0x_1 = 0$$

et  $AP$  appartient au groupe orthogonal  $\mathbf{O}(x_2^2 + ax_1x_2 + bx_0x_2 + x_0x_1)$ .

**Remarque 4.29.** — Lorsque  $a = b$  l'involution  $\sigma$  laisse  $C_{aa}$  invariante et dans ce cas  $A$  est dans le groupe orthogonal  $\mathbf{O}(C_{aa})$ .

Pour terminer le cas des courbes rationnelles apparaissant dans la Proposition 4.19, étudions les cubiques à point double. L'image par  $\sigma$  d'une cubique à point double  $\mathcal{C}$  d'équation

$$(4.2.1) \quad ax_0^2x_1 + bx_0^2x_2 + cx_0x_1^2 + dx_0x_2^2 + ex_1^2x_2 + gx_1x_2^2 + hx_0x_1x_2 = 0$$

est encore une cubique à point double (il s'agit ici de cubiques passant par les trois points d'indétermination de  $\sigma$ ). Mais il y a d'autres formes normales ayant la même propriété (correspondant à d'autres choix que  $(1, 1, 1)$  pour le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  apparaissant dans la démonstration du Lemme 4.22). Ainsi la cubique d'équation

$$(4.2.2) \quad ax_2^3 + bx_0x_1^2 + cx_0x_2^2 + dx_1^2x_2 + ex_1x_2^2 + gx_0x_1x_2 = 0$$

est envoyée par  $\sigma$  sur

$$ax_0x_1^2 + bx_2^3 + cx_1^2x_2 + dx_0x_2^2 + ex_0x_1x_2 + gx_1x_2^2 = 0$$

(induisant d'ailleurs l'application  $(a, b, c, d, e, g) \mapsto (b, a, d, c, g, e)$ ). Pour des valeurs générales de  $a, b, c, d, e, g$  la cubique correspondante possède un point double en  $(1 : 0 : 0)$  qui est précisément d'indétermination pour  $\sigma$ .

On vérifie facilement que les cubiques données par (4.2.1) et (4.2.2) sont, à permutation de coordonnées près, les seules cubiques à point double ayant leur image par  $\sigma$  encore cubique.

Soit  $f = A\sigma$  une transformation birationnelle quadratique laissant invariante une cubique à point double  $\mathcal{C}$ ; alors  $\sigma(\mathcal{C})$  est encore une cubique à point double. Comme à conjugaison linéaire près toutes les cubiques à point double sont les mêmes, il existe  $A_0$  dans  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  tel que  $\sigma(\mathcal{C}) = A_0(\mathcal{C})$  de sorte que  $\mathcal{C} = AA_0(\mathcal{C})$ . Le groupe des transformations linéaires qui laissent invariante une cubique à point double est fini. Par exemple si  $\mathcal{C}_0$  est la cubique de WEIERSTRASS :  $x_1^2x_2 = x_0^2(x_0 - x_2)$ ; on vérifie que ce groupe est formé des transformations :

$$\begin{aligned} \text{id,} & & (4\alpha x_0 + 4x_1 : 4x_0 - 4\alpha x_1 : 9\alpha x_0 + 3x_1 - 8\alpha x_2), \\ (x_0 : -x_1 : x_2), & & (4\alpha x_0 - 4x_1 : 4x_0 + 4\alpha x_1 : 9\alpha x_0 - 3x_1 - 8\alpha x_2) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  satisfait  $3\alpha^2 = 1$ .

Pour résumer nous obtenons la :

**Proposition 4.30.** — Soit  $\mathcal{C}$  une cubique à point double. L'ensemble des transformations  $A\sigma$  qui laissent invariante  $\mathcal{C}$  est fini.

**Remarque 4.31.** — Puisque deux cubiques à point double dans  $\mathbb{P}^2$  sont linéairement conjuguées, une telle cubique est invariante par une infinité de transformations quadratiques de  $\Sigma^3$ ; on peut préciser cela par un argument essentiellement identique à celui des cubiques lisses (choix des triplets  $(p_1, p_2, p_3)$  l'un des  $p_i$  pouvant être au point double).

De la même façon on établit que génériquement un élément de  $\Sigma^3$  ne possède pas de cubique à point double invariante.

Finalement on en déduit la :

**Proposition 4.32.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . La transformation quadratique  $A\sigma$  ne possède pas de courbe irréductible invariante.

En utilisant ce fait nous allons montrer un résultat plus général :

**Théorème 4.33.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont  $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants. La transformation quadratique  $A\sigma$  ne possède pas de courbe (éventuellement non irréductible) invariante.

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde ; nous réutilisons ici les notations  $f$  pour l'application quadratique de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}^3$  et  $f^\bullet$  pour l'application induite sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^2$ . Soient  $\Gamma$  une courbe invariante par  $f^\bullet = A^\bullet \sigma^\bullet$  et  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_s$  la décomposition de  $\Gamma$  en facteurs irréductibles, chaque  $\Gamma_i$  étant décrit par une équation irréductible  $h_i = 0$ . Bien sûr la surface  $h_i = 0$  est invariante par l'application polynomiale  $f$ . Les coefficients de  $A$  étant algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , la transformation  $f^\bullet$  est algébriquement stable ; il s'en suit que

$$(4.2.3) \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}, \quad \exists l \in \{1, \dots, s\} \text{ tel que } f^\bullet(\Gamma_i) = \Gamma_l.$$

Écrivons que  $\Gamma$  est invariante par  $f^\bullet$  :

$$h \circ f = h\eta \quad \text{avec} \quad h = h_1 \dots h_s;$$

notons que le théorème de la fonction implicite, appliqué en un point générique de  $\Gamma$ , assure que  $\eta$  n'est pas divisible par les  $h_i$ . Remarquons que  $\eta = 0$  est formé de branches de

$$\text{Exc } f^\bullet = \{x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0\}.$$

En effet supposons que  $\gamma$  soit une branche des zéros de  $\eta$ , alors  $h(f(\gamma)) = 0$ . Si  $\gamma$  n'est pas contractée par  $f^\bullet$ , alors  $f^\bullet(\gamma)$  coïncide avec l'un des  $\Gamma_k$ ; d'après (4.2.3) il existe  $1 \leq i \leq s$  tel que  $f^\bullet(\gamma) = f^\bullet(\Gamma_i)$  ce qui n'est pas possible. L'invariance de  $\Gamma$  se réécrit donc

$$h(A\sigma) = \mu h x_0^p x_1^q x_2^r, \quad (p, q, r) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{0\}, \quad \mu \in \mathbb{C}^*.$$

Puisque  $A$  a ses coefficients algébriquement indépendants  $f^\bullet$  a quatre points fixes en position générale qui sont non résonnants. Après une conjugaison dynamique du type  $(\alpha x_0 : \beta x_1 : \gamma x_2)$

le point  $(1 : 1 : 1)$  est fixe par  $f = A\sigma : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ . Ceci revient à supposer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \text{ est stochastique}$$

$$(4.2.4) \quad a_i + b_i + c_i = 1, \quad i = 0, 1, 2.$$

Évidemment cette conjugaison détruit l'hypothèse de  $\mathbb{Q}$ -indépendance des coefficients de  $A$  mais puisque cette modification est faite par conjugaison on garde par exemple la propriété qu'il n'y a pas de courbe irréductible invariante. À partir de

$$h \circ f = \mu(x_0^p x_1^q x_2^r)h$$

on obtient  $h(1, 1, 1) = \mu h(1, 1, 1)$ . Si  $h(1, 1, 1) = 0$ , le germe de  $\Gamma$  en  $(1 : 1 : 1)$  est invariant par  $f^\bullet$ . Mais ce point fixe est comme nous l'avons dit non résonnant. La théorie élémentaire des difféomorphismes locaux ([2]) assure que le germe de  $f^\bullet$  en  $(1 : 1 : 1)$  possède exactement deux germes de courbes invariantes (qui sont d'ailleurs lisses et transverses). Mieux tout germe de courbe invariant par un itéré de  $f^\bullet$  est encore l'une de ces deux branches. Par suite le germe de  $\Gamma$  a en  $(1 : 1 : 1)$  une ou deux branches locales et chacune de ces branches est invariante par  $f^\bullet$ . Par suite la composante irréductible de  $\Gamma$  qui contient l'une de ces branches locales est une courbe irréductible invariante, cas exclu par généralité. Il en résulte que  $h(1, 1, 1)$  est non nul et  $\mu$  vaut 1. Comme l'un des entiers  $p, q, r$  est non nul, nous allons supposer que  $r \neq 0$ . Considérons maintenant la transformation  $\tilde{f} = \tilde{A}\sigma$  définie par

$$(a_0(x_1 - x_0)x_2 + x_0x_1, a_1(x_1 - x_0)x_2 + x_0x_1, a_2(x_1 - x_0)x_2 + x_0x_2).$$

Pour  $a_0, a_1$  et  $a_2$  génériques  $\tilde{f}$  induit une transformation birationnelle et on constate que

$$\tilde{f}(1, 1, 1) = (1, 1, 1), \quad \tilde{f}(1, 1, 2) = (1, 1, 2).$$

On remarque que le point  $(1, 1, 2)$  n'est pas sur la surface  $x_0^p x_1^q x_2^r = 1$ . En particulier parmi les transformations  $g = B\sigma$  satisfaisant (4.2.4) la propriété suivante est générique

$$(4.2.5) \quad g \text{ possède un point fixe } m \text{ situé en dehors de } x_0^p x_1^q x_2^r = 1.$$

Il en est donc ainsi pour  $f$ ; en effet si ce n'était pas le cas, alors, pour tout automorphisme de corps  $\kappa$ , les éléments  $f^\kappa = A^\kappa\sigma$  auraient tous leurs points fixes sur  $x_0^p x_1^q x_2^r = 1$  ce qui contredirait la propriété (4.2.5). Pour un tel point fixe  $m$  on a

$$h(m) = h(f(m)) = (x_0^p x_1^q x_2^r)(m)h(m),$$

égalité qui conduit à  $h(m) = 0$ . Le même raisonnement que précédemment assure que  $f$  préserve une composante de  $h = 0$  passant par  $m$  et donc que  $f^\bullet$  a une courbe irréductible invariante : contradiction avec la Proposition 4.32.  $\square$

**Théorème 4.34.** — *Soit  $A\sigma$  une transformation de  $\mathring{\text{Bir}}_2$  algébriquement stable. Supposons que  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$  soient des courbes (irréductibles ou non) invariantes par  $A\sigma$ . Dès que  $s \geq 5$ , l'élément  $A\sigma$  préserve une fibration.*

*Démonstration.* — Chaque  $\Gamma_i$  est donné par une équation réduite  $h_i = 0$ ; l'invariance de  $\Gamma_i$  par la transformation  $f = A\sigma$  se traduit par

$$h_i \circ f = \mu_i x_0^{p_i} x_1^{q_i} x_2^{r_i} h_i, \quad \mu_i \in \mathbb{C}^*, (p_i, q_i, r_i) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{0\}.$$

On en déduit pour tous les entiers  $n_1, \dots, n_s$  l'égalité

$$h_1^{n_1} \dots h_s^{n_s} \circ f = \mu_1^{n_1} \dots \mu_s^{n_s} h_1^{n_1} \dots h_s^{n_s} x_0^{\sum_{i=1}^s n_i p_i} x_1^{\sum_{i=1}^s n_i q_i} x_2^{\sum_{i=1}^s n_i r_i}.$$

Dès que  $s \geq 5$  on peut trouver des entiers  $n_i$  dans  $\mathbb{Z}$  non triviaux tels que

$$\sum_{i=1}^s n_i \begin{bmatrix} \deg h_i \\ p_i \\ q_i \\ r_i \end{bmatrix} = 0;$$

l'élément  $f$  préserve alors la fibration définie par  $h_1^{n_1} \dots h_s^{n_s}$ .  $\square$

En faisant un raisonnement analogue sur les branches de  $\det \text{jac } f$  pour une transformation birationnelle  $f$  de degré quelconque on obtient le :

**Théorème 4.35.** — *Soit  $f$  une transformation de CREMONA algébriquement stable de degré  $\nu$ . Il existe un entier  $N(\nu)$  tel que : dès que  $f$  possède plus de  $N(\nu)$  courbes invariantes  $f$  préserve une fibration.*

**Remarque 4.36.** — Dans [21] CANTAT traite un problème analogue dans un contexte plus général.

### 4.3. Exemples de transformations quadratiques préservant une fibration rationnelle

Donnons quelques exemples de transformations birationnelles préservant des fibrations rationnelles qui peuvent être des fibrations en coniques, en cubiques à point double, en cubiques cuspidales, etc. Ces exemples proviennent de la classification des flots (voir Chapitre 2).

- Soit  $\beta$  un rationnel ; la famille de transformations

$$g_{\beta,t} = \left( \left( x_0 + \frac{1 - e^{-(\beta+1)t}}{(\beta+1)x_1} \right) e^{\beta t}, e^t x_1 \right)$$

présERVE la fibration rationnelle donnée par  $\frac{x_1^{1+\beta}}{1+(1+\beta)x_0x_1} = \text{cte}$  fibre à fibre. Elle préserve aussi  $x_1 = \text{cte}$  mais en déplaçant les fibres. Pour  $1 + \beta = n$  entier cela donne la fibration

$$\alpha x_1^n - x_2^n - n x_1 x_2^{n-2} = 0.$$

On constate que  $g_{2,t}$  laisse une fibration en cubiques à point double invariante : dans la carte  $x_0 = 1$  la famille des courbes invariantes est donnée par  $\alpha x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2 = 0$ .

- Pour tout  $\beta$  rationnel la famille  $\left(\beta \frac{(e^{-2\beta t} + 1)x_0 + \beta(e^{-2\beta t} - 1)}{(e^{-2\beta t} - 1)x_0 + \beta(e^{-2\beta t} + 1)}, e^t x_1\right)$  préserve la fibration rationnelle  $x_1^{2\beta} \left(\frac{x_0 + \beta}{x_0 - \beta}\right) = \text{cte}$  fibre à fibre ; lorsque  $\beta$  vaut 1 c'est une fibration en cubiques à point double.
- On constate que les transformations  $\left(\frac{x_1^2 t + x_1 t^2 + x_0 x_1 + \frac{t^3}{3}}{x_1 + t}, x_1 + t\right)$  laissent invariante la fibration en cubiques à point double  $x_1^3 - 3x_0 x_1 = \text{cte}$  fibre à fibre.
- La famille de transformations  $\left(\frac{x_0(e^t x_1 + 1)}{(x_1 + 1)e^t}, e^t x_1\right)$  laisse la fibration en coniques  $\frac{x_0 x_1}{x_1 + 1} = \text{cte}$  invariante fibre à fibre ; dans la carte  $x_1 = 1$ , cette famille de paraboles tangentes est donnée par  $\frac{x_0}{x_2(1+x_2)} = \text{cte}$ .
- L'élément  $\left(x_0 + t(\beta + x_1^2) + t^2 x_1 + \frac{t^3}{3}, x_1 + t\right)$  de  $\text{Bir}_2$  préserve la fibration en cubiques cuspidales  $3\beta x_1 + x_1^3 - 3x_0 = \text{cte}$  (se placer dans la carte affine  $x_0 = 1$ ).
- Soit  $\beta$  dans  $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ ; on note que  $\left(x_0 e^{\beta t} + \frac{x_1^2}{2-\beta}(e^{2t} - e^{\beta t}), x_1 e^t\right)$  préserve la fibration rationnelle  $\frac{x_1^\beta}{x_1^2 + (\beta-2)x_0} = \text{cte}$  fibre à fibre.

- Les transformations

$$\left(\frac{x_0(x_1 + 1)e^t}{(e^t x_1 + 1)}, e^t x_1\right),$$

resp.

$$\left(\frac{e^t(4x_0 x_1 + 2x_0 - 1) + 2x_0 + 1}{2(e^t(2x_1 + 1 - 2x_0) + 1 + 2x_0)}, e^t x_1\right),$$

resp.

$$\left(\frac{x_0 x_1}{x_1 - x_0 + e^{-t} x_0}, e^t x_1\right)$$

préservent fibre à fibre les fibrations en coniques

$$\frac{x_1}{x_0(x_1 + 1)} = \text{cte}, \quad \text{resp.} \quad \frac{x_1(1 + 2x_0)}{(x_1 + 1)(1 - 2x_0)} = \text{cte}, \quad \text{resp.} \quad \frac{x_0 x_1}{x_1 - x_0} = \text{cte}.$$

#### 4.4. Transformations ayant une courbe de points fixes

Dans ce paragraphe nous examinons les différentes courbes de points fixes possibles pour une transformation quadratique.

Comme on l'a vu au Lemme 4.16 dès que  $A$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , la transformation  $(A\sigma)^n$  (resp.  $(A\rho)^n$ ) n'a pas de courbe de points fixes, phénomène que l'on observe déjà pour les automorphismes. Commençons par énoncer le :

**Théorème 4.37** ([86], **Théorème 1.3.**, [17], **Théorème 1.1.**). — Soient  $C$  une courbe algébrique irréductible dans  $\mathbb{P}^2$  et  $f$  une transformation de CREMONA non linéaire laissant  $C$  invariante.

- Si  $C$  est lisse de genre plus grand ou égal à 1, alors  $C$  est une cubique lisse.
- Si le genre géométrique de  $C$  est supérieur ou égal à 2 et si  $f$  est l'identité sur  $C$ , alors ou bien  $f$  est conjuguée à une transformation de JONQUIÈRES, ou bien  $f$  est périodique de période inférieure ou égale à 3.

**Exemple 4.38.** — Soit  $P$  un polynôme de degré  $2d + 2$  sans racine multiple ; la transformation de JONQUIÈRES définie par

$$\left( \frac{x_0 + P(x_1)}{x_0 + 1}, x_1 \right)$$

fixe point par point la courbe hyperelliptique  $x_0^2 = P(x_1)$ .

Rappelons qu'une courbe invariante point par point par une transformation birationnelle quadratique est nécessairement de degré inférieur ou égal à 2 (Proposition 3.6). En fait dans [14] BLANC montre le :

**Théorème 4.39** ([14]). — Soient  $C$  une cubique plane lisse et  $G$  le groupe des transformations birationnelles qui fixent  $C$  point par point. Un élément non trivial de  $G$  est de degré au moins 3. De plus, les éléments de degré 3 de  $G$  engendrent  $G$ .

On décrit maintenant les transformations quadratiques qui ont une courbe de points fixes ; les trois énoncés qui suivent s'obtiennent par des calculs élémentaires.

Comme on l'a déjà dit, pour que l'image d'une droite par  $\sigma$  soit encore une droite, il faut qu'elle passe par l'un des trois points d'indétermination de  $\sigma$  et soit distincte de  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$ ; de même l'image par  $\sigma$  d'une conique  $C$  est encore une conique si  $C$  passe par deux des points d'indétermination de  $\sigma$ . D'où la :

**Proposition 4.40.** — À conjugaison dynamique par permutation et homothéties près on a :

- les transformations  $A\sigma$  qui possèdent une droite de points fixes s'écrivent

$$(\alpha(x_1 - x_0)x_2 + x_0x_1 : (x_1 - x_0)x_2 + x_0x_1 : \gamma(x_1 - x_0)x_2 + x_0x_2)$$

avec  $\alpha, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\alpha \neq \gamma$  (ici la droite de points fixes est la droite d'équation  $x_0 = x_1$ );

- la transformation  $A\sigma$  a une conique lisse de points fixes si elle est du type :

$$(x_0x_1 : \alpha x_1x_2 - x_0x_2 + \beta x_0x_1 : x_1x_2)$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha\beta \neq 1$ . La conique de points fixes est alors donnée par

$$x_1^2 - \alpha x_1x_2 + x_0x_2 - \beta x_0x_1 = 0.$$

Cette conique dégénère en deux droites lorsque  $\alpha\beta = 1$ .

**Remarque 4.41.** — On constate que  $(x_0x_1 : \alpha x_1x_2 - x_0x_2 + \beta x_0x_1 : x_1x_2)$  préserve la fibration  $x_0/x_2 = \text{cte}$  fibre à fibre et ceci montre que tout élément de  $\Sigma^3$  ayant une conique de points fixes préserve fibre à fibre une fibration en droites. En fait en utilisant les deux propositions qui suivent nous allons voir que toute transformation birationnelle quadratique ayant une conique lisse de points fixes préserve une fibration en droites fibre à fibre.

La caractérisation des droites (resp. coniques) qui sont transformées par  $\rho$  en des droites (resp. coniques) permet d'établir l'énoncé qui suit.

**Proposition 4.42.** — *La transformation  $A\rho$  a une droite de points fixes si elle s'écrit*

$$(a_0x_0x_1 + b_0x_2^2 + c_0x_1x_2 : a_1x_0x_1 + b_1x_2^2 + c_1x_1x_2 : a_2x_0x_1 + b_2x_2^2 + c_2x_1x_2)$$

avec :

$$b_1a_2^2 + a_2a_1c_1 - a_1a_2b_2 - a_1^2c_2 = 0 \quad \text{ou} \quad a_0b_0b_2 + c_0b_2^2 - a_2b_0^2 - b_0b_2c_2 = 0.$$

*La transformation  $A\rho$  a deux droites distinctes de points fixes si elle est de l'une des formes suivantes :*

$$\begin{aligned} (\alpha x_0x_1 + x_1x_2 : \beta x_0x_1 + \gamma x_2^2 + \delta x_1x_2 : \varepsilon x_0x_1 + \eta x_1x_2), & \quad (\eta - \alpha)^2 + 4\varepsilon \neq 0; \\ (\alpha x_0x_1 + \beta x_2^2 + \gamma x_1x_2 : x_2^2 + \delta x_1x_2 : \varepsilon x_2^2 + \eta x_1x_2), & \quad (\varepsilon - \delta)^2 + 4\eta \neq 0. \end{aligned}$$

*Enfin la transformation  $A\rho$  possède une conique lisse de points fixes si elle est de l'un des types suivants :*

$$(x_0x_1 : -x_0x_1 - x_2^2 - \beta x_1x_2 : x_1x_2), \quad (x_0x_1 + \alpha x_2^2 + \alpha x_1x_2 : x_1x_2 : x_2^2), \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

*Dans le premier cas la conique est donnée par  $x_0x_1 + x_2^2 + x_1^2 + \beta x_1x_2 = 0$ , dans le second par  $x_0x_1 + \alpha x_2^2 + \alpha x_1x_2 - x_0x_2 = 0$ .*

En ce qui concerne les transformations de  $\Sigma^1$  on a le résultat suivant.

**Proposition 4.43.** — *Soit  $A = (a_0x_0 + b_0x_1 + c_0x_2 : a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2)$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ .*

*La transformation  $A\tau$  possède une droite de points fixes si  $a_0c_0c_1 + b_0c_1^2 - a_1c_0^2 - b_1c_0c_1 = 0$ .*

*La transformation  $A\tau$  a une conique lisse de points fixes si  $A\tau$  est de la forme*

$$(2x_0^2 : 2x_0x_1 : \alpha x_0^2 + \beta x_0x_1 - x_1^2 + x_0x_2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

*la conique en question a pour équation  $x_0x_2 - \alpha x_0^2 - \beta x_0x_1 + x_1^2 = 0$ .*

**Remarque 4.44.** — Les itérés de  $(2x_0^2 : 2x_0x_1 : \alpha x_0^2 + \beta x_0x_1 - x_1^2 + x_0x_2)$  sont dans  $\text{Bir}_2$ . En effet, dans la carte  $x_0 = 1$ , cette application induit la transformation polynomiale

$$\left( x_1, x_2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}x_1 - x_1^2 \right).$$

## 4.5. Points d'indétermination des itérés, points périodiques

**4.5.1. Points d'indétermination, ensembles exceptionnels.** — Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA. On note  $\text{Ind}^+ f = \bigcup_{n \geq 1} \text{Ind} f^n$  l'union des ensembles d'indétermination des itérés positifs de  $f$ .

De même on introduit  $\text{Ind}^- f = \bigcup_{n \geq 1} \text{Ind} f^{-n}$ . De façon similaire on définit

$$\text{Exc}^+ f = \bigcup_{n \geq 1} \text{Exc} f^n \text{ ainsi que } \text{Exc}^- f = \bigcup_{n \geq 1} \text{Exc} f^{-n}.$$

Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . La transformation  $A\sigma$  est alors algébriquement stable ; soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  les points d'indétermination de  $A\sigma$ . On remarque que, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , les  $(A\sigma)^{-n}(p_i)$  sont des points d'indétermination de  $(A\sigma)^{n+1}$ . En particulier la  $\mathbb{Q}$ -indépendance implique que l'ensemble  $\text{Ind}^+(A\sigma)$  est infini ; il en est de même pour  $\text{Ind}^-(A\sigma)$ .

**Théorème 4.45.** — *Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Alors  $\text{Ind}^-(A\sigma)$  est ZARISKI dense.*

Nous proposons deux façons d'établir ce résultat.

*Démonstration.* — Supposons que  $\text{Ind}^-(A\sigma)$  soit contenu dans un sous-ensemble algébrique propre  $\Gamma$  de  $\mathbb{P}^2$ . Alors il en est de même pour  $\text{Ind}^-(A^\kappa\sigma)$  pour tout automorphisme  $\kappa$  du corps  $\mathbb{C}$ . Par densité il en est encore de même pour tout élément de  $\Sigma^3$  ; or nous donnons par la suite des exemples du type

$$\left( \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta} \right)$$

pour lesquels ce n'est pas vrai donc  $\text{Ind}^-(A\sigma)$  est ZARISKI dense.

La deuxième approche est la suivante. Soit  $\overline{\text{Ind}^-(A\sigma)}^Z$  l'adhérence de ZARISKI de  $\text{Ind}^-(A\sigma)$ . Notons que  $\overline{\text{Ind}^-(A\sigma)}^Z$  est invariant par  $A\sigma$ . Supposons que  $\overline{\text{Ind}^-(A\sigma)}^Z$  soit strictement contenu dans  $\mathbb{P}^2$  ; comme il est infini on a :

$$\overline{\text{Ind}^-(A\sigma)}^Z = \Gamma \cup \{p_1, \dots, p_s\}$$

où  $\Gamma$  désigne une courbe algébrique et les  $p_i$  des points de  $\mathbb{P}^2$  non situés sur  $\Gamma$ . La  $\mathbb{Q}$ -indépendance des coefficients de  $A$  fait que  $\Gamma$  n'est pas contractée par  $A\sigma$ . On constate alors que  $\Gamma$  est invariante par  $A\sigma$  ; or génériquement une transformation du type  $A\sigma$  ne laisse pas de courbe invariante (Théorème 4.33) : contradiction.  $\square$

Comme le montre la remarque qui suit on ne peut pas espérer sous les seules hypothèses de la  $\mathbb{Q}$ -indépendance obtenir la densité (au sens ordinaire) des points d'indétermination.

**Remarque 4.46.** — Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Supposons que  $A\sigma$  ait un point fixe  $m$  tel que les valeurs propres de la partie linéaire de  $f$  en  $m$  soient de module 1 et satisfassent les conditions de SIEGEL ; alors  $A\sigma$  est linéarisable au voisinage de ce point ([92, 2]). En particulier il existe un ouvert (polydisque) invariant par  $A\sigma$  ; pour tout  $n$  les éléments de  $\text{Ind}(A\sigma)^n$  et  $\text{Exc}(A\sigma)^n$  ne peuvent rencontrer cet ouvert.

Si  $A$  est un élément de  $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$  (resp.  $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ ) les points d'indétermination des  $(A\sigma)^n$  sont rationnels (resp. réels). En particulier les  $(A\sigma)^n$  sont holomorphes dans le complément de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{P}^2$  ; mais cet ensemble n'est pas invariant puisque les courbes contractées, qui l'intersectent évidemment, le sont sur des points réels. Par contre le complément des courbes contractées privé de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est invariant.

On se convainc facilement qu'il n'est pas aisé de décrire les ensembles  $\text{Exc}^\pm$  et  $\text{Ind}^\pm$ ; c'est possible dans des situations très spéciales, non génériques en général. Un des exemples les plus simples est le suivant :

$$h = (h_1, h_2) = \left( \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta} \right).$$

On note que  $h$  fait partie d'un sous-groupe de  $\text{Bir}_2$ , ici  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ , et peut être vu comme un automorphisme mais sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . On constate déjà dans cette situation des phénomènes « intéressants ».

Si les points fixes de chaque  $h_i$  sont distincts de 0 et  $\infty$  dans  $\mathbb{P}^1$ , alors  $h$  est dans  $\Sigma^3$ , les trois droites contractées par  $h$  étant  $x_1 = -\frac{d}{c}$ ,  $x_2 = -\frac{\delta}{\gamma}$  et la droite à l'infini  $x_0 = 0$ . Supposons que chaque  $h_i$  soit une rotation irrationnelle ; alors les adhérences (ordinaires)

$$\overline{\left\{ h_1^{-n} \left( -\frac{d}{c} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}} \quad \text{et} \quad \overline{\left\{ h_2^{-n} \left( -\frac{\delta}{\gamma} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}}$$

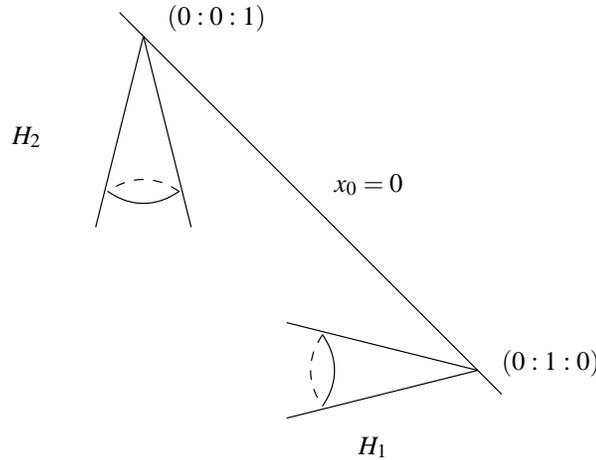
sont des cercles. Il en résulte que

$$\overline{\text{Exc}^+ h} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Exc} h^n},$$

qui est aussi dans ce cas

$$\overline{\text{Exc}^- h} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Exc} h^{-n}},$$

est l'union de deux cônes réels quadratiques  $H_1$  et  $H_2$  dans  $\mathbb{P}^2$  et de la droite à l'infini  $x_0 = 0$  :



L'intersection des deux droites  $x_1 = h_1^{-n} \left( -\frac{d}{c} \right)$  et  $x_2 = h_2^{-n} \left( -\frac{\delta}{\gamma} \right)$  contractées par  $h^n$  est un point d'indétermination de  $h^n$  (les deux autres étant  $(0:1:0)$  et  $(0:0:1)$ ). Par suite l'adhérence

$$\overline{\text{Ind}^+ h} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ind} h^n} = \overline{\text{Ind}^- h} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ind} h^{-n}}$$

est constituée des points  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  et de l'intersection des quadriques réelles  $H_1$  et  $H_2$ ; c'est une surface quartique réelle qui est topologiquement un tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

On peut bien sûr décrire sans difficulté les  $\overline{\text{Exc}^\pm h}$  et  $\overline{\text{Ind}^\pm h}$  pour n'importe quelles valeurs des paramètres  $a, b, c, d, \alpha, \dots$

Voici quelques exemples tirés de la classification des flots quadratiques qui permettent de visualiser quelques configurations d'ensembles Ind et Exc.

- On considère

$$\phi_t = \left( (2x_1 + tx_2)x_0 - \frac{t}{2}x_2^2 : (x_1 + tx_2)(-2tx_0 + 2x_1 + tx_2) : x_2(-2tx_0 + 2x_1 + tx_2) \right).$$

Un calcul montre que :

$$\text{Exc } \phi_t^n = \text{Exc } \phi_{nt} = \{x_1 = 0, x_1 + nt x_2 = 0, -2nt x_0 + 2x_1 + nt x_2 = 0\}$$

et

$$\text{Ind } \phi_t^n = \text{Ind } \phi_{nt} = \{(1 : 0 : 0), (1 : 0 : 2), (1 : 2nt : -2)\}$$

ce qui permet une description immédiate des ensembles  $\text{Ind}^\pm$  et  $\text{Exc}^\pm$ .

- Pour le flot  $\phi_t$  donné par

$$(2e^t(t-2)x_0x_1 - e^ttx_1^2 + 2(1-e^t)x_1x_2 - 4x_0x_2 : 2e^tx_1P(x_0, x_1, x_2) : 2x_2P(x_0, x_1, x_2))$$

où  $P(x_0, x_1, x_2) = 2tx_0 - (2+t)x_1 - 2x_2$  on a :

$$\text{Exc } \phi_t^n = \text{Exc } \phi_{nt} = \{x_1 + x_2 = 0, e^{nt}x_1 + x_2 = 0, 2ntx_0 - (2+nt)x_1 - 2x_2 = 0\}$$

et

$$\text{Ind } \phi_t^n = \{(1 : 0 : 0), (1 : 2 : -2), (2 + nt - 2e^{nt} : 2nt : -2nte^{nt})\}.$$

Rappelons que, pour cet exemple,  $\phi_t$  appartient à  $\Sigma^3$  sauf pour  $t \in 2i\pi\mathbb{Z}$  où  $\phi_t$  est soit l'identité, soit dans  $\Sigma^2$ .

**4.5.2. Points périodiques.** — Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA. Un point *périodique* de  $f$  est un point  $p$  tel que les germes  $f_p^n$  soient holomorphes et

$$O^+(f) = \{p, f(p), \dots, f^n(p), \dots\}$$

soit un ensemble fini qui ne rencontre pas  $\text{Ind } f \cup \text{Ind } f^{-1}$ . La période de  $p$  est par définition le cardinal de  $O^+(f)$ .

**Remarque 4.47.** — Un point fixe  $p$  de  $f^n$  n'est pas nécessairement un point périodique de  $f$ ; il se pourrait en effet que, pour un certain  $k < n$ , l'itéré  $k$ -ième de  $p$  par  $f$  soit d'indétermination pour  $f^{-1}$  par exemple.

Un point périodique  $p$  de période  $k$  est *hyperbolique* si les valeurs propres  $\delta_1(p)$  et  $\delta_2(p)$  de  $Df_{(p)}^k$  satisfont

$$|\delta_1(p)| < 1 < |\delta_2(p)|.$$

L'ensemble des points périodiques hyperboliques d'un automorphisme quadratique  $f$  de HÉNON est ZARISKI dense. En effet, suivant [53], c'est un ensemble infini dans  $\mathbb{C}^2$  et donc dans  $\mathbb{P}^2$ ; s'il n'était pas ZARISKI dense  $f$  laisserait une courbe invariante ce qui, comme on l'a déjà mentionné dans la démonstration de la Proposition 3.25, est impossible. Considérons  $t \mapsto f_t$  une famille analytique de transformations birationnelles telle que

- $f_0$  soit une transformation de HÉNON,
- pour tout  $t$  non nul  $f_t$  appartienne à  $\Sigma^3$ .

Soit  $p_0$  un point périodique hyperbolique de période  $N$  pour  $f_0$ . Fixons  $D$  un polydisque centré en  $p_0$  tel que  $D$  ne rencontre pas la droite à l'infini. En particulier

$$D \cap \text{Exc } f_0^n = D \cap \text{Ind } f_0^n = \emptyset, \quad \forall 1 \leq n \leq N.$$

Si  $N$  est fixé et  $|t|$  suffisamment petit,  $\text{Exc } f_t^N$  et  $\text{Ind } f_t^N$  ne rencontrent pas  $D$ . En appliquant le théorème de stabilité des points fixes hyperboliques à la famille de difféomorphismes holomorphes  $f_t^N|_D$  on constate qu'il existe une application analytique  $p \mapsto p(t)$  telle que, pour  $|t|$  suffisamment petit,  $p(t)$  soit un point fixe hyperbolique de  $f_t$  de période  $N$ .

Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  à coefficients algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Puisque  $\{A^\kappa \mid \kappa \in \text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)\}$  est topologiquement dense, si  $n$  est fixé, il existe un automorphisme  $\kappa$  du corps  $\mathbb{C}$  tel qu'un conjugué linéaire  $g$  de  $A^\kappa \sigma$  soit très proche de  $f_0$ ; par suite  $g^n$  est proche de  $f_0^n$  et possède au moins autant de points fixes que  $f_0^n$  a de points fixes hyperboliques (ou plus généralement de points fixes simples). Il en est de même pour  $(A^\kappa \sigma)^n$ . Cette construction produit donc pour  $A\sigma$  au moins autant de points périodiques de période  $n$  (pas nécessairement tous hyperboliques) que  $f_0$  a de points périodiques simples. On peut évidemment faire cela pour tout  $n$ .

**Théorème 4.48.** — *Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . L'ensemble des points périodiques de  $A\sigma$  est ZARISKI dense.*

*Démonstration.* — Posons  $f = A\sigma$ . D'après ce qui précède  $f$  a une infinité de points périodiques. Notons  $\text{Per}(f)$  l'ensemble des points périodiques de  $f$ . L'idée est toujours la même. Si l'adhérence de ZARISKI  $\overline{\text{Per}(f)}^Z$  de  $\text{Per}(f)$  est strictement contenue dans  $\mathbb{P}^2$ , alors  $\overline{\text{Per}(f)}^Z$  s'écrit comme l'union d'une courbe algébrique  $\Gamma$  et de points  $p_i$  de  $\mathbb{P}^2$  non situés sur  $\Gamma$  :

$$\overline{\text{Per}(f)}^Z = \Gamma \cup \{p_1, \dots, p_s\}.$$

Puisque  $f(\text{Per}(f))$  est contenu dans  $\text{Per}(f)$ , la courbe  $\Gamma$  est invariante par  $f$  ce qui n'est pas possible en vertu du Théorème 4.33. Il en résulte que  $\text{Per}(f)$  est ZARISKI dense.  $\square$

**Remarque 4.49.** — On peut aussi procéder comme suit.

Posons  $f = A\sigma$ . D'après ce qui précède  $f$  a une infinité de points périodiques et une infinité de périodes distinctes apparaît (ceci est vrai pour les applications de HÉNON). Notons  $\text{Per}(f)$  l'ensemble des points périodiques de  $f$ . Si  $\text{Per}(f)$  est contenu dans un sous-ensemble algébrique propre  $\Gamma$ , alors  $\Gamma$  est du type :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n \cup \{p_1, \dots, p_s\}$$

où les  $p_i$  sont des points isolés et les  $\Gamma_i$  des courbes irréductibles. On en déduit l'existence d'entiers  $j$  et  $k$  tels que  $f^j(\Gamma_k) = \Gamma_k$  et l'itéré  $f^j$  a une infinité de points périodiques avec une infinité de périodes distinctes ; ceci implique que la normalisée de  $\Gamma_k$  est  $\mathbb{P}^1$ . Comme un élément de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  ne peut posséder une infinité de points périodiques avec périodes distinctes, on obtient une contradiction.

Dans [50] FAVRE donne une estimation du nombre de points périodiques d'un élément générique du groupe de CREMONA de degré  $d \geq 2$ ; puis il montre, avec DILLER, un résultat sur les transformations biméromorphes d'une surface de KÄHLER compacte que nous énonçons dans le cas particulier de  $\mathbb{P}^2$  :

**Théorème 4.50** ([45]). — *Soit  $f$  une transformation de CREMONA algébriquement stable telle que  $\lambda(f) > 1$ . Supposons que  $f$  n'ait pas de courbe de points périodiques. Notons  $\mathrm{Per}_k$  le nombre de points périodiques de période (divisant)  $k$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $k \geq 0$  on ait*

$$|\mathrm{Per}_k - \lambda(f)^k| \leq C.$$

Remarquons que les Corollaire 4.5 et Lemme 4.16 permettent d'appliquer ce Théorème à toute transformation  $A\sigma$  avec  $A$  automorphisme générique de  $\mathbb{P}^2$ .

**Remarque 4.51.** — Il y a des transformations birationnelles de degré 2 dans  $\Sigma^3$  qui sont algébriquement stables et qui ont un nombre fini de points périodiques ; par exemple pour  $\alpha, \beta$  génériques les applications  $f_{\alpha,\beta}^2$ , où

$$f_{\alpha,\beta} = \left( \frac{\alpha x_0 + x_1}{x_0 + 1}, \beta x_1 \right)$$

sont de ce type. Leur degré dynamique vaut 1.

La transformation  $f$  vérifie la **condition de BEDFORD et DILLER** (voir [7]) si

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda(f)^n} \left| \log (\mathrm{dist}(f^n(\mathrm{Ind} f^{-1}), \mathrm{Ind} f)) \right| < \infty.$$

Cette condition implique la stabilité algébrique.

Le théorème qui suit est très important ; il montre l'abondance de points périodiques hyperboliques. Nous l'énonçons dans le cadre restreint de  $\mathbb{P}^2$  :

**Théorème 4.52** ([7, 48]). — *Soit  $f$  un élément non linéaire du groupe de CREMONA. Supposons que  $f$  vérifie la condition de BEDFORD et DILLER. Alors  $f$  possède une infinité de points périodiques hyperboliques qui s'équidistribuent suivant une mesure de probabilité  $f$ -invariante.*

Nous allons en déduire l'énoncé qui suit.

**Proposition 4.53.** — *Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  à coefficients réels strictement positifs. La transformation birationnelle quadratique  $A\sigma$  vérifie la condition de BEDFORD et DILLER ; en particulier  $A\sigma$  possède une infinité de points périodiques hyperboliques.*

*Démonstration.* — On note  $f = A\sigma$  et  $A = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ . Les points d'indétermination  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $f^{-1}$  sont donnés par les colonnes de  $A$  :

$$a = (a_0 : a_1 : a_2), \quad b = (b_0 : b_1 : b_2), \quad c = (c_0 : c_1 : c_2).$$

Dans la carte affine  $x_2 = 1$ , on note  $\Theta$  l'ensemble réel défini par :

$$\Theta := \{x_0 \geq 0, x_1 \geq 0\}.$$

On remarque que  $\sigma$  laisse invariant  $\Theta$ . Comme les coefficients de  $A$  sont positifs on a l'inclusion  $A(\Theta) \subset \Theta$ ; par suite  $f(\Theta) \subset \Theta$ . En fait  $f(\Theta)$  est le triangle de sommets  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Il en résulte que  $f^n(\text{Ind } f^{-1}) \subset \Theta$  pour tout  $n \geq 0$ . Soit  $\text{dist}$  la métrique de FUBINI-STUDY de diamètre 1 et  $0 < \varepsilon < 1$  la distance de  $f(\Theta)$  à

$$\text{Ind } f = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\};$$

on a

$$\varepsilon = \text{dist}(f(\Theta), \text{Ind } f) \leq \text{dist}(f^n(\text{Ind } f^{-1}), \text{Ind } f) \leq 1.$$

Les coefficients de  $A$  étant positifs, l'application  $f$  est algébriquement stable donc  $\lambda(f) = \deg f = 2$ . Comme la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda(f)^n} \left| \log(\text{dist}(f^n(\text{Ind } f^{-1}), \text{Ind } f)) \right| \leq \left| \log \varepsilon \right| \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$$

est convergente on peut appliquer le Théorème 4.52. □

Suite à une discussion avec Romain DUJARDIN, que nous remercions, nous avons établi le :

**Théorème 4.54.** — *L'ensemble des éléments de  $\text{Bir}_2$  possédant une infinité de points périodiques hyperboliques est dense dans  $\text{Bir}_2$ .*

*Démonstration.* — L'ensemble des transformations de  $\text{Bir}_2$  qui vérifient la condition de BEDFORD et DILLER est le complément d'un ensemble « pluri-polaire » ([7]). Lorsque  $A$  est à coefficients réels strictement positifs  $A\sigma$  satisfait cette condition, on en déduit que cet ensemble est non vide et donc dense : c'est une propriété des ensembles pluri-polaires. □

**Remarque 4.55.** — On peut démontrer la densité des transformations de  $\text{Bir}_2$  possédant une infinité de points périodiques en partant d'une transformation  $A\sigma$  avec  $A$  dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$  à coefficients algébriquement indépendants et en faisant agir  $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Mais cette démarche ne contrôle pas l'hyperbolicité.

#### 4.6. Transformations birationnelles quadratiques de carré quadratique

Soit  $f$  une transformation de CREMONA telle que  $\deg f^n = 2$  pour tout  $n \geq 1$  ; il existe un entier  $k$  tel que  $f^k$  se plonge dans un flot. En effet  $\overline{\langle f^n \rangle}^Z$  est un sous-ensemble algébrique de  $\mathbb{P}^{17}$  et  $\overline{\langle f^n \rangle}^Z \cap \text{Bir}_2$  est un groupe algébrique. Par suite  $\overline{\langle f^n \rangle}^Z \cap \text{Bir}_2$  a un nombre fini de composantes connexes ; une puissance de  $f$  est dans la composante connexe de l'identité et cette puissance se plonge dans un flot.

Nous avons vu que la non stabilité algébrique était reliée à une baisse du degré des itérés. Dans cet ordre d'idée nous allons décrire les transformations quadratiques de  $\Sigma^3$  (resp.  $\Sigma^2$ , resp.  $\Sigma^1$ ) dont le second itéré est encore dans  $\text{Bir}_2$ . Cela produit des exemples de familles de transformations birationnelles non algébriquement stables. Les flots rencontrés au Chapitre 2 sont comme cela. Mentionnons que dans [54] FURTER s'est intéressé à la suite des degrés des itérés d'un automorphisme polynomial  $f$  du plan : cette suite est contrôlée par le quotient  $\zeta = \frac{\deg f^2}{\deg f}$  ; par exemple  $f$  est polynomialement conjugué à un automorphisme élémentaire si et seulement si  $\zeta \leq 1$ .

Commençons par un exemple. La famille des transformations birationnelles  $f_{\alpha,\beta}$  définie par

$$f_{\alpha,\beta} = \left( \frac{\alpha x_0 + x_1}{x_0 + 1}, \beta x_1 \right)$$

où  $\alpha, \beta$  désignent des nombres complexes a été étudiée dans [43] :

$$\deg f_{\alpha,\beta}^2 = 2, \deg f_{\alpha,\beta}^3 = 3, \deg f_{\alpha,\beta}^4 = 3, \deg f_{\alpha,\beta}^5 = 4, \deg f_{\alpha,\beta}^6 = 4, \deg f_{\alpha,\beta}^7 = 5, \dots$$

Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont de la forme  $\exp(2i\pi\eta)$  et  $\exp(2i\pi\tilde{\eta})$  avec  $\eta, \tilde{\eta}$  dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , cette famille a une dynamique curieuse ([43]). Ces exemples montrent que la condition  $\deg f^2 = 2$  n'est pas suffisante pour que tous les itérés soient de degré 2.

Examinons de plus près les éléments de  $\Sigma^3$  dont le carré est quadratique. La transformation  $(B\sigma C)^2$  est quadratique si et seulement si  $\sigma C B \sigma$  l'est ; on se ramène donc à déterminer les éléments  $A$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $\sigma A \sigma$  soit quadratique.

**Proposition 4.56.** — *Les éléments  $A$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $\deg \sigma A \sigma \leq 2$  s'écrivent  $flg$  avec*

$$\ell = (\alpha x_1 + \beta x_2 : x_1 : \gamma x_0 + \delta x_1)$$

avec  $\alpha, \delta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$  et  $f, g \in \mathcal{S}_6$ .

*Démonstration.* — Posons  $A\sigma := (F_0 : F_1 : F_2)$ . La transformation  $\sigma A \sigma$  est de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement s'il existe  $\psi$  et  $q_i$  dans  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$  tels que

$$(F_1 F_2 : F_0 F_2 : F_0 F_1) = \psi(q_0 : q_1 : q_2).$$

Si  $\psi$  était irréductible,  $\psi$  diviserait deux  $F_i$  distincts ;  $A\sigma$  ne serait alors pas inversible ce qui est absurde. Ainsi  $\psi$  s'écrit  $\psi_0 \psi_1$ , les  $\psi_i$  désignant des formes linéaires.

Si  $\psi_0$  et  $\psi_1$  coïncident à multiplication près par un scalaire, alors ou bien deux des composantes de  $A\sigma$  sont multiples l'une de l'autre, ou bien  $A\sigma$  est linéaire ; ces deux éventualités étant exclues,  $\psi_0$  et  $\psi_1$  ne sont pas multiples l'une de l'autre.

Quitte à réindicer les  $\psi_i$  on peut supposer que  $\psi_0$  divise l'un des  $F_i$  et  $\psi_1$  les deux autres. À permutation près on a :

$$F_0 = \psi_0 f_0, \quad F_1 = \psi_1 f_1, \quad F_2 = \psi_1 f_2,$$

les  $f_i$  étant des formes linéaires. On obtient alors

$$\sigma A \sigma = (\psi_1 f_1 f_2 : \psi_0 f_0 f_2 : \psi_1 f_0 f_1).$$

Puisque  $\psi_0$  doit diviser  $\sigma A \sigma$  et que  $\psi_0$  et  $\psi_1$  ne sont pas multiples l'un de l'autre, on a l'alternative suivante : ou bien  $\psi_0$  divise  $f_0$  et  $f_2$  ou bien  $\psi_0$  divise  $f_1$ .

Supposons dans un premier temps que  $\psi_0$  divise  $f_0$  et  $f_2$  alors d'une part  $F_0$  est un multiple de  $\psi_0^2$  et d'autre part  $F_0$  est par définition de la forme  $*x_1 x_2 + *x_0 x_2 + *x_0 x_1$  : contradiction.

Supposons que  $\psi_0$  divise  $f_1$  ; notons que  $F_0$  étant de la forme  $*x_1 x_2 + *x_0 x_2 + *x_0 x_1$  on a  $\psi_0 = a_0 x_0 + b_0 x_1$  à permutation des coordonnées près. Si  $a_0 b_0 \neq 0$ , nécessairement

$$f_0 = c_3 x_2, \quad f_2 = a_2 x_0 + b_2 x_1 \quad \text{et} \quad \psi_1 = c_1 x_2;$$

la transformation  $A \sigma$  est alors linéaire ce qui est impossible. Si  $b_0 = 0$ , alors

$$f_0 = b_3 x_1 + c_3 x_2 \quad \text{et} \quad \psi_1 = b_1 x_1 + c_1 x_2.$$

Lorsque  $b_1 c_1 \neq 0$ , on constate que  $f_2 = a_2 x_0$  et  $A \sigma$  est linéaire. Si  $b_1$  est nul,  $f_2 = a_2 x_0 + b_2 x_1$  et

$$A = (*x_1 + *x_2 : *x_1 : *x_0 + *x_1).$$

De même quand  $c_1 = 0$  on obtient que  $A$  est du type

$$(*x_1 + *x_2 : *x_2 : *x_0 + *x_2).$$

□

L'énoncé précédent conduit avec les mêmes notations à la :

**Proposition 4.57.** — Soit  $Q$  une transformation de  $\Sigma^3$ . Si  $\deg Q^2 \leq 2$ , alors  $Q$  est, à conjugaison linéaire dynamique près, de l'un des types suivants :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left( \frac{ax_1 + 1}{x_1}, \frac{cx_2 + 1}{x_2} \right), & Q_2 &= \left( a + bx_1, \frac{cx_2 + x_1}{x_2} \right), \\ Q_3 &= \left( \frac{ax_2 + 1}{x_2}, \frac{cx_1 + d}{x_1} \right), & Q_4 &= \left( a + x_2, \frac{cx_1 + x_2}{x_1} \right) \end{aligned}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres complexes satisfaisant  $bd \neq 0$ .

**Remarques 4.58.** — *i.* Les transformations  $Q_1$  et  $Q_3$  sont des automorphismes de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ; tous leurs itérés sont de degré 2.

*ii.* On obtient des transformations  $f$  de  $\Sigma^3$  dont le carré est dans  $\Sigma^2$ , par exemple  $Q_1$  lorsque  $a$  ou  $c$  est nul.

*iii.* Les transformations étudiées par BEDFORD et KIM ([8]) sont à conjugaison dynamique près de la forme  $Q_4$ .

En général  $Q_2$  et  $Q_4$  ne sont pas de cube quadratique.

**Proposition 4.59.** — La transformation  $Q_2 = \left(a + bx_1, \frac{cx_2 + x_1}{x_2}\right)$  est de cube quadratique si et seulement si nous sommes dans l'un des deux cas suivants :

- $c = 0$ ;
- $c \neq 0, b = -1$  et  $c^2 + a = 0$ .

Dans les deux cas les itérés de  $Q_2$  sont tous quadratiques.

La preuve est laissée en exercice.

Par un calcul élémentaire on démontre la :

**Proposition 4.60.** — La transformation  $Q_4 = \left(a + x_2, \frac{cx_1 + dx_2}{x_1}\right)$  est de cube quadratique si et seulement si  $a$  et  $c$  sont nuls ; dans ce cas  $Q_4$  est dynamiquement conjugué à  $\left(x_2, \frac{x_2}{x_1}\right)$  qui est périodique de période 6. Tous ses itérés sont quadratiques.

Les calculs qui suivent vont nous permettre de distinguer les différentes classes de conjugaison des transformations quadratiques de carré quadratique. Soient  $Q$  dans  $\text{Bir}_2$  et  $m$  un point du plan projectif complexe ; on note  $\mu_Q(m)$  la multiplicité en  $m$  du feuilletage défini par  $Q$ . Nous allons montrer comment on calcule les différentes multiplicités par exemple pour les éléments

$$f_{\alpha, \beta} = \left( \frac{\alpha x_0 + x_1}{x_0 + 1}, \beta x_1 \right) ;$$

ces transformations comptent trois points d'indétermination

$$(1 : 0 : 0), \quad (0 : 1 : 0), \quad (-1 : \alpha : 1)$$

et deux points fixes  $(0 : 0 : 1)$  et  $(\alpha - 1 : 0 : 1)$ . Le feuilletage associé à  $f_{\alpha, \beta}$  est donné par la 1-forme

$$(1 - \beta)x_1x_2(x_0 + x_2)dx_0 + x_2(x_2(\alpha x_0 + x_1) - x_0(x_0 + x_2))dx_1 \\ + x_1(\beta x_0(x_0 + x_2) - x_2(\alpha x_0 + x_1))dx_2.$$

Plaçons-nous dans la carte  $x_1 = 1$  pour calculer  $\mu_{f_{\alpha, \beta}}(0 : 1 : 0)$  ; le feuilletage associé à  $f_{\alpha, \beta}$  est donné par

$$(1 - \beta)x_2(x_0 + x_2)dx_0 + (\beta x_0(x_0 + x_2) - x_2(\alpha x_0 + 1))dx_2.$$

La quantité  $(1 - \beta)x_2(x_0 + x_2)$  est nulle si et seulement si  $x_2 = 0$  ou  $x_0 = -x_2$ . Lorsque  $x_2 = 0$  (resp.  $x_0 = -x_2$ ) on a :

$$\beta x_0(x_0 + x_2) - x_2(\alpha x_0 + 1) = \beta x_0^2$$

(resp.  $\beta x_0(x_0 + x_2) - x_2(\alpha x_0 + 1) = -(\alpha x_0 + 1)x_0$ ) ; il s'en suit que  $\mu_{f_{\alpha, \beta}}(0 : 1 : 0) = 2 + 1 = 3$ . De même on obtient

$$\mu_{f_{\alpha, \beta}}(1 : 0 : 0) = \mu_{f_{\alpha, \beta}}(0 : 0 : 1) = \mu_{f_{\alpha, \beta}}(\alpha - 1 : 0 : 1) = \mu_{f_{\alpha, \beta}}(1 : -\alpha : 1) = 1.$$

On a la :

**Proposition 4.61.** — Soit  $Q$  un élément de  $\Sigma^3$  dont le carré est de degré inférieur ou égal à 2. On suppose que  $\deg \mathcal{F}(Q) = 2$ . Notons  $p_1, p_2$  et  $p_3$  les points d'indétermination de  $Q$ . Le tableau suivant donne les multiplicités aux points d'indétermination :

| valeurs de $(\mu_Q(p_1), \mu_Q(p_2), \mu_Q(p_3))$<br>à permutation près | $Q$ est dynamiquement<br>conjugué à                     |
|---|---|
| (1, 1, 1)   | $(a + \frac{1}{x_1}, c + \frac{1}{x_2})$                |
| (1, 1, 3)   | $(1 + bx_1, c + \frac{x_1}{x_2}), b \notin \{0, 1\}$    |
| (1, 5, 1)   | $(1 + x_1, c + \frac{x_1}{x_2})$                        |
| (2, 3, 1)   | $(bx_1, 1 + \frac{x_1}{x_2}), b \notin \{0, 1\}$        |
| (2, 3, 1)   | $(\frac{b}{x_2}, 1 + \frac{1}{x_1}), b \notin \{0, 1\}$ |
| (3, 3, 1)   | $(bx_1, \frac{x_1}{x_2}), b \notin \{0, 1\}$            |
| (1, 2, 2)   | $(\frac{x_2+b}{x_2}, 1 + \frac{d}{x_1}), bd \neq 0$     |
| (1, 2, 2)   | $(1 + x_2, c + \frac{dx_2}{x_1}), d \neq 0$             |
| (1, 2, 4)   | $(\frac{1}{x_2}, 1 + \frac{1}{x_1})$                    |
| (2, 2, 2)   | $(x_2, c + \frac{x_2}{x_1}), c \neq -1$                 |
| (3, 2, 2)   | $(x_2, \frac{x_2}{x_1} - 1)$                            |

**Remarque 4.62.** — La condition  $\deg \mathcal{F}(Q) = 2$  impose que les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  ci-dessus prennent des valeurs génériques. Lorsque les triplets de multiplicité de deux transformations sont distincts elles ne peuvent être dynamiquement conjuguées.

**Remarques 4.63.** — *i.* On constate que les deux modèles  $(bx_1, 1 + \frac{x_1}{x_2})$  et  $(\frac{b}{x_2}, 1 + \frac{1}{x_1})$  ont, à permutation près, même multiplicité aux points d'indétermination mais ne sont pas dynamiquement conjugués ; en effet  $(bx_1, 1 + \frac{x_1}{x_2})$  laisse la fibration  $x_1 = \text{cte}$  invariante alors qu'un calcul montre que  $(\frac{b}{x_2}, 1 + \frac{1}{x_1})$  ne préserve pas de fibration en droites.

ii. On note que  $\left(\frac{x_2+b}{x_2}, 1 + \frac{d}{x_1}\right)^2$  préserve deux fibrations en droites alors que  $\left(1 + x_2, c + \frac{dx_2}{x_1}\right)^2$  n'en préserve qu'une ; par suite  $\left(\frac{x_2+b}{x_2}, 1 + \frac{d}{x_1}\right)$  et  $\left(1 + x_2, c + \frac{dx_2}{x_1}\right)$  ne sont pas dynamiquement conjugués.

On peut en exercice calculer les premiers degrés dynamiques des transformations du tableau.

#### 4.6.1. Cas non génériques. —

Pour classifier les éléments de  $\Sigma^2$  de carré quadratique on s'intéresse aux automorphismes  $A$  de  $\mathbb{P}^2$  tels que  $\rho A \rho$  appartienne à  $\text{Bir}_2$ . La démarche qui nous a permis d'établir la Proposition 4.56 nous conduit à la (exercice) :

**Proposition 4.64.** — *Tout élément  $A$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  tel que  $\rho A \rho$  soit de degré inférieur ou égal à 2 est de l'un des trois types suivants :*

$$\begin{aligned} &(\alpha x_0 + \beta x_1 + \delta x_2 : x_1 : \varepsilon x_1 + \gamma x_2), & (\alpha x_1 + \beta x_2 : \gamma x_0 + \delta x_2 : x_2), \\ &(\alpha x_0 + \beta x_2 : \gamma x_1 + \delta x_2 : x_2) \end{aligned}$$

avec  $\beta, \delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}^*$ .

Cette proposition technique permet d'obtenir le :

**Corollaire 4.65.** — *Soit  $Q$  une transformation de  $\Sigma^2$ . Si  $\deg Q^2 \leq 2$ , alors  $Q$  est, à conjugaison linéaire dynamique près, de l'un des types suivants :*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \left( \frac{\alpha x_0 x_1 + \gamma x_1 + \beta}{1 + \delta x_1}, \frac{1}{1 + \delta x_1} \right), & \mathcal{Q}_2 &= \left( \frac{\alpha x_0 x_1 + x_1 + \beta}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right), \\ \mathcal{Q}_3 &= \left( \frac{\alpha}{x_1} + 1, \gamma x_0 + 1 \right), & \mathcal{Q}_4 &= \left( \frac{\alpha}{x_1}, \gamma x_0 \right), \\ \mathcal{Q}_5 &= \left( \frac{\alpha}{x_1} + 1, x_0 \right), & \mathcal{Q}_6 &= \left( \frac{\alpha}{x_1}, x_0 + 1 \right), \\ \mathcal{Q}_7 &= \left( \alpha x_0 + 1, \frac{\gamma}{x_1} + 1 \right), & \mathcal{Q}_8 &= \left( \alpha x_0, \frac{\gamma}{x_1} + 1 \right), \\ \mathcal{Q}_9 &= \left( \alpha x_0 + 1, \frac{1}{x_1} \right), & \mathcal{Q}_{10} &= \left( \alpha x_0, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

**Remarque 4.66.** — On remarque que  $\deg \mathcal{Q}_i^n \leq 2$  pour tout  $n$ .

Toute transformation appartenant à  $\Sigma^1$  s'écrit  $B\tau C$ ; elle est de carré quadratique si et seulement si  $\tau C B \tau$  l'est. On s'intéresse donc aux éléments  $A$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  tels que  $\tau A \tau$  appartienne à  $\text{Bir}_2$ .

En suivant la démarche utilisée pour la Proposition 4.56 on obtient la (exercice) :

**Proposition 4.67.** — *Tout automorphisme  $A$  de  $\mathbb{P}^2$  tel que  $\tau A \tau$  soit de degré inférieur ou égal à 2 est du type*

$$(x_0 : \alpha x_0 + \beta x_1 : \gamma x_0 + \delta x_1 + \varepsilon x_2)$$

avec  $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \beta, \varepsilon \in \mathbb{C}^*$

**Corollaire 4.68.** — Soit  $Q$  une transformation de  $\Sigma^1$ . Si  $Q^2$  est de degré inférieur ou égal à 2, alors  $Q$  est, à conjugaison linéaire dynamique près, de la forme

$$(\alpha + \beta x_0, \gamma + \delta x_0 + x_0^2 + \varepsilon x_1)$$

où  $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \beta, \varepsilon \in \mathbb{C}^*$ .

N'importe quel itéré d'une telle transformation est toujours quadratique.

On a donc le :

**Corollaire 4.69.** — Soit  $q$  une transformation de  $\Sigma^2$  ou  $\Sigma^1$ ; dès que le carré de  $q$  est quadratique, tous les itérés le sont. En particulier leur degré dynamique vaut 1.

Comme on l'a signalé ceci n'est pas vrai pour les éléments de  $\Sigma^3$  (par exemple pour les  $f_{\alpha, \beta}$ ).

**Problème.** Classifier les transformations birationnelles quadratiques possédant un feuilletage invariant.

**Problème.** Existe-t-il une application quadratique  $f$  pour laquelle  $\text{Ind}^+ f$  est topologiquement dense ?

**Problème.** Existe-t-il une application birationnelle quadratique à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  tel que  $\text{Ind}^+ f$  contienne  $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ , les points rationnels de  $\mathbb{P}^2$  ?

## CHAPITRE 5

### PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

#### 5.1. Le groupe de CREMONA ne se plonge pas dans un $GL_n(\mathbb{k})$

Bien que  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  possède de nombreuses propriétés des groupes linéaires on a la :

**Proposition 5.1.** — *Le groupe de CREMONA ne se plonge pas dans  $GL_n(\mathbb{k})$  où  $\mathbb{k}$  désigne un corps de caractéristique nulle.*

Avant de démontrer ce résultat rappelons l'énoncé suivant dû à BIRKHOFF :

**Lemme 5.2** ([12]). — *Soient  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique nulle et  $A, B, C$  trois éléments de  $GL_n(\mathbb{k})$  satisfaisant  $[A, B] = C$ ,  $[A, C] = [B, C] = \text{id}$  et  $C$  d'ordre  $p$  premier ; alors  $p \leq n$ .*

*Démonstration.* — On peut supposer  $\mathbb{k}$  algébriquement clos et l'on identifie  $A, B$  et  $C$  à des automorphismes linéaires de l'espace des vecteurs colonnes. Comme  $C^p = \text{id}$  les valeurs propres de  $C$  sont des racines  $p$ ème de l'unité. Si toutes les valeurs propres de  $C$  sont égales à 1, alors  $C$  est unipotente et  $p \leq n$ . On suppose dans la suite que  $\alpha$  est une valeur propre de  $C$  distincte de 1. On considère l'espace propre  $E_\alpha = \{x \mid Cx = \alpha x\}$  de  $C$  associé à la valeur propre  $\alpha$ . Comme  $A$  et  $B$  commutent à  $C$  l'espace  $E_\alpha$  est invariant par  $A$  et  $B$ . Puisqu'en restriction à  $E_\alpha$  on a  $C|_{E_\alpha} = \alpha \text{id}_{E_\alpha}$  l'égalité  $[A, B] = C$  implique :

$$(B^{-1}AB)|_{E_\alpha} = \alpha A|_{E_\alpha}.$$

Étant donné que  $A$  est un automorphisme et que  $A|_{E_\alpha}$  et  $(B^{-1}AB)|_{E_\alpha}$  sont conjugués,  $(B^{-1}AB)|_{E_\alpha}$  et  $A|_{E_\alpha}$  ont mêmes valeurs propres ; celles-ci sont non nulles puisque  $A$  est un automorphisme. En particulier, si  $\lambda$  est valeur propre de  $A|_{E_\alpha}$ , alors  $\alpha\lambda, \alpha^2\lambda, \dots, \alpha^{p-1}\lambda$  aussi. Comme  $p$  est premier et  $\alpha$  est distinct de 1 les  $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}$  sont distincts et  $\dim E_\alpha \geq p$ ; donc  $n \geq p$ .  $\square$

*Démonstration de la Proposition 5.1.* — Supposons qu'il existe un morphisme injectif  $\zeta$  du groupe de CREMONA dans  $GL_n(\mathbb{k})$ . Pour tout nombre premier  $p$  considérons, dans la carte affine  $x_2 = 1$ , le groupe

$$\langle (e^{-2i\pi/p} x_0, x_1), (x_0, x_0 x_1), (x_0, e^{2i\pi/p} x_1) \rangle.$$

Les images par  $\zeta$  des trois générateurs satisfont le lemme de BIRKHOFF donc  $p \leq n$ ; ceci étant valable pour tout premier  $p$ , nous obtenons le résultat annoncé.  $\square$

Toutefois le groupe de CREMONA possède de « nombreux sous-groupes linéaires ». Il contient, outre les groupes  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ , le sous-groupe du groupe de JONQUIÈRES préservant la fibration  $x_1 = \text{cte}$  fibre à fibre qui s'identifie à  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$ .

## 5.2. Centralisateur d'une transformation $A\sigma$ générique

Dans [22] CANTAT montre l'énoncé suivant :

**Théorème 5.3 ([22], théorème B).** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte  $S$  dont le premier degré dynamique est strictement plus grand que 1. Si  $g$  est une transformation birationnelle de  $S$  qui commute avec  $f$ , il existe  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $g^m = f^n$ .*

Nous allons démontrer, seulement pour les transformations birationnelles du type  $A\sigma$ , avec  $A$  générique, un résultat un peu plus précis :

**Proposition 5.4.** — *Soit  $A$  un élément de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  dont les coefficients sont rationnellement indépendants ; le centralisateur de  $A\sigma$  dans  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est  $\{(A\sigma)^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .*

Pour ce faire commençons par établir le :

**Lemme 5.5.** — *Soit  $A$  un élément de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  dont les coefficients sont  $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants ; le centralisateur de  $A\sigma$  dans  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est abélien.*

*Démonstration.* — Notons  $m_1, m_2, m_3$  et  $p$  les points fixes de  $A\sigma$ . Puisque  $A$  est générique, les valeurs propres de la partie linéaire de  $A\sigma$  en les  $m_i$  sont « indépendantes », celles au point  $p$  dépendant des six autres. Désignons par  $\mathrm{Cent}(A\sigma)$  le centralisateur de  $A\sigma$  dans  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$  :

$$\mathrm{Cent}(A\sigma) = \{f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2) \mid fA\sigma = A\sigma f\}.$$

Soit  $f$  un élément de  $\mathrm{Cent}(A\sigma)$ .

Montrons que nécessairement  $f$  est holomorphe en tout point fixe de  $A\sigma$ . Supposons par l'absurde que  $f$  ne soit pas holomorphe, par exemple, en  $m_1$ ; alors  $m_1$  est un point d'indétermination de  $f$  dont l'image sera notée  $\Gamma$ . Puisque  $A\sigma$  est holomorphe en  $m_1$  on constate que  $\Gamma$  est invariante par  $A\sigma$ . Or d'après le Théorème 4.33 la transformation  $A\sigma$  n'admet pas de courbe invariante ;  $f$  est donc holomorphe en  $m_1$ .

Comme  $f$  est holomorphe en tout point de  $\mathrm{Fix}(A\sigma)$ , elle permute les points de  $\mathrm{Fix}(A\sigma)$ . « L'indépendance » des couples de valeurs propres de la partie linéaire de  $A\sigma$  en les  $m_i$  assure que  $f$  fixe au moins deux des  $m_i$ , le troisième pouvant être a priori permuté avec  $p$  (on peut penser que cela n'arrive pas génériquement). Supposons, à réindexation près, que  $m_1$  soit fixé par  $f$ . Par généralité il existe un germe de difféomorphisme  $\varphi$  défini au voisinage de  $m_1$  tel que

$$\varphi A\sigma_{,m_1} \varphi^{-1} = (\delta x_0, \eta x_1)$$

où  $\delta, \eta$  sont les valeurs propres de la différentielle de  $A\sigma$  en  $m_1$ . Un calcul élémentaire montre, puisque  $\delta$  et  $\eta$  sont non résonnants, que  $\varphi f_{m_1} \varphi^{-1}$  est linéaire de la forme  $(ax_0, bx_1)$ . Le centralisateur de  $A\sigma$  est donc abélien.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 5.4.* — On reprend une idée de [43].

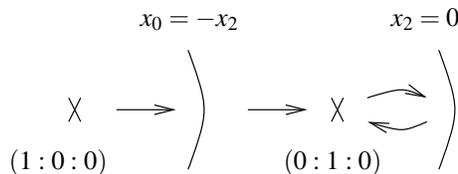
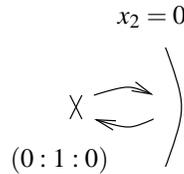
Soit  $g$  un élément du groupe de CREMONA qui commute à  $A\sigma$ . Notons  $p_i$  les points d'indétermination de  $A\sigma$ . D'après le Corollaire 4.5 l'orbite positive de  $p_i$  sous l'action de  $A\sigma$  est constituée de courbes. Ou bien  $p_i$  est d'indétermination pour  $g$ ; ou bien puisque  $\text{Exc } g$  est une union finie de courbes, il existe un entier positif  $k$  (choisi minimal) tel que  $(A\sigma)^k(p_i)$  ne soit pas contenu dans  $\text{Exc } g$ . Quitte à remplacer  $g$  par  $\tilde{g} := g(A\sigma)^k$  on constate que  $\tilde{g}(p_i)$  est un point d'indétermination de  $A\sigma$ ; on a :  $\tilde{g}^3(p_i) = p_i$  pour tout  $i$ .

Comme l'orbite négative de  $p_i$  par  $A\sigma$  est ZARISKI dense (Théorème 4.45),  $\tilde{g}^3$  coïncide avec l'identité et  $g^3$  est une puissance de  $A\sigma$ . Le centralisateur de  $A\sigma$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  s'identifie donc à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p \leq 3$ .

Supposons que  $p$  soit supérieur ou égal à 2. Il existe alors une transformation birationnelle non triviale  $\phi$  qui commute à  $A\sigma$  et telle que  $\phi^p = \text{id}$ ; c'est donc le cas pour les éléments de la forme  $B\sigma$  avec  $B = A^\kappa$ ,  $\kappa$  automorphisme du corps  $\mathbb{C}$ , puis par densité pour tout élément de type  $B\sigma$  avec  $B$  dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  (remarquons qu'une famille à un paramètre  $\varphi_s$  de transformations birationnelles périodiques telle que  $\varphi_0 = \text{id}$  est constamment l'identité). Le centralisateur de la transformation

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} &= (x_0 + \alpha x_1 : \beta(\alpha x_1 + x_2) : x_1)\sigma(x_0 + x_2 : x_1 - \alpha x_2 : x_2) \\ &= ((\alpha x_0 + x_1)x_2 : \beta x_1(x_0 + x_2) : x_2(x_0 + x_2)) \end{aligned}$$

s'identifie, pour  $\alpha, \beta$  génériques, à  $\mathbb{Z}$  (voir [43]); la démonstration est analogue à celle qu'on vient de présenter pour une transformation  $A\sigma$  avec  $A$  à coefficients algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . L'absence du facteur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  s'explique par le fait qu'on peut « distinguer » les orbites des points d'indétermination de  $f_{\alpha,\beta}$  :



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & x_1 = \alpha\beta & & & & \\
 \chi & \longrightarrow & \left. \vphantom{\chi} \right) & \longrightarrow & \left. \vphantom{\chi} \right) & \longrightarrow & \left. \vphantom{\chi} \right) \longrightarrow \dots \\
 (-1 : \alpha : 1) & & & & & & 
 \end{array}$$

Le résultat découle du fait qu'à conjugaison près  $f_{\alpha,\beta}$  est du type  $B\sigma$ .  $\square$

**Remarque 5.6.** — Il y a toutefois des transformations de la forme  $A\sigma$  qui possèdent un « gros » centralisateur ; les flots quadratiques génériques décrits dans le Chapitre 2 fournissent de tels exemples.

### 5.3. Construction de sous-groupes libres

En général le groupe engendré par un nombre fini de transformations birationnelles quadratiques est libre.

**Proposition 5.7.** — Soient  $A_1, \dots, A_n$  des automorphismes génériques (en dehors d'une union dénombrable d'ensembles algébriques propres de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})^n$ ) du plan projectif complexe. Le groupe  $\langle A_1, \dots, A_n, \sigma \rangle$  engendré par les  $A_i$  et  $\sigma$  est le produit libre

$$\overbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}^n * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

En particulier le groupe engendré par les transformations quadratiques  $A_1\sigma, \dots, A_n\sigma$  est libre.

*Démonstration.* — On va démontrer la Proposition pour  $n = 1$ ; dans le cas général il suffit de remplacer le produit libre  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Si le groupe engendré par  $A$  et  $\sigma$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , il existe un mot  $M_A$  dans  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  tel que (avec des notations évidentes) on ait  $M_A(A, \sigma) = \text{id}$ . Remarquons que l'ensemble des mots  $M_A$  est dénombrable et que pour un mot donné  $M$  l'ensemble  $R_M = \{A \mid M(A, \sigma) = \text{id}\}$  est algébrique dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Considérons une transformation  $A$  du type suivant :

$$A = (\alpha x_0 + \beta x_1 : \gamma x_0 + \delta x_1 : x_2).$$

Comme le pinceau de droites  $x_0 = tx_1$  est invariant par les deux transformations  $A$  et  $\sigma$  on hérite d'une représentation linéaire

$$\langle A, \sigma \rangle \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}), \quad A : t \mapsto \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \sigma : t \mapsto \frac{1}{t}$$

qui décrit l'action du groupe  $\langle A, \sigma \rangle$  sur les fibres du pinceau. Dans  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  le sous-groupe engendré par les matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est génériquement isomorphe à  $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  (voir [35]) ; c'est le cas par exemple pour  $\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  lorsque  $\varepsilon$  est générique. Ceci implique que  $\langle (x_0 + \varepsilon x_1 : x_1 : x_2), \sigma \rangle$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Les compléments  $\mathcal{C}R_M$  sont des ouverts denses et leur intersection est dense par propriété de BAIRE.  $\square$

**Remarque 5.8.** — La preuve ci-dessus montre que la dynamique du groupe engendré par  $\sigma$  et  $A = (\alpha x_0 + \beta x_1 : \gamma x_0 + \delta x_1 : x_2)$  est plus ou moins triviale, au sens où elle se réduit à la dimension 1. En effet  $A$  et  $\sigma$  se relèvent par l'application de l'éclatement de l'origine dans la carte affine  $x_2 = 1$  en les applications

$$\tilde{A} : (t, x_1) \mapsto \left( \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, x_1 \right), \quad \tilde{\sigma} : (t, x_1) \mapsto \left( \frac{1}{t}, x_1 \right).$$

Notons que le groupe engendré par  $A$  et  $\sigma$  est l'exemple d'un groupe qui se relève en un groupe d'automorphismes d'une surface rationnelle.

#### 5.4. Au sujet de la simplicité

Lors de la soumission de ce livre en 2009 nous ne savions pas si le groupe de CREMONA était simple ou non. En 2010 CANTAT et LAMY ont démontré le théorème suivant :

**Théorème 5.9** ([24]). — *Le groupe de CREMONA n'est pas simple.*

Soient  $G$  un groupe et  $f$  un élément de  $G$ . On désigne par  $N(f, G)$  le *sous-groupe normal de  $G$  engendré par  $f$*  :

$$N(f, G) = \langle hfh^{-1}, hf^{-1}h^{-1} \mid h \in G \rangle.$$

Nous nous proposons de calculer  $N(f, G)$  pour quelques transformations de CREMONA  $f$  particulières.

##### 5.4.1. Premiers calculs de $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ et conséquences. —

Le groupe  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  est simple par suite tout élément non trivial  $A$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  satisfait

$$N(A, \text{PGL}_3(\mathbb{C})) = \text{PGL}_3(\mathbb{C}).$$

On en déduit la :

**Proposition 5.10.** — *Le sous-groupe normal engendré par  $\sigma$  dans le groupe de CREMONA est le groupe de CREMONA tout entier :*

$$N(\sigma, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Soit  $f$  une transformation de CREMONA. Le Théorème de NETHER permet d'écrire  $f$  sous la forme

$$f = (A_1)\sigma A_2\sigma A_3 \dots A_n(\sigma), \quad A_i \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}).$$

Puisque  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  est simple on a

$$N((-x_0, -x_1), \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$$

et tout  $A_i$  possède une écriture de la forme

$$h_1(-x_0, -x_1)h_1^{-1}h_2(-x_0, -x_1)h_2^{-1} \dots h_n(-x_0, -x_1)h_n^{-1}, \quad h_i \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}).$$

Or l'involution  $(-x_0, -x_1)$  est conjuguée<sup>(1)</sup> à  $\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}\right)$ ; on en déduit que tout élément du groupe de CREMONA s'écrit comme un produit de conjugués de  $\sigma = \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}\right)$ .  $\square$

Ceci implique le :

**Corollaire 5.11.** — *Toute transformation de CREMONA s'écrit comme une composée d'involutions toutes conjuguées.*

Nous donnerons plus loin (Chapitre 5, §5.5) une version un peu plus forte du Corollaire 5.11.

En ce qui concerne le groupe normal engendré par un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  nous avons la :

**Proposition 5.12.** — *Soit  $A$  un automorphisme non trivial de  $\mathbb{P}^2$ ; alors*

$$N(A, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Comme  $N(A, \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  l'involution  $(-x_0, -x_1)$  s'écrit comme un produit de conjugués de  $A$ . Il en résulte, puisque  $(-x_0, -x_1)$  et  $\sigma$  sont conjugués, que

$$\sigma = h_1Ah_1^{-1}h_2Ah_2^{-1} \dots h_nAh_n^{-1}, \quad h_i \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2);$$

d'où l'inclusion  $N(\sigma, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)) \subset N(A, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2))$ . L'égalité

$$N(\sigma, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$$

permet de conclure.  $\square$

Comme  $\rho$  et  $\tau$  sont birationnellement conjugués à des involutions de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  on a une propriété analogue pour ces transformations :

**Corollaire 5.13.** — *On a :*

$$N(\rho, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2) \quad \text{et} \quad N(\tau, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

À partir de la Proposition 5.12 et de

$$N(A, \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}), \quad \forall A \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$$

on obtient le :

**Corollaire 5.14.** — *Toute transformation de CREMONA s'écrit comme un produit de conjugués de la translation  $(x_0, x_1 + 1)$ .*

Puisque la translation  $(x_0, x_1 + 1) = [(x_0, 3x_1), (x_0, \frac{x_1+1}{2})]$  est un commutateur, le Corollaire 5.14 entraîne le :

1. via l'élément  $\left(\frac{x_0+1}{x_0-1}, \frac{x_1+1}{x_1-1}\right)$  de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$

**Corollaire 5.15.** — *Le groupe de CREMONA est parfait, i.e. le groupe dérivé de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  entier :*

$$[\text{Bir}(\mathbb{P}^2), \text{Bir}(\mathbb{P}^2)] = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

**5.4.2. Description du sous-groupe normal de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  engendré par une transformation birationnelle quadratique.** —

**Proposition 5.16.** — *Soit  $A$  un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ ; on a*

$$N(A\sigma, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Supposons que  $A^2 \neq \text{id}$ . La transformation  $A\sigma$  est conjuguée à  $\sigma A$  via  $\sigma$ ; ainsi  $\sigma A$  appartient à  $N(A\sigma, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ . On constate alors que

$$A^2 = (A\sigma)(\sigma A)$$

est aussi dans  $N(A\sigma, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ ; or la Proposition 5.12 assure que  $N(A^2, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  donc  $N(A\sigma, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .

Supposons que  $A$  soit de carré trivial. Soit  $B$  l'élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  donné par  $(\alpha x_0 : \beta x_1 : \gamma x_2)$ ; on a  $N(A\sigma, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = N(BA\sigma B^{-1}, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ . Notons que  $BA\sigma B^{-1} = BAB\sigma$ . Un calcul montre qu'il existe  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que  $(BAB)^2$  soit distinct de l'identité; ce qui précède permet de conclure.  $\square$

**Proposition 5.17.** — *Si  $A$  désigne un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ , alors*

$$N(A\rho, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Lorsque  $A^2 \neq \text{id}$ , on peut reprendre l'idée de la Proposition 5.16.

Supposons que  $A^2 = \text{id}$ . Soit  $B$  l'automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  donné par  $(x_0 : \alpha x_1 : x_2)$ ; par définition  $N(A\rho, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = N(BA\rho B^{-1}, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ . Remarquons que  $BA\rho B^{-1} = BAB\rho$  d'où

$$N(A\rho, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = N(BAB\rho, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)).$$

Un calcul assure l'existence d'un complexe  $\alpha$  tel que  $(BAB)^2$  ne soit pas trivial. Ce qui précède entraîne donc que  $N(A\rho, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .  $\square$

**Proposition 5.18.** — *Si  $A$  désigne un élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , on a*

$$N(A\tau, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Si  $A^2$  est non trivial, on reprend la démonstration de la Proposition 5.16.

Si  $A^2 = \text{id}$ , on considère l'élément  $B$  de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  du type

$$(b^2 x_0 : ax_0 + bcx_1 : dx_0 + ex_1 + c^2 x_2)$$

avec  $b, c \in \mathbb{C}^*$ ,  $a, d, e \in \mathbb{C}$ .

On a  $N(A\tau, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = N(BA\tau B^{-1}, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ ; de plus  $\tau B^{-1}$  s'écrit aussi  $C\tau$  où  $C$  désigne l'élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  donné par

$$(b^4 x_0 : ab^2 x_0 + b^3 cx_1 : (a^2 - b^2 d)x_0 + b(2ac - be)x_1 + b^2 c^2 x_2).$$

En particulier  $BA\tau B^{-1} = BAC\tau$ . Dès que  $A$  n'est pas de la forme  $(x_0 : x_1 : \alpha x_0 + \beta x_1 - x_2)$  on peut trouver  $a, b, c, d$  et  $e$  tels que  $(BAC)^2 \neq \text{id}$ ; on peut alors conclure comme précédemment. Reste à traiter l'éventualité où  $A$  est du type  $(x_0 : x_1 : \alpha x_0 + \beta x_1 - x_2)$ . Soit  $B$  l'automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  défini par  $B = (x_0 : 2x_1 : -4x_2)$ . Un calcul montre que la transformation  $A\tau BA\tau B^{-1}$  de  $N(A\tau, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$  s'écrit

$$(x_0 : x_1 : -3\alpha x_0 - \beta x_1 + x_2).$$

D'après ce qui précède  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2) = N(A\tau BA\tau B^{-1}, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ ; l'inclusion

$$N(A\tau BA\tau B^{-1}, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) \subset N(A\tau, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$$

conduit à  $N(A\tau, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . □

Les Propositions 5.16, 5.17 et 5.18 impliquent le :

**Théorème 5.19.** — *Pour tout élément  $f$  de  $\text{Bir}_2$  on a  $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .*

### 5.4.3. Calculs de $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ dans un cadre un peu plus général. —

Le groupe  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$  est simple :

$$N(f, \text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))) = \text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1)), \quad \forall f \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1)).$$

Soit  $f$  une transformation de CREMONA préservant la fibration rationnelle  $x_1 = \text{cte}$  fibre à fibre. Alors  $f$  s'écrit

$$\left( \frac{a(x_1)x_0 + b(x_1)}{c(x_1)x_0 + d(x_1)}, x_1 \right),$$

i.e. s'identifie à un élément de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$ . On écrit alors abusivement :  $f$  est dans  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$ .

**Proposition 5.20.** — *Pour tout élément  $f$  dans  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$  on a*

$$N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Considérons un élément  $f$  de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$ ; puisque  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$  est simple, l'involution  $(-x_0, x_1)$  s'écrit comme un produit de conjugués de  $f$ . Comme

$$\forall A \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \quad N(A, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2),$$

on a le résultat annoncé. □

On obtient comme conséquence la :

**Proposition 5.21.** — *Soit  $f$  un élément du groupe de JONQUIÈRES ; alors*

$$N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — À conjugaison près on peut écrire  $f$  sous la forme  $(f_1(x_0, x_1), \gamma(x_1))$  où  $\gamma$  est une homothétie ou une translation. Soit  $h = (h_1(x_0, x_1), x_1)$  un élément de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$ ; l'élément  $g$  défini par  $g = [f, h]$  appartient à  $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) \cap \text{PGL}_2(\mathbb{C}(x_1))$ . Pour  $h$  bien choisi  $g$  est différent de l'identité. La Proposition 5.20 permet de conclure. □

**Corollaire 5.22.** — Soit  $f$  un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . S'il existe une transformation de CREMONA  $h$  telle que  $[f, h]$  préserve une fibration rationnelle, alors

$$N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

On en déduit la :

**Proposition 5.23.** — Soit  $f = (x_1, P(x_1) - \delta x_0)$ ,  $\delta \in \mathbb{C}^*$ ,  $P \in \mathbb{C}[x_1]$ ,  $\deg P \geq 2$ , un automorphisme de HÉNON ; on a

$$N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2)) = \text{Bir}(\mathbb{P}^2).$$

*Démonstration.* — Posons  $g = (x_0, 2x_1)$ ; le commutateur  $[f, g]$  de  $f$  et  $g$  préserve la fibration rationnelle  $x_0 = \text{cte}$ . Le Corollaire 5.22 implique le résultat.  $\square$

### 5.5. Une version un peu plus forte du Théorème de NETHER

**Théorème 5.24.** — Toute transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  dans lui-même s'écrit comme un produit d'involutions standards :

$$A_0 \sigma A_0^{-1} A_1 \sigma A_1^{-1} \dots A_p \sigma A_p^{-1}$$

les  $A_i$  désignant des éléments de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.* — Soit  $f$  dans le groupe de CREMONA. À conjugaison près par  $\sigma$  et/ou un élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  on a l'alternative suivante :

- ou bien  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$ ;
- ou bien  $f$  s'écrit

$$\sigma A_0 \sigma A_1 \dots \sigma A_{p-1} \sigma A_p$$

avec  $A_i \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

Introduisons l'ensemble  $G$  défini par

$$G = \{A_0 \sigma A_0^{-1} \dots A_p \sigma A_p^{-1} \mid A_i \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}), p \in \mathbb{N}\}.$$

Remarquons que  $G$  est un groupe qui contient  $\sigma$  et sur lequel  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  agit par conjugaison.

Notons que si  $D$  est un automorphisme diagonal, i.e.  $D$  est du type  $(\alpha x_0 : \beta x_1 : \gamma x_2)$  avec  $\alpha\beta\gamma$  non nul, alors

$$D \sigma D^{-1} = D^2 \sigma = \sigma D^{-2}.$$

Considérons un élément de  $G$  du type  $A \sigma A^{-1} D_1 \sigma D_1^{-1} D_2 \sigma D_2^{-1}$  où  $A$  (resp.  $D_i$ ) désigne un élément de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  (resp. un élément diagonal de  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ ). On constate que

$$A \sigma A^{-1} D_1 \sigma D_1^{-1} D_2 \sigma D_2^{-1} = A \sigma A^{-1} D_1^2 D_2^{-2}$$

donc  $A \sigma A^{-1} D_1^2 D_2^{-2}$  est dans  $G$ . Puisque  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  agit par conjugaison sur  $G$ , la transformation  $\sigma A^{-1} D A$  appartient à  $G$  pour tout  $A$  dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et tout  $D$  diagonal. Dit autrement si  $B$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  diagonalisable,  $\sigma B$  est dans  $G$ ; ce qui implique, puisque  $\sigma$  est dans  $G$ ,

que  $B$  est dans  $G$ . Maintenant soit  $C$  un élément quelconque de  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ . On peut écrire  $C$  sous la forme  $NTN^{-1}$  où  $T$  est triangulaire. Pour tout automorphisme  $D$  de  $\mathbb{P}^2$  on a

$$C = NTN^{-1} = NTN^{-1}NDN^{-1}ND^{-1}N^{-1} = (N(TD)N^{-1})(ND^{-1}N^{-1}).$$

En choisissant  $D$  diagonal convenable, on constate que  $C$  s'écrit comme produit de matrices diagonalisables, et donc  $C$  est dans  $G$ .

Finalement  $\sigma$  et  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  sont dans  $G$ ; on conclut en appliquant le théorème de NETHER.

□

## CHAPITRE 6

### TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE DEGRÉ 3

Il s'agit dans ce chapitre d'établir la classification g.d. des transformations cubiques. Alors que dans le cas quadratique on distingue trois orbites de degré 2 pur, ici il y a une infinité d'orbites. L'espace quotient est en fait de dimension 2. La décomposition de NÆTHER  $A_1\sigma A_2\sigma \dots A_n\sigma A_{n+1}$  fait penser que le degré général d'une transformation birationnelle est une puissance de 2. Il n'en est évidemment rien et en quelque sorte des phénomènes de dégérescence sont nécessaires pour faire apparaître les autres degrés, 3 étant le premier. Par ailleurs certains spécialistes ont suggéré que l'on pouvait observer de nouveaux phénomènes dynamiques en degré 3. Notre classification donne une liste de formes normales qui pourront par exemple permettre d'effectuer des expériences numériques.

#### 6.1. Généralités

Commençons par un énoncé élémentaire valable en tout degré :

**Lemme 6.1.** — Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA ; on a l'inclusion :  $\text{Ind } f \subset \text{Exc } f$ .

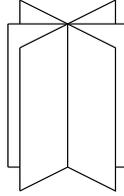
*Démonstration.* — D'après la Proposition 1.5 il suffit de vérifier que si  $m$  est d'indétermination pour  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ , alors  $\det \text{jac } f(m) = 0$ . On travaille dans  $\mathbb{C}^3$ ; soit  $m$  dans  $\text{Ind } f$  alors

$$f_0(m) = f_1(m) = f_2(m) = 0.$$

Comme les hypersurfaces d'équation  $f_i = 0$  sont invariantes par le champ radial

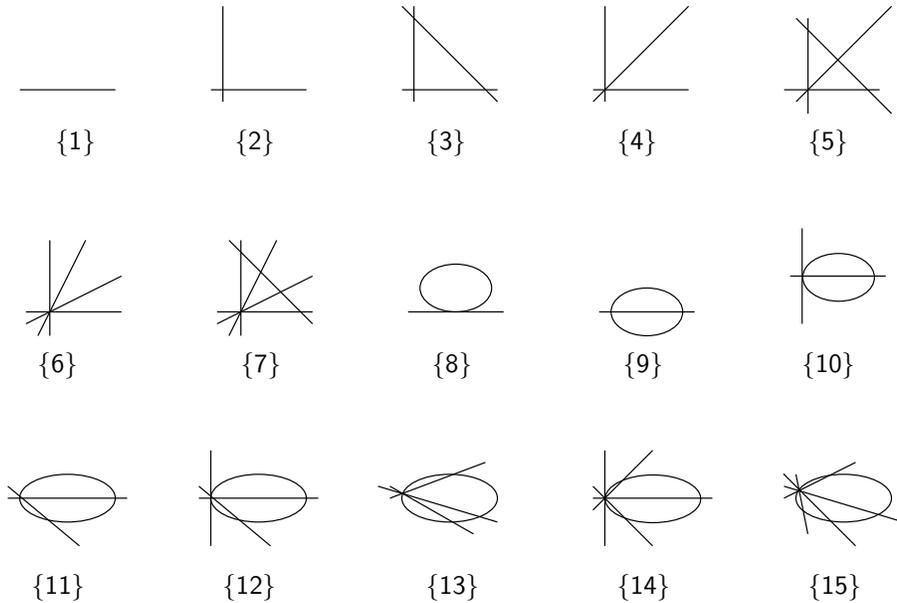
$$E = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

il existe des coordonnées locales  $(u, v, w)$  en  $m$  telles que  $E$  soit le champ  $\frac{\partial}{\partial w}$  et les hypersurfaces d'équation  $f_i = 0$  soient données par  $g_i(u, v) = 0$  les  $g_i$  étant holomorphes :



Localement  $f_i$  s'écrit donc  $U_i g_i(u, v)$ , avec  $U_i$  holomorphes, et ceci implique que  $\det \text{jac } f_{(m)} = 0$ . □

Si  $f$  est une transformation birationnelle purement cubique,  $\det \text{jac } f$  est un polynôme homogène de degré 6 dont les zéros sont contractés par  $f$ . Il est immédiat de constater que les composantes irréductibles de  $\det \text{jac } f$  sont toutes de degré inférieur ou égal à 2. En effet si la courbe irréductible  $C$  d'équation  $P = 0$  est contractée par exemple sur  $(0 : 0 : 1)$ , alors les deux premières composantes  $f_0$  et  $f_1$  de  $f$  sont divisibles par  $P$ ; par suite  $\deg P \leq 3$ . Si  $\deg P = 3$  les composantes  $f_0$  et  $f_1$  sont  $\mathbb{C}$ -colinéaires, ceci conduisant à la dégénérescence de  $f$ ; on en déduit que les courbes contractées par  $f$  forment un arrangement de droites et de coniques. Nous verrons que seules les configurations spéciales suivantes peuvent arriver :



Les configurations de droites contractées ne caractérisent pas complètement les orbites de l'équivalence gauche-droite comme nous le verrons.

Avant de justifier ceci mentionnons le fait suivant qui s'avère important :

**Fait.** Soit  $f$  une transformation de CREMONA. Puisque  $\text{Ind } f \subset \text{Exc } f$  la restriction de l'application  $f$  à  $\mathbb{P}^2 \setminus \text{Exc } f$  est bien définie et holomorphe sur  $\mathbb{P}^2 \setminus \text{Exc } f$ . Comme il en est de même pour  $f^{-1}$  on en déduit que  $f$  induit un biholomorphisme de  $\mathbb{P}^2 \setminus \text{Exc } f$  sur  $\mathbb{P}^2 \setminus \text{Exc } f^{-1}$ .

Soit  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$  une courbe plane dont les composantes irréductibles  $\Gamma_i$  sont de degré  $d_i$ . On note  $\Sigma = \mathbb{P}^2 \setminus \Gamma$  le complément de  $\Gamma$ . Le premier groupe d'homologie  $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$  s'identifie au groupe  $\mathbb{Z}^n / (d_1, \dots, d_n)$ ; lorsque la courbe  $\Gamma$  est à singularités ordinaires le groupe fondamental  $\pi_1(\Sigma, *)$  est abélien encore égal à  $\mathbb{Z}^n / (d_1, \dots, d_n)$  (théorème de DELIGNE-FULTON, voir [36]).

Une conséquence immédiate est la suivante valable en tout degré :

**Proposition 6.2.** — *Soit  $f$  un élément du groupe de CREMONA. Les ensembles  $\text{Exc } f$  et  $\text{Exc } f^{-1}$  ont le même nombre de composantes irréductibles.*

**Remarque 6.3.** — On note  $\text{Inv}$  l'application qui à une transformation birationnelle associe son inverse :  $\text{Inv}(f) = f^{-1}$ . L'involution  $\text{Inv}$  respecte la « filtration » par le degré :

$$\deg \text{Inv}(f) = \deg f.$$

En effet, soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites génériques de  $\mathbb{P}^2$ ; puisque

$$f_*, f^* : H^{1,1}(\mathbb{P}^2) \rightarrow H^{1,1}(\mathbb{P}^2)$$

sont auto-adjointes (voir par exemple [45]) on a

$$\deg f = \deg(f^* \mathcal{D}) = (f^* \mathcal{D}) \mathcal{D}' = \mathcal{D} (f_* \mathcal{D}') = \deg(f_* \mathcal{D}') = \deg f^{-1}.$$

## 6.2. « Classification » des transformations birationnelles cubiques

La classification repose en grande partie sur la description de l'ensemble des courbes contractées.

### 6.2.1. Le lieu exceptionnel contient une conique. —

Comme on l'a dit nous allons examiner au cas par cas les différentes configurations de ces arrangements de droites et coniques. Dans ce qui suit on dit qu'une conique est *réduite* si elle est ou bien lisse, ou bien constituée de deux droites distinctes. Lorsque la conique  $\mathcal{C}$  est constituée de deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  distinctes nous dirons que  $\mathcal{C}$  est contractée si les deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  le sont sur un même point. Modulo cette convention on a le :

**Lemme 6.4.** — *Un élément  $f$  de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  ne peut pas contracter deux coniques réduites distinctes.*

*Démonstration.* — Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique contractant les deux coniques  $\mathcal{Q}_1 = 0$  et  $\mathcal{Q}_2 = 0$ . Dans tous les cas on peut vérifier que  $f$  ne peut contracter  $\mathcal{Q}_1 = 0$  et  $\mathcal{Q}_2 = 0$  sur un même point. On se ramène donc à l'éventualité suivante :  $\mathcal{Q}_1 = 0$  est contracté sur  $(1 : 0 : 0)$  et  $\mathcal{Q}_2 = 0$  sur  $(0 : 1 : 0)$ ; on constate alors que la troisième composante de  $f$  est divisible par le produit  $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2$  ce qui est absurde.  $\square$

Il en résulte que  $\text{Exc } f$  est une courbe de degré 6 constituée de droites et d'au plus une conique réduite.

Dans le même ordre d'idée on a le :

**Lemme 6.5.** — Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique ; le lieu exceptionnel de  $f$  ne peut être réduit à une conique lisse.

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde : supposons que Exc  $f$  soit réduit à une conique  $C$  d'équation  $P = 0$ . À conjugaison près on peut supposer que  $C$  est contractée par  $f$  sur  $(1 : 0 : 0)$ . Il s'en suit que  $f$  est de la forme  $(f_0 : \ell_1 P : \ell_2 P)$ , les  $\ell_i$  désignant des formes linéaires nécessairement indépendantes. À conjugaison g.d. près on peut supposer que  $\ell_1 = x_0$  et  $\ell_2 = x_1$ . La transformation  $f$  étant birationnelle, la Proposition 1.5 assure que

$$\det \text{jac } f = P \left( -x_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \frac{\partial P}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \left( x_0 \frac{\partial P}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + P \right) \right)$$

est divisible par  $P^3$ . Par ailleurs on a d'après l'identité d'EULER :

$$\det \text{jac } f = P \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} \left( -3f_0 + x_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \left( 3P - x_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \right) = 3P \left( P \frac{\partial f_0}{\partial x_2} - f_0 \frac{\partial P}{\partial x_2} \right).$$

On en déduit que  $f_0$  est divisible par  $P$ ; la transformation  $f$  est alors de degré inférieur à 3.  $\square$

**Lemme 6.6.** — Soit  $f$  dans  $\mathring{\text{Bir}}_3$  contractant une conique lisse  $C$ . Supposons que  $f$  contracte deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  (au moins) ; alors  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$  appartient à  $C$ .

En particulier si  $f$  contracte  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ , toutes ces droites sont concourantes avec point d'intersection sur  $C$ .

*Démonstration.* — On peut se ramener à  $\mathcal{D}_1 : (x_0 = 0)$  et  $\mathcal{D}_2 : (x_1 = 0)$ . On peut aussi supposer que  $C : (P = 0)$  est contractée sur  $(1 : 0 : 0)$  et  $\mathcal{D}_1$  sur  $(0 : 1 : 0)$ ; ces conditions étant satisfaites la transformation  $f$  est du type suivant  $(x_0 q : \ell P : x_0 P)$  avec  $q$  forme quadratique et  $\ell$  forme linéaire. La droite  $\mathcal{D}_2$  est alors contractée, à conjugaison près, sur  $(0 : 0 : 1)$  ou sur  $(A : B : 0)$ . Si  $\mathcal{D}_2$  est contractée sur  $(A : B : 0)$ , alors  $P$  est divisible par  $x_1$  ce qui contredit l'irréductibilité. Ainsi  $\mathcal{D}_2$  est contractée sur  $(0 : 0 : 1)$  et  $f = (x_0 x_1 \ell : x_1 P : x_0 P)$ . On pose

$$\ell := ax_0 + bx_1 + cx_2, \quad P := \alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 + \delta x_0 x_1 + \varepsilon x_0 x_2 + \mu x_1 x_2$$

et on veut montrer que  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$  appartient à  $C$ , i.e. que  $\gamma = 0$ .

On va utiliser la birationnalité de  $f$  que l'on écrit dans la carte affine  $x_2 = 1$  :

$$f(x_0, x_1) = \left( \frac{x_1(ax_0 + bx_1 + c)}{\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma + \delta x_0 x_1 + \varepsilon x_0 + \mu x_1}, \frac{x_1}{x_0} \right).$$

On doit exprimer les conditions sur les coefficients pour que  $f(x_0, x_1) = (u, v)$  ait génériquement une seule solution. On obtient  $x_1 = vx_0$  et

$$(6.2.1) \quad vx_0(ax_0 + bvx_0 + c) = u(\alpha x_0^2 + \beta v^2 x_0^2 + \gamma + \delta vx_0^2 + \varepsilon x_0 + \mu vx_0).$$

On remarque que si le discriminant de l'équation (6.2.1) est identiquement nul et  $\gamma \neq 0$  alors  $a = b = c = 0$ , cas exclu. Donc pour que cette équation quadratique en  $x_0$  ait génériquement une unique solution il faut que le trinôme ci-dessus possède une racine  $x_0 = \eta$  indépendante de  $(u, v)$ . C'est le cas par exemple si  $\gamma = 0$  ( $\eta = 0$ ). Un calcul direct montre que c'est la seule possibilité.  $\square$

**Remarques 6.7.** — *i.* Soit  $f$  une transformation rationnelle purement cubique. La preuve ci-dessus montre en fait que si  $f$  contracte une conique lisse et deux droites qui s'intersectent sur la conique, alors  $f$  est birationnelle ; de plus on dispose de la forme normale

$$(x_0x_1L_3 : x_1(x_0L_1 + x_1L_2) : x_0(x_0L_1 + x_1L_2)),$$

les  $L_i$  désignant des formes linéaires (satisfaisant des conditions génériques évidentes).

*ii.* On peut voir que, génériquement pour un tel  $f$ , il y a deux autres droites contractées nécessairement du type  $x_1 = \eta x_0$ . Dans la carte affine  $x_2 = 1$ , sur la droite  $x_1 = \eta x_0$ , on a avec les notations précédentes :

$$f(x_0, \eta x_0) = \left( \frac{\eta(a + b\eta)x_0 + \eta c}{(\alpha + \beta\eta^2 + \delta\eta)x_0 + \varepsilon + \mu\eta}, \eta \right).$$

On cherche alors les  $\eta$  pour lesquels la première composante est une constante en  $x_0$ , *i.e.* les  $\eta$  pour lesquels

$$\begin{vmatrix} a + b\eta & c \\ \alpha + \beta\eta^2 + \delta\eta & \varepsilon + \mu\eta \end{vmatrix} = (b\mu - c\beta)\eta^2 + (a\mu + b\varepsilon - c\delta)\eta + (a\varepsilon - c\alpha)$$

est nul ; génériquement il y a deux solutions.

**Proposition 6.8.** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique qui contracte une conique lisse ;  $f$  contracte au plus 4 droites et a au plus 5 points d'indétermination distincts.*

*Démonstration.* — Si  $f$  contracte une conique  $C$ , alors  $\text{Exc } f$  n'est pas réduit à  $C$  (Lemme 6.5) et les autres courbes contractées par  $f$  sont nécessairement des droites (Lemme 6.4). Désignons par  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$  les droites contractées par  $f$  ; puisque  $\det \text{jac } f$  est de degré 6, l'entier  $k$  est majoré par 4. De sorte que  $\text{Exc } f$  a au plus 5 composantes et d'après la Proposition 6.2 l'ensemble  $\text{Exc } f^{-1}$  aussi. Mais les courbes exceptionnelles de  $f^{-1}$  sont contractées sur les points d'indétermination de  $f$ .  $\square$

D'après les Lemmes 6.4 et 6.5 une transformation birationnelle cubique qui contracte une conique lisse contracte au moins une droite. On a l'énoncé de forme normale suivant :

**Lemme 6.9.** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique qui contracte une conique lisse (et donc au moins une droite). Il existe  $a, b$  dans  $\mathbb{C}$  et  $L_1, L_2, L_3$  trois formes linéaires tels qu'on ait à conjugaison gauche-droite près*

$$f = (x_1(ax_0 + bx_1)L_3 : x_0(x_0L_1 + x_1L_2) : x_1(x_0L_1 + x_1L_2)).$$

*Démonstration.* — Notons  $f_0, f_1$  et  $f_2$  les composantes de  $f$ . Soit  $P = 0$  l'équation de la conique lisse  $C$  que l'on peut supposer être contractée sur  $(1 : 0 : 0)$ . On en déduit l'existence de deux formes linéaires indépendantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  telles que  $f = (f_0 : \alpha_1 P : \alpha_2 P)$ . Soit  $\ell_1 = 0$  l'équation d'une droite  $\mathcal{D}_1$  contractée par  $f$ . Si  $\mathcal{D}_1$  était contractée sur le point  $(1 : 0 : 0)$ , les formes linéaires  $\alpha_i$  seraient multiples et  $f$  ne serait pas birationnelle ; on peut donc supposer, à conjugaison g.d. près, que  $\mathcal{D}_1$  est contractée sur le point  $(0 : 1 : 0)$ . Il s'en suit que  $\alpha_2$  coïncide, à multiplication par un scalaire près, avec  $\ell_1$  et qu'il existe une forme quadratique  $q$  telle que  $f_0 = \alpha_2 q$ , *i.e.*  $f = (\alpha_2 q : \alpha_1 P : \alpha_2 P)$ . Comme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont indépendantes  $f$  s'écrit à conjugaison

g.d. près  $(x_1q : x_0P : x_1P)$ , soit  $\left(\frac{q}{P}, \frac{x_0}{x_1}\right)$  dans la carte affine  $x_2 = 1$ . La transformation  $f$  est birationnelle si, pour tous  $\zeta, \mu$ , le système constitué des équations suivantes

$$q - \zeta P = 0, \quad x_0 - \mu x_1 = 0$$

a une unique solution en dehors des points d'indétermination. Dit autrement tout élément du pinceau de coniques défini par  $q - \zeta P = 0$  doit couper les éléments du pinceau de droites  $x_0 - \mu x_1 = 0$  en un unique point en dehors de  $\text{Ind } f$ . Puisque génériquement une droite coupe une conique en deux points, chaque conique du pinceau  $q - \zeta P = 0$  passe par  $(0, 0)$ , i.e.  $q$  et  $P$  s'annulent en  $(0, 0)$ ; ainsi  $f$  est du type

$$(x_1(x_0\ell_1 + x_1\ell_2) : x_0(x_0L_1 + x_1L_2) : x_1(x_0L_1 + x_1L_2)).$$

Le pinceau défini par  $\eta(x_0\ell_1 + x_1\ell_2) + \nu(x_0L_1 + x_1L_2) = 0$  contient une conique dégénérée ;  $C$  étant lisse, cette dégénérescence n'a pas lieu lorsque  $\eta$  est nul et il existe  $\nu$  tel que

$$x_0\ell_1 + x_1\ell_2 + \nu(x_0L_1 + x_1L_2) = (ax_0 + bx_1)L_3.$$

Il en résulte qu'à conjugaison g.d. près  $f$  est de la forme

$$(x_1(ax_0 + bx_1)L_3 : x_0(x_0L_1 + x_1L_2) : x_1(x_0L_1 + x_1L_2)).$$

□

Ce Lemme s'avère utile pour établir la :

**Proposition 6.10.** — Soit  $f$  un élément de  $\text{Bir}_3$ . Supposons que  $\text{Exc } f$  soit constitué d'une seule droite et d'une conique lisse. À conjugaison gauche-droite près on a :

- lorsque la droite est tangente à la conique,  $f$  est de la forme

$$(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1^3 : x_1(x_0^2 + x_1x_2)) \quad \{8\};$$

- lorsque la droite n'est pas tangente à la conique,  $f$  est du type suivant

$$(x_1^2x_2 : x_0(x_0x_2 + x_1^2) : x_1(x_0x_2 + x_1^2)) \quad \{9\}.$$

La notation  $\{k\}$  signifie que l'ensemble exceptionnel de la transformation considérée présente la configuration  $\{k\}$  (voir §6.1).

*Démonstration.* — D'après le Lemme 6.9 et sa démonstration la transformation  $f$  est, à conjugaison g.d. près, du type  $(x_1(ax_0 + bx_1)L_3 : x_0(x_0L_1 + x_1L_2) : x_1(x_0L_1 + x_1L_2))$ , la conique contractée étant définie par  $x_0L_1 + x_1L_2 = 0$  et la droite contractée par  $x_1 = 0$ . Un calcul montre que

$$\det \text{jac } f = 3(x_0L_1 + x_1L_2)x_1(ax_0 + bx_1) \left( (x_0L_1 + x_1L_2) \frac{\partial L_3}{\partial x_2} - L_3 \frac{\partial(x_0L_1 + x_1L_2)}{\partial x_2} \right).$$

Puisque  $\det \text{jac } f$  s'annule uniquement sur les courbes contractées et que  $C$  est lisse, le coefficient  $a$  est nul. De plus

$$(x_0L_1 + x_1L_2) \frac{\partial L_3}{\partial x_2} - L_3 \frac{\partial(x_0L_1 + x_1L_2)}{\partial x_2}$$

est un multiple de  $x_1^p(x_0L_1 + x_1L_2)^q$ , le couple  $(p, q)$  appartenant à  $\{(2, 0), (1, 1)\}$ . Posons

$$L_i := a_ix_0 + b_ix_1 + c_ix_2.$$

Si  $p = 2$ , alors ou bien  $(a_1, a_2) = \left(\frac{c_1a_3}{c_3}, \frac{b_3c_1 + a_3c_2 - c_3b_1}{c_3}\right)$ , ou bien  $c_1 = a_3 = c_3 = 0$ . Dans le premier cas,  $c_3$  est non nul et on peut supposer que  $L_3 = x_2$ ; on obtient pour modèle à conjugaison g.d. près :  $(x_1^2x_2 : x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2))$ . La configuration des courbes contractées est donnée par :

$$\begin{array}{c} x_1^2 + x_0x_2 = 0 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ x_1 = 0 \end{array}$$

On constate que les points d'indétermination de  $f$  sont les points d'intersection de la droite d'équation  $x_1 = 0$  avec la conique  $x_1^2 + x_0x_2 = 0$ .

La seconde éventualité conduit à conjugaison g.d. près à  $(x_1^3 : x_0P : x_1P)$  avec

$$P = a_1x_0^2 + (b_1 + a_2)x_0x_1 + b_2x_1^2 + c_2x_1x_2;$$

toujours à conjugaison g.d. près on obtient  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1^3 : x_1(x_0^2 + x_1x_2))$ . La configuration des courbes contractées est alors donnée par :

$$\begin{array}{c} x_0^2 + x_1x_2 = 0 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ x_1 = 0 \end{array}$$

Notons que l'unique point d'indétermination de  $f$  est le point de tangence entre la droite  $x_1 = 0$  et la conique  $x_1^2 + x_0x_2 = 0$ .

Lorsque l'exposant  $q$  vaut 1, on note que  $c_1$  et  $c_2$  sont nuls d'où le modèle suivant :

$$(x_1^2(a_3x_0 + b_3x_1 + c_3x_2) : x_0P : x_1P)$$

avec  $P = a_1x_0^2 + (b_1 + a_2)x_0x_1 + b_2x_1^2$  auquel cas  $C$  n'est pas lisse.  $\square$

**Remarques 6.11.** — *i.* L'inverse de  $f = (x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1^3 : x_1(x_0^2 + x_1x_2))$  est

$$(x_0x_1x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 - x_0^2x_1);$$

on constate que  $\text{Exc } f^{-1} = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ . Les lieux exceptionnels de  $f$  et  $f^{-1}$  « ne sont donc pas de même nature » :  $f$  contracte une conique et une droite tangente à cette conique et  $f^{-1}$  deux droites. Ce phénomène n'arrive pas en degré deux où dans ce cas les configurations de  $\text{Exc } f$  et  $\text{Exc } f^{-1}$  sont linéairement les mêmes. Remarquons, comme l'indique l'énoncé 6.2, que les groupes fondamentaux des compléments des deux ensembles exceptionnels sont isomorphes.

*ii.* L'inverse de  $f = (x_1^2x_2 : x_0(x_0x_2 + x_1^2) : x_1(x_0x_2 + x_1^2))$  est

$$(x_1(x_2^2 - x_0x_1) : x_2(x_2^2 - x_0x_1) : x_0x_2^2);$$

on remarque que  $\text{Exc } f^{-1} = \{x_2 = 0, x_2^2 - x_0x_1 = 0\}$ , dit autrement  $f$  et  $f^{-1}$  contractent une conique et une droite non tangente à la conique.

**Remarque 6.12.** — Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique dont le lieu exceptionnel contient une conique réduite  $P = 0$  et au moins deux autres droites. Ces courbes ne peuvent pas être contractées sur 3 points distincts alignés. En effet à conjugaison g.d. près on peut supposer que  $\text{Exc } f = \{x_0 = 0, x_1 = 0, P = 0\}$ . Raisonnons par l'absurde : supposons que  $P = 0, x_0 = 0, x_1 = 0$  soient respectivement contractés sur les points  $(0 : 0 : 1)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 1 : 1)$ . On constate que la première composante de  $f$  est divisible par  $x_0x_1P$  : ce qui n'est pas possible.

Le lemme qui suit est l'argument fondamental de la classification des transformations birationnelles cubiques.

**Lemme 6.13.** — Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique. On suppose que  $f$  contracte une conique réduite  $C$  et au moins deux droites distinctes. Alors  $f$  est, à conjugaison gauche-droite près, de l'un des types suivants :

- (a)  $(x_0(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + \varepsilon x_1x_2) : x_1(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + \varepsilon x_1x_2) : x_0x_1x_2)$ ;
- (b)  $(x_0(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + \varepsilon x_1x_2) : x_1(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + \varepsilon x_1x_2) : x_0x_1^2)$ ;
- (c)  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$ ;
- (d)  $(x_0x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_1x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_0x_1(x_0 - x_1))$ .

Tous ces modèles sont birationnels dès qu'ils sont purement cubiques.

*Démonstration.* — Supposons que les deux droites contractées aient pour équation  $x_0 = 0$ , resp.  $x_1 = 0$  et que  $C$  soit donnée par  $P = 0$ . On se ramène, grâce au Lemme 6.4 et à la Remarque 6.12, au cas où  $x_0 = 0, x_1 = 0$  et  $C$  sont contractées sur

$$(0 : 1 : 0), \quad (1 : 0 : 0) \quad \text{et} \quad (0 : 0 : 1)$$

respectivement. Il existe alors une forme linéaire  $\ell$  telle que  $f = (x_0P : x_1P : x_0x_1\ell)$ . À conjugaison près on peut supposer que  $\ell$  est l'une des trois formes linéaires  $x_2, x_1 - x_0, x_1$ . Écrivons  $P$  sous la forme  $ax_0^2 + bx_1^2 + cx_0x_1 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + \varepsilon x_2^2$ . Puisque  $f$  est purement cubique  $P$  n'est divisible ni par  $x_0$ , ni par  $x_1$ ; dans la carte affine  $x_0 = 1$  la transformation  $f$  s'écrit

$$f(x_1, x_2) = \left( x_1, \frac{\ell}{a + bx_1^2 + cx_1 + dx_2 + ex_1x_2 + \varepsilon x_2^2} \right).$$

La birationalité de  $f$  implique que les équations  $f(x_1, x_2) = (u, v)$  possèdent génériquement une seule solution ; on démontre alors sans difficulté que  $\varepsilon = 0$ . Lorsque  $\ell = x_2$  (resp.  $\ell = x_1$ ) on obtient la première (resp. deuxième) forme normale. Supposons que  $\ell = x_1 - x_0$ . Observons que  $d$  et  $e$  ne peuvent pas être simultanément nuls ; comme  $x_0$  et  $x_1$  jouent un rôle symétrique on peut supposer que  $e = 1$  et

$$P = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_0x_1 + dx_0x_2 + x_1x_2.$$

À composition à droite près par  $(x_0 : x_1 : x_2 - (c - bd)x_0 - bx_1)$  la transformation  $f$  s'écrit

$$(x_0(\alpha x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2) : x_1(\alpha x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1)).$$

On note que  $\alpha$  et  $\gamma$  ne sont pas simultanément nuls. Si  $\alpha$  est non nul on se ramène à la forme normale :

$$(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1)) \quad (\text{c})$$

qui contracte la conique lisse  $x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2 = 0$  et les droites

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_1 = x_0, \quad x_1 = -\gamma x_0.$$

Ces droites sont au nombre de quatre si  $\gamma \notin \{0, 1\}$ ; de plus, la droite  $x_1 = -\gamma x_0$  est tangente à la conique lisse d'équation  $x_0^2 + x_1x_2 + \gamma x_0x_2 = 0$ . Lorsque  $\alpha$  est nul, on obtient la forme normale

$$(x_0x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_1x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_0x_1(x_0 - x_1)) \quad (\text{d})$$

qui contracte les cinq droites  $x_0 = 0, x_1 = 0, x_1 = x_0, x_1 + \gamma x_0 = 0, x_2 = 0$ . □

Dans l'Appendice A on réduit le nombre de paramètres apparaissant dans les différents modèles du Lemme 6.13 à conjugaison g.d. près (§A.1). On compare ensuite les modèles possédant la même configuration de courbes contractées ; on constate, en utilisant les configurations de  $\text{Ind } f^{-1}$ , que certains sont g.d. conjugués, d'autres non (§A.2). Cette étude conduit à la liste de formes normales suivante dans laquelle nous avons précisé la configuration des droites contractées entre accolades.

**Proposition 6.14.** — *Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . On suppose que  $f$  contracte une conique réduite  $C$  et au moins deux droites distinctes. Alors  $f$  est, à conjugaison gauche-droite près, de l'une des formes suivantes :*

1.  $(x_0(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_0x_1x_2)$ , {5};
2.  $(x_0(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_1(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_0x_1x_2)$ , {5};
3.  $(x_0x_2(x_0 + x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1) : x_0x_1^2)$ , {5};
4.  $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_0x_1x_2)$ ,  $\gamma^2 \neq 4$ , {6};
5.  $(x_0x_2(x_1 + x_0) : x_1x_2(x_1 + x_0) : x_0x_1(x_0 - x_1))$ , {7};
6.  $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$ ,  $\gamma^2 \neq 4$ , {7};
7.  $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$ , {10};
8.  $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1^2)$ , {10};
9.  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2)$ , {10};
10.  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$ , {11};
11.  $(x_0(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$ , {11};
12.  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$ , {12};
13.  $(x_0(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$ , {12};
14.  $(x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$ ,  $\gamma \notin \{0, 1\}$ , {13};
15.  $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$ ,  $\gamma^2 \neq 4$ , {14};
16.  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$ , {14};
17.  $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$ ,  $\gamma^2 \neq 4$ ,  $\delta \neq \gamma_{\pm}$ , {15}

avec  $\gamma_{\pm} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$ .

**Remarque 6.15.** — Considérons la transformation  $f$  de la Proposition 6.14 définie par :

$$(x_0x_2(x_1 + x_0) : x_1x_2(x_1 + x_0) : x_0x_1(x_0 - x_1)), \{7\};$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \text{Exc } f &= \{x_2 = 0, x_1 = 0, x_0 = 0, x_1 + x_0 = 0, x_0 = x_1\}; \\ \text{Ind } f &= \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0), (1 : 1 : 0)\}. \end{aligned}$$

On constate en particulier que le nombre de points d'indétermination diffère du nombre de courbes contractées ce qui n'arrive pas en degré 2; la raison est la suivante : les droites  $x_2 = 0$  et  $x_1 + x_0 = 0$  sont contractées sur un même point, le point  $(0 : 0 : 1)$  (ici la conique réduite est constituée de ces deux droites).

Puisque  $f$  est une involution, son inverse présente la même configuration. En éclatant le point  $(0 : 0 : 1)$  on constate que le diviseur exceptionnel est envoyé sur  $x_2 = 0$  et sur ce diviseur exceptionnel il y a encore un point d'indétermination qui lui est envoyé sur  $x_0 + x_1 = 0$ .

Mentionnons d'autres éléments  $f$  du groupe de CREMONA pour lesquels un point d'indétermination est éclaté sur plusieurs courbes et pour lequel le comportement de  $f^{-1}$  diffère de

celui de  $f$  (voir [9]) :

$$\begin{aligned} & ((x_0x_1 - x_0^2)^n x_2 : x_0^{n-1}(x_1 - x_0)^{n+1}(x_0 + x_2) + x_2 \sum_{j=0}^n a_j (x_0x_1 - x_0^2)^{n-j} (x_2^2 - x_0x_1 - x_1x_2)^j : \\ & x_2(x_0x_1 - x_0^2)^{n-1} (x_2^2 - x_0x_1 - x_1x_2)). \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 2$ , i.e.  $\deg f \geq 5$ , ces transformations ont quatre courbes exceptionnelles

$$x_0 = 0, \quad x_0 = x_1, \quad x_2 = 0, \quad -x_2^2 + x_0x_1 + x_1x_2 = 0;$$

les trois premières sont contractées sur le point  $(0 : 1 : 0)$ . Les composantes de  $f^{-1}$  sont données par

$$\begin{aligned} & x_0^n x_2 \left( \sum_{j=0}^n a_j x_0^{n-j} x_2^j - x_0^{n-1} (x_0 + x_1) \right), \\ & (x_0 + x_2) \left( \sum_{j=0}^n a_j x_0^{n-j} x_2^j - x_0^{n-1} x_2^j - x_0^{n-1} (x_0 + x_1) \right)^2, \\ & x_0^{n-1} x_2 \left( x_0^{n-1} (x_2^2 + x_0x_1 + x_1x_2) - (x_0 + x_2) \sum_{j=0}^n a_j x_0^{n-j} x_2^j \right); \end{aligned}$$

son ensemble exceptionnel est formé de

$$x_0 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_0^n + x_0^{n-1} x_1 - \sum_{j=0}^n a_j x_0^{n-j} x_2^j = 0$$

et

$$x_0^{n+1} - (x_0 + x_2) \left( x_0^n + x_0^{n-1} x_1 - \sum_{j=0}^n a_j x_0^{n-j} x_2^j \right) = 0.$$

Les deux premières courbes sont contractées sur  $(0 : 1 : 0)$ , la troisième sur  $(0 : 0 : 1)$  et la dernière sur  $(1 : 1 : 0)$ .

### 6.2.2. Le lieu exceptionnel ne contient pas de conique. —

Nous continuons la classification en étudiant les transformations cubiques dont l'ensemble exceptionnel est un arrangement de droites.

#### 6.2.2.1. Le lieu exceptionnel est réduit à une droite. —

Soit  $f$  une transformation birationnelle qui contracte exactement une droite que l'on suppose être  $x_2 = 0$ . On a :

$$H^1(\mathbb{P}^2 \setminus \{x_2 = 0\}, \mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{P}^2 \setminus \text{Exc } f^{-1}, \mathbb{Z}) = 0$$

ce qui implique que  $\text{Exc } f^{-1}$  est aussi une droite. À conjugaison g.d. près on se ramène à :

$$\text{Exc } f = \text{Exc } f^{-1} = \{x_2 = 0\}$$

de sorte que  $f$  induit un automorphisme polynomial de degré 3 dans la carte  $\mathbb{C}^2 = (x_2 = 1)$ .

**Proposition 6.16.** — Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique contractant exactement une droite ;  $f$  est gauche-droite conjuguée à la transformation

$$(x_0x_2^2 + x_1^3 : x_1x_2^2 : x_2^3), \quad \{1\}.$$

En particulier ces transformations forment une seule orbite sous l'action gauche-droite.

La démonstration de cette proposition utilise le :

**Lemme 6.17 ([78]).** — Soit  $f$  un germe de fonction holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  ; écrivons  $f$  sous la forme  $f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p}$  avec  $\text{pgcd}(f_1, \dots, f_p) = 1$ . On suppose que les  $f_i$  sont irréductibles et que les  $n_i$  sont premiers entre eux, i.e.  $f$  n'est pas une puissance. Soit  $g$  un germe de fonction holomorphe satisfaisant  $df \wedge dg = 0$ . Il existe un germe de fonction holomorphe  $\ell$  à l'origine de  $\mathbb{C}$  telle que  $g = \ell \circ f$ .

**Remarque 6.18.** — Si  $f$  et  $g$  sont de plus des polynômes homogènes, sous les hypothèses du Lemme 6.17 on obtient  $g = \varepsilon f^s$  avec  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{C}$  et  $s$  dans  $\mathbb{N}$ .

*Démonstration de la Proposition 6.16.* — D'après ce qui précède on peut supposer que  $f$  induit un automorphisme polynomial dans la carte  $x_2 = 1$ . On écrit  $f$  sous la forme

$$f = (P, Q) = (P_0 + P_1 + P_2 + P_3, Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

les  $P_i$  et  $Q_i$  appartenant à  $\mathbb{C}[x_0, x_1]_i$ . À conjugaison g.d. près on peut supposer que  $P_0 = Q_0 = 0$  et que  $P_3$  est non identiquement nul. Comme  $f$  est un automorphisme polynomial, il existe un complexe non nul  $\eta$  tel que  $dP \wedge dQ = \eta dx_0 \wedge dx_1$ . Si  $P_3$  n'est pas une puissance le Lemme 6.17 assure que  $Q_3 = \alpha P_3$  ; à conjugaison g.d. près, on se ramène à  $Q_3 = 0$  puis à  $Q_1 = Q_2 = 0$  ce qui est impossible. De sorte que  $P_3$  est une puissance et la seule possibilité à conjugaison linéaire près est  $P_3 = x_1^3$  ; on peut ici encore se ramener à  $Q_3 = 0$  et  $Q_2 = \varepsilon x_1^2$ .

Si  $\varepsilon$  est nul,  $f$  s'écrit  $(P_1 + P_2 + x_1^3, Q_1)$  et nécessairement  $Q_1 = \mu x_1$  ce qui fait qu'à conjugaison g.d. près on se ramène à  $(x_0 + x_1^3, x_1)$ .

Reste à s'assurer que  $\varepsilon = 0$  ; si ce n'est pas le cas on peut supposer que  $\varepsilon$  vaut 1. Toujours en exploitant  $dP \wedge dQ = \eta dx_0 \wedge dx_1$ , il vient  $dP_2 \wedge dx_1^2 + dx_1^3 \wedge dQ_1 = 0$  qui conduit à

$$d(2P_2 - 3x_1Q_1) \wedge dx_1 = 0$$

de sorte que  $P_2 = \frac{3x_1Q_1}{2} + \beta x_1^2$ . À conjugaison g.d. près  $f$  est du type

$$\left( P_1 + \frac{3x_1Q_1}{2} + \beta x_1^3, Q_1 + x_1^2 \right)$$

avec la condition  $(3Q_1^2/4 - 2P_1x_1) \wedge dx_1 = 0$  ; celle-ci implique que  $Q_1$  est divisible par  $x_1$  et empêche que  $f$  soit un automorphisme.  $\square$

**Remarque 6.19.** — Le rapporteur nous a signalé que la Proposition 6.16 s'obtient à partir des travaux de [53] qui décrivent les classes de conjugaison des automorphismes holomorphes.

6.2.2.2. *Le lieu exceptionnel est constitué de deux droites.* —

Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  qui contracte exactement deux droites. Comme  $\text{Exc } f$  a deux composantes, il en est de même pour  $\text{Exc } f^{-1}$ . Les arguments topologiques précédents nous indiquent que  $\text{Exc } f^{-1}$  est constitué soit de deux droites distinctes, soit d'une conique lisse et d'une droite tangente à la conique. Rappelons que le complément de ces deux types de courbes dans  $\mathbb{P}^2$  sont biholomorphes. Quoiqu'il en soit on peut supposer, à conjugaison g.d. près, que  $\text{Exc } f = \{x_0 = 0, x_2 = 0\}$  et que  $\text{Exc } f^{-1}$  est de l'un des deux types suivants :

$$\text{Exc } f^{-1} = \{x_0 = 0, x_2 = 0\}; \quad \text{Exc } f^{-1} = \{x_2 = 0, x_1^2 - x_0x_2 = 0\}.$$

Traisons la première possibilité ;  $f$  induit un biholomorphisme de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$  dans lui-même. Si on écrit  $f = (f_0, f_1)$  dans cette carte, on note que  $f_0$  et  $f_1$  n'ont pas de pôle en dehors de  $x_0 = 0$  et que  $f_0$  n'y a pas de zéro. Par suite il existe  $p, q$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $g_1$  dans  $\mathbb{C}[x_0, x_1]$  tels que

$$f_0(x_0, x_1) = x_0^p, \quad f_1(x_0, x_1) = x_0^q g_1(x_0, x_1).$$

Mais le déterminant jacobien de  $f$  est

$$px_0^{p-1} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0, x_1);$$

comme  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$ , on a  $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0, x_1) = ax_0^n$ . Ainsi à conjugaison linéaire près :

$$f = (x_0^p, x_0^{n+q}x_1 + x_0^q\psi(x_0))$$

avec  $\psi \in \mathbb{C}[x_0]$ . Visiblement  $p$  vaut  $\pm 1$  ; il nous reste à lister  $q, n+q$  et  $\psi$  pour lesquels ce type de transformations est de degré 3 exactement. On obtient, à conjugaison g.d. près, les modèles suivants :

$$\begin{aligned} (x_0x_2^2 : x_0^2x_1 : x_2^3), & \quad (x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3), \\ (x_0^2x_2 : x_0^3 + x_2^3 + x_0x_1x_2 : x_0x_2^2), & \quad (x_0^2x_2 : x_0^2x_1 + x_2^3 : x_0x_2^2). \end{aligned}$$

Considérons pour finir la seconde éventualité :  $\text{Exc } f^{-1} = \{x_1 = 0, x_1^2 - x_0x_2 = 0\}$ . La Proposition 6.10 donne la description de  $f^{-1}$  :

$$(x_1^3 : x_0(\alpha x_0^2 + \beta x_0x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1x_2) : x_1(\alpha x_0^2 + \beta x_0x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1x_2))$$

soit à conjugaison g.d. près  $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1^3 : x_1(x_0^2 + x_1x_2))$ ; l'inverse de cette transformation est donné par  $(x_0x_1x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 - x_0^2x_1)$ .

Il s'en suit la :

**Proposition 6.20.** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique qui contracte exactement deux droites ( $\{2\}$ ). Alors  $f$  est à conjugaison gauche-droite près de l'une des formes suivantes :*

$$\begin{aligned} (x_0x_2^2 : x_0^2x_1 : x_2^3), & \quad (x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3), & \quad (x_0^2x_2 : x_0^3 + x_2^3 + x_0x_1x_2 : x_0x_2^2), \\ (x_0^2x_2 : x_0^2x_1 + x_2^3 : x_0x_2^2), & \quad (x_0x_1x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 - x_0^2x_1). \end{aligned}$$

6.2.2.3. *Le lieu exceptionnel est constitué de trois droites.* —

On procède plus ou moins comme précédemment. Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  qui contracte exactement trois droites. Ces trois droites sont

- (i) ou bien concourantes ;
- (ii) ou bien en position générale.

Nous allons traiter ces deux éventualités l'une après l'autre.

(i) Supposons que  $\text{Exc } f$  soit constitué de trois droites concourantes. Comme  $\text{Exc } f$  et  $\text{Exc } f^{-1}$  ont même nombre de composantes et ont leurs compléments difféomorphes, on a les deux possibilités suivantes :

- $\text{Exc } f^{-1}$  est formé d'une conique lisse et de deux droites réalisant la configuration  $\{11\}$ . En inversant les modèles réalisant cette configuration (10. et 11. dans la Proposition 6.14) on constate que cette situation n'arrive pas.
- $\text{Exc } f^{-1}$  est formé de trois droites qui sont nécessairement concourantes. Dans ce cas on peut supposer, à conjugaison g.d. près, que  $\text{Exc } f = \text{Exc } f^{-1}$  :

**Proposition 6.21.** — *Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  dont le lieu exceptionnel est constitué de trois droites concourantes ( $\{4\}$ ). Alors, à conjugaison gauche-droite près,  $f$  est de l'un des types suivants :*

$$(x_0^3 : x_0^2 x_1 : (x_0 - x_1)x_1 x_2), \quad (x_0^2(x_0 - x_1) : x_0 x_1(x_0 - x_1) : x_0 x_1 x_2 + x_1^3).$$

Dans les deux éventualités l'ensemble  $\text{Exc } f^{-1}$  est aussi formé de trois droites concourantes.

*Démonstration.* — D'après ce qui précède il suffit d'examiner le cas où

$$\text{Exc } f = \text{Exc } f^{-1} = \{x_0 x_1 (x_0 - x_1) = 0\}.$$

Sous cette hypothèse  $f$  respecte la fibration  $x_1/x_0 = \text{cte}$ . En effet considérons une droite  $x_1 = \beta x_0$  avec  $\beta \notin \{0, 1, \infty\}$ ; introduisons l'application holomorphe

$$\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{x_0 x_1 (x_0 - x_1) = 0\} \subset \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 x_1 (x_0 - x_1) = 0\}$$

définie par  $t \mapsto (e^t, \beta e^t)$ . Comme  $f$  est, par hypothèse, un automorphisme de

$$\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 x_1 (x_0 - x_1) = 0\},$$

l'application  $\varphi = f \circ \psi$  est une application holomorphe de  $\mathbb{C}$  à valeurs dans

$$\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 x_1 (x_0 - x_1) = 0\} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{C}.$$

Une application directe du théorème de PICARD assure que  $\varphi$  est à valeurs dans une droite  $x_1 = \beta' x_0$  et ceci pour tout  $\beta$ , d'où l'affirmation. Par conséquent  $f$  s'écrit en coordonnées homogènes :

$$f = ((cx_0 + dx_1)Q : (ax_0 + bx_1)Q : C), \quad ad - bc \neq 0,$$

avec  $Q$  quadratique et  $C$  cubique. Comme  $Q$  est contracté par  $f$  on peut supposer que  $Q = x_0 \ell$  où  $\ell$  est l'une des formes linéaires  $x_0$  ou  $x_0 - x_1$ . Finalement à conjugaison g.d. près

on se ramène à :

$$f = (x_0^2 \ell : x_0 x_1 \ell : C), \quad \deg C = 3.$$

Mais le calcul explicite de  $\det \text{jac } f$  conduit à

$$C = x_2 C_1(x_0, x_1) + C_2(x_0, x_1).$$

En écrivant que  $x_1 = 0$  est contracté on constate que  $C_1(x_0, 0) = 0$  et

$$f = (x_0^2 \ell : x_0 x_1 \ell : x_1 x_2 L(x_0, x_2) + C_2(x_0, x_1))$$

avec  $L$  linéaire et  $\ell = x_0$  ou  $\ell = x_0 - x_1$ . Un tel  $f$  contracte effectivement les droites  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 0$ .

Si  $\ell = x_0$ , la droite  $x_0 = x_1$  sera contractée si et seulement si  $L(x_0, x_0) = 0$ ; à conjugaison g.d. près on a

$$f = (x_0^3 : x_0^2 x_1 : (x_0 - x_1)x_1 x_2 + C_2(x_0, x_1)), \quad \deg C_2 = 3$$

qui définit bien une transformation birationnelle cubique contractant exactement trois droites. On se ramène alors à conjugaison g.d. près au premier modèle annoncé

$$(x_0^3 : x_0^2 x_1 : (x_0 - x_1)x_1 x_2).$$

Lorsque  $\ell = x_0 - x_1$  l'application  $f$  est du type

$$f = (x_0^2(x_0 - x_1) : x_0 x_1(x_0 - x_1) : x_1 x_2 L(x_0, x_1) + C_2(x_0, x_1)).$$

Pour que la droite  $x_1 = 0$  soit contractée il faut que  $L = \text{cte } x_0$ , la constante pouvant être supposée égale à 1. On se ramène alors par conjugaison gauche-droite à

$$f = (x_0^2(x_0 - x_1) : x_0 x_1(x_0 - x_1) : x_0 x_1 x_2 + x_1^3).$$

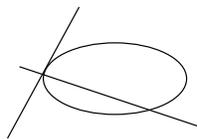
Les transformations  $(x_0^3 : x_0^2 x_1 : (x_0 - x_1)x_1 x_2)$  et

$$(x_0^2(x_0 - x_1) : x_0 x_1(x_0 - x_1) : (x_0 - x_1)x_1 x_2 + x_1^3)$$

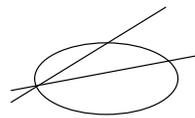
ne sont pas g.d. conjuguées : contrairement à la seconde la première contracte une droite avec multiplicité 4.  $\square$

(ii) Supposons que  $\text{Exc } f$  soit formé de trois droites en position générale. Il y a deux possibilités suivant que  $\text{Exc } f^{-1}$  contienne ou non une conique lisse.

Lorsque  $\text{Exc } f^{-1}$  contient une conique lisse,  $\text{Exc } f^{-1}$  contient aussi deux droites ; il s'agit de la configuration  $\{10\}$  ou  $\{11\}$  :



{10}



{11}

Le complément de la configuration  $\{10\}$  dans  $\mathbb{P}^2$  est difféomorphe au complément de trois droites en position générale. Un calcul explicite montre que pour les trois modèles  $f$  de la Proposition 6.14 présentant la configuration  $\{10\}$  l'ensemble  $\text{Exc } f^{-1}$  est l'union de trois droites en position générale (configuration  $\{3\}$ ). Concernant la possibilité  $\{11\}$  ou bien on remarque que le complément de  $\{11\}$  n'est pas difféomorphe au complément de  $\{3\}$  (les groupes fondamentaux sont différents), ou bien on inverse les deux modèles  $f$  de la Proposition 6.14 présentant la configuration  $\{11\}$  pour constater que  $\text{Exc } f^{-1}$  est encore de type  $\{11\}$ . Cette dernière situation est donc à exclure.

**Proposition 6.22.** — *Soit  $f$  un élément de  $\text{Bir}_3$  qui contracte trois droites en position générale ( $\{3\}$ ). Si  $\text{Exc } f^{-1}$  contient une conique lisse, il contient deux droites dont l'une est tangente à la conique ; de plus,  $f$  est, à conjugaison gauche-droite près, de l'une des formes suivantes :*

$$\begin{aligned} & (x_0^2(x_1 - x_2) : x_0x_1(x_1 - x_2) : x_1^2x_2), & (x_0^2x_2 : x_0x_1x_2 : x_0x_1^2 - x_1^2x_2), \\ & (x_0x_1x_2 : x_1^2x_2 : x_0(x_1^2 - x_0x_2)). \end{aligned}$$

Le cas restant est celui où  $\text{Exc } f^{-1}$  est lui aussi formé de trois droites en position générale. À conjugaison gauche-droite près nous pouvons supposer que

$$\text{Exc } f = \text{Exc } f^{-1} = \{x_0x_1x_2 = 0\}.$$

Dans la carte affine  $\mathbb{C}^2 = (x_2 = 1)$  la transformation  $f$  induit un automorphisme du complément de  $x_0x_1 = 0$ . On en déduit que  $f$  s'écrit  $(x_0^p x_1^q, x_0^r x_1^s)$  avec  $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ . Lorsque l'on homogénéise  $f$  on trouve une expression du type

$$(x_0^{p_0} x_1^{q_0} x_2^{r_0} : x_0^{p_1} x_1^{q_1} x_2^{r_1} : x_0^{p_2} x_1^{q_2} x_2^{r_2})$$

où les sommes  $p_i + q_i + r_i$  valent 3 et les produits  $p_0p_1p_2$ ,  $q_0q_1q_2$ ,  $r_0r_1r_2$  sont nuls. Le déterminant jacobien de  $f$  vaut, à multiplication près par une constante,

$$x_0^{(\sum p_i)-1} x_1^{(\sum q_i)-1} x_2^{(\sum r_i)-1}$$

et puisque  $\text{Exc } f$  est constitué de trois droites il faut que

$$\sum p_i > 1, \quad \sum q_i > 1, \quad \sum r_i > 1.$$

Comme la transformation  $f$  s'écrit  $(x_0^{p_0-p_2} x_1^{q_0-q_2}, x_0^{p_1-p_2} x_1^{q_1-q_2})$  dans la carte affine  $x_2 = 1$ , on a de plus

$$\det \begin{bmatrix} p_0 - p_2 & q_0 - q_2 \\ p_1 - p_2 & q_1 - q_2 \end{bmatrix} = \pm 1.$$

L'examen de toutes les éventualités nous conduit à la :

**Proposition 6.23.** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique telle que les lieux exceptionnels de  $f$  et  $f^{-1}$  soient formés de trois droites en position générale ( $\{3\}$ ). Alors  $f$  est, à conjugaison gauche-droite près, du type suivant :*

$$(x_0^3 : x_1^2 x_2 : x_0 x_1 x_2).$$

6.2.2.4. *Le lieu exceptionnel est formé de quatre droites ou plus.* —

Les démonstrations des deux énoncés suivants sont laissés en exercice.

**Lemme 6.24.** — *Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . On suppose qu'à conjugaison gauche-droite près  $f$  contracte les droites  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  sur trois points distincts  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ ; on suppose en outre que  $f$  contracte une quatrième droite  $\ell = 0$ . Alors les  $p_i$  ne sont pas alignés.*

**Proposition 6.25.** — *Une transformation birationnelle purement cubique ne peut pas contracter quatre droites en position générale.*

Les configurations de quatre droites contractées (au moins) contiennent donc au moins trois droites concourantes. Comme on l'a vu si les quatre droites sont contractées par  $f$  sur trois points, alors  $f$  est, à équivalence près, un des modèles de la Proposition 6.14. On peut donc supposer que les quatre droites sont contractées sur quatre points distincts et que trois d'entre elles sont  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_1 = x_0$ . On considère tour à tour les cas où les droites  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_0 = x_1$  sont contractées sur trois points alignés, puis non alignés et distincts.

**Proposition 6.26.** — *Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Supposons qu'à conjugaison gauche-droite près  $f$  contracte les droites  $x_0 = 0$ , resp.  $x_1 = 0$ , resp.  $x_1 = x_0$  sur trois points  $(1 : 0 : 0)$ , resp.  $(0 : 1 : 0)$ , resp.  $(1 : 1 : 0)$  et (au moins) une quatrième droite. Alors  $f$  contracte cinq droites et est, à conjugaison gauche-droite près, le modèle 5. de la Proposition 6.14.*

On termine en supposant que les droites  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_1 = x_0$  sont contractées respectivement sur  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$ . La démonstration de l'énoncé qui suit est laissée en exercice.

**Lemme 6.27.** — *Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Supposons qu'à conjugaison gauche-droite près  $f$  contracte la droite  $x_0 = 0$ , resp.  $x_1 = 0$ , resp.  $x_1 = x_0$  sur  $(1 : 0 : 0)$ , resp.  $(0 : 1 : 0)$ , resp.  $(0 : 0 : 1)$  et (au moins) une quatrième droite de la forme  $x_1 = \eta x_0$  avec  $\eta \notin \{0, 1\}$ . Alors  $f$  contracte une conique réduite ; en particulier, les hypothèses de la Proposition 6.14 sont vérifiées.*

**Proposition 6.28.** — *Soit  $f$  une transformation birationnelle purement cubique. Supposons qu'à conjugaison gauche-droite près  $f$  contracte les droites d'équation  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_0 = x_1$  sur  $(1 : 0 : 0)$ , resp.  $(0 : 1 : 0)$ , resp.  $(0 : 0 : 1)$  et la droite  $x_2 = 0$ . Alors  $f$  appartient à l'orbite sous l'action gauche-droite de l'une des transformations suivantes :*

- modèle 2. de la Proposition 6.14,  $\{5\}$ ;
- $(x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1))$ ,  $\{7\}$ .

*Démonstration.* — D'après les hypothèses  $f$  est de la forme

$$(x_1(x_0 - x_1)(\alpha x_0 + \beta x_2) : x_0(x_0 - x_1)(\gamma x_1 + \delta x_2) : x_0x_1(\varepsilon(x_0 - x_1) + \mu x_2)).$$

Notons que  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\mu$  ne peuvent être nuls puisque  $f$  est purement cubique ; on peut après action d'homothéties ad-hoc les supposer égaux à 1. On remarque qu'une transformation du type ci-dessus est birationnelle si et seulement si nous sommes dans l'une des situations suivantes :

- $\gamma = \varepsilon = 0$ ;
- $\alpha = \gamma = 0$ ;

- $\gamma = -1$ ,  $\varepsilon = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ .

Dans les deux premiers cas on obtient à conjugaison g.d. près

$$f_1 = (x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0x_2(x_0 - x_1) : x_0x_1x_2), \quad \{5\};$$

la dernière éventualité conduit à  $(x_1(x_0 - x_1)(\alpha x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1x_2(\alpha x_0 + x_1))$  soit à

$$f_2 = (x_1x_2(x_0 - x_1) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1^2x_2), \quad \{5\}$$

ou à

$$f_3 = (x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1)), \quad \{7\}$$

suivant que  $\alpha$  est nul ou non.

On vérifie que  $f_1$  et  $f_2$  sont g.d. conjugués comme suit :

$$f_2 = (-x_2 : -x_0 : x_1 + x_2)f_1(-x_1 : x_0 - x_1 : x_2).$$

La transformation  $f_1$  est g.d. conjuguée au modèle 2. de la Proposition 6.14 que nous notons  $g$  :

$$f_1 = (x_2 : x_0 : x_1)g(x_1 - x_0 : -x_1 : x_0 + x_2).$$

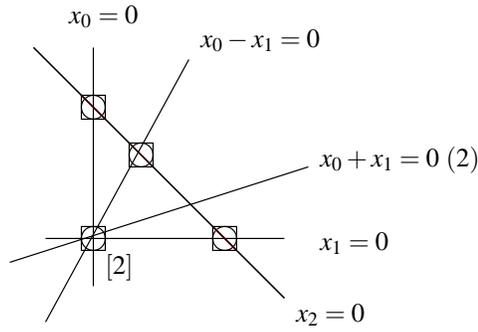
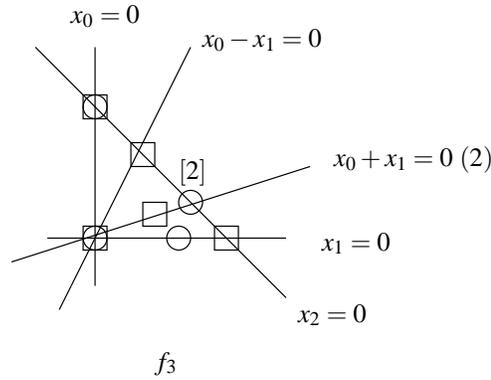
□

**Remarque 6.29.** — La transformation  $f_3$

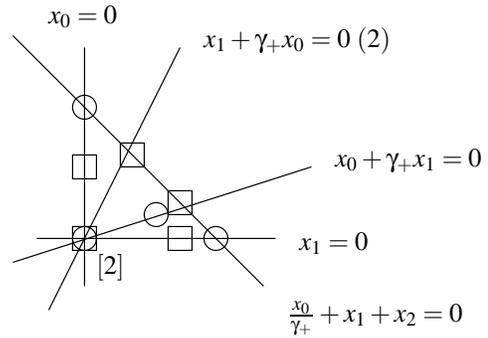
$$(x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1))$$

n'est pas g.d. conjuguée aux modèles de la Proposition 6.14 présentant la configuration  $\{7\}$ .

Elle n'est pas g.d. conjuguée au modèle 6. de la Proposition 6.14 : sur la composante de det jac de multiplicité 2 chacun de ces deux éléments admet deux points d'indétermination dont la position diffère (dans le cas de  $f_3$  ces points ne sont pas nécessairement des points d'intersection avec d'autres courbes de Exc  $f_3$  contrairement au modèle 6.). Elle n'est pas non plus g.d. conjuguée au modèle 5. de ce même énoncé ; en effet le modèle 5. possède la propriété suivante que  $f_3$  n'a pas : on peut trouver dans le lieu exceptionnel de cette transformation trois courbes contractées sur trois points distincts alignés. Voici des dessins qui illustrent ce discours ; on adopte les notations suivantes. Les droites correspondent aux courbes contractées par la transformation considérée ; quand la multiplicité (dans le déterminant jacobien) de l'une d'elle est strictement supérieure à 1 elle est précisée entre parenthèse. Les « cercles » correspondent aux points sur lesquels les éléments du lieu exceptionnel sont contractés ; on précise entre crochets le nombre de droites contractées sur un point lorsque celui-ci est strictement supérieur à 1. Les carrés caractérisent les points d'indétermination de la transformation étudiée.



modèle 5. Proposition 6.14



modèle 6. Proposition 6.14

**6.2.3. Récapitulatif. —**

Le tableau qui suit donne, à conjugaison g.d. près, les différents modèles de transformations birationnelles purement cubiques ; pour chacun d'entre eux on a mentionné la configuration des courbes contractées de la transformation (deuxième colonne), la configuration des courbes contractées de son inverse (troisième colonne) et la dimension de son orbite sous l'action gauche-droite (quatrième colonne). Si  $\gamma$  désigne un complexe, on rappelle que

$$\gamma_+ := \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \gamma_- := \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$$

sont les deux racines du trinôme  $t^2 - \gamma t + 1$ .

Rappelons qu'on obtient la dimension de l'orbite d'une transformation birationnelle en déterminant son groupe d'isotropie. Donnons un exemple. Considérons la transformation  $f = (x_0x_2^2 + x_1^3 : x_1x_2^2 : x_2^3)$ . Cherchons  $A, B$  dans  $SL_3(\mathbb{C})$  et  $\eta$  dans  $\mathbb{C}^*$  tels que  $Af = \eta fB$ ; on obtient que nécessairement

$$A = \left( \eta\gamma^3x_0 + \eta\alpha\delta^2x_1 + \eta\beta\delta^2x_2 : \eta\gamma\delta^2x_1 : \eta\delta^3x_2 \right), \quad B = \left( \frac{\gamma^3}{\delta^2}x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 : \gamma x_1 : \delta x_2 \right)$$

avec  $\eta^3\delta^6 = 1$  et  $\gamma^4 = \delta$ . La dimension du groupe d'isotropie est donc 3, celle de l'orbite de  $f$  sous l'action gauche-droite  $16 - 3 = 13$ .

|  |      |      |    |              |
|--|------|------|----|--------------|
| $(x_0x_2^2 + x_1^3 : x_1x_2^2 : x_2^3)$  | {1}  | {1}  | 13 |              |
| $(x_0x_2^2 : x_0^2x_1 : x_2^3)$  | {2}  | {2}  | 15 |              |
| $(x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3)$   | {2}  | {2}  | 15 |              |
| $(x_0^2x_2 : x_0^3 + x_2^3 + x_0x_1x_2 : x_0x_2^2)$  | {2}  | {2}  | 14 |              |
| $(x_0^2x_2 : x_0^2x_1 + x_2^3 : x_0x_2^2)$   | {2}  | {2}  | 15 |              |
| $(x_0x_1x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 - x_0^2x_1)$  | {2}  | {8}  | 14 |              |
| $(x_0^3 : x_1^2x_2 : x_0x_1x_2)$   | {3}  | {3}  | 15 |              |
| $(x_0^2(x_1 - x_2) : x_0x_1(x_1 - x_2) : x_1^2x_2)$  | {3}  | {10} | 15 |              |
| $(x_0^2x_2 : x_0x_1x_2 : x_1^2(x_0 - x_2))$  | {3}  | {10} | 15 |              |
| $(x_0x_1x_2 : x_1^2x_2 : x_0(x_1^2 - x_0x_2))$   | {3}  | {10} | 15 |              |
| $(x_0^3 : x_0^2x_1 : (x_0 - x_1)x_1x_2)$   | {4}  | {4}  | 15 |              |
| $(x_0^2(x_0 - x_1) : x_0x_1(x_0 - x_1) : x_0x_1x_2 + x_1^3)$   | {4}  | {4}  | 16 |              |
| $(x_0x_2(x_0 + x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1) : x_0x_1^2)$   | {5}  | {5}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_0x_1x_2)$  | {5}  | {12} | 16 |              |
| $(x_0(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_1(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_0x_1x_2)$  | {5}  | {12} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_0x_1x_2), \gamma^2 \neq 4$   | {6}  | {6}  | 15 | 1 paramètre  |
| $(x_0x_2(x_1 + x_0) : x_1x_2(x_1 + x_0) : x_0x_1(x_0 - x_1))$  | {7}  | {7}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$  | {7}  | {14} | 16 | 1 paramètre  |
| $(x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1))$  | {7}  | {14} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1^3 : x_1(x_0^2 + x_1x_2))$  | {8}  | {2}  | 14 |              |
| $(x_1^2x_2 : x_0(x_0x_2 + x_1^2) : x_1(x_0x_2 + x_1^2))$   | {9}  | {9}  | 15 |              |
| $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$  | {10} | {3}  | 15 |              |
| $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1^2)$   | {10} | {3}  | 15 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2)$   | {10} | {3}  | 15 |              |
| $(x_0(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$  | {11} | {11} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$  | {11} | {11} | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$  | {12} | {5}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$  | {12} | {5}  | 16 |              |
| $(x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2), \gamma \neq 0, 1$  | {13} | {13} | 16 | 1 paramètre  |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1x_2), \gamma^2 \neq 4,$  | {14} | {7}  | 16 | 1 paramètre  |
| $(x_0(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$  | {14} | {7}  | 16 |              |
| $(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2), \gamma^2 \neq 4, \delta \neq \gamma_{\pm}$ | {15} | {15} | 16 | 2 paramètres |

Parmi ces modèles cinq familles dépendent effectivement d'au moins un paramètre. Ces paramètres, attachés à des configurations de courbes contractées, peuvent être reliés à des configurations de points sur la droite projective, précisément 4 ou 5 points suivant qu'il y a un ou deux paramètres. Le lecteur intéressé pourra décrire l'espace des invariants ; il y rencontrera l'invariant  $j$  des courbes elliptiques.

**Remarque 6.30.** — Dans le tableau les modèles apparaissant dans des lignes différentes ne sont pas g.d. équivalents. On le vérifie en examinant les invariants suivants : type et nombre de composantes des zéros du déterminant jacobien et leur multiplicité, configuration des points d'indétermination (par exemple alignement ou non), etc (voir Appendice A). Néanmoins il peut y avoir des redondances dans les lignes : par exemple les transformations  $\xi_{\gamma,\delta}$  et  $\xi_{-\gamma,-\delta}$  sont g.d. conjuguées ; les coefficients  $\gamma, \delta$  ne sont pas des invariants complets. Notons qu'on pourrait vérifier que les modèles apparaissant dans des lignes différentes ne sont pas g.d. équivalents en examinant minutieusement les paires de points base de  $f$  et  $f^{-1}$ .

**Remarque 6.31.** — Toute transformation birationnelle cubique est donc à conjugaison dynamique près du type  $Af$  où  $A$  désigne un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  et  $f$  un élément de la liste donnée ci-dessus.

Comme nous l'avons fait dans le cas quadratique on peut étudier l'espace des relations linéaires associé à une application birationnelle  $f$  de  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Si  $f = (f_0, f_1, f_2)$  on introduit l'espace vectoriel

$$\text{RL}(f) := \{L = (L_0, L_1, L_2) \text{ application linéaire} \mid L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2 = 0\}.$$

En utilisant la classification précédente on vérifie sans peine que pour toute transformation  $f$  purement cubique  $\dim \text{RL}(f) = 1$ . De plus, si  $L$  est un élément non trivial de  $\text{RL}(f)$ , alors  $L$  est de rang 2. On obtient alors un énoncé analogue au Théorème 1.19 :

**Théorème 6.32.** — Soit  $f$  un élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Il existe une application linéaire  $L = (L_0, L_1, L_2)$  et une application quadratique  $Q = (Q_0, Q_1, Q_2)$  telles que

$$f = L \wedge Q = (L_1 Q_2 - L_2 Q_1 : L_2 Q_0 - L_0 Q_2 : L_0 Q_1 - L_1 Q_0).$$

En particulier les éléments de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  sont des applications déterminantielles.

**Exemple 6.33.** — Pour l'élément générique présentant la configuration  $\{15\}$  on constate que

$$L = (x_1, -x_0, 0) \quad \text{et} \quad Q = (0, x_0 x_2, -(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2))$$

conviennent.

Toutefois l'énoncé 6.32 est moins complet que le Théorème 1.19 ; en effet, si  $L$  est une application linéaire de rang 2 et  $Q$  une application quadratique, alors  $L \wedge Q$  ne définit pas nécessairement une application birationnelle.

### 6.3. Irréductibilité de $\mathring{\text{Bir}}_3$

Pour  $\gamma^2 \neq 4$  et  $\delta \neq \gamma_{\pm}$  on désigne par  $\xi_{\gamma,\delta}$  la transformation

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2)$$

qui présente la configuration  $\{15\}$ . Considérons  $A$  et  $B$  deux automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  tels que

$$(6.3.1) \quad A\xi_{\gamma,\delta}B = \xi_{\gamma,\delta'}.$$

On constate que  $\text{Exc}(A\xi_{\gamma,\delta}B) = B^{-1}(\text{Exc } \xi_{\gamma,\delta}) = \text{Exc } \xi_{\gamma,\delta'}$ . Comme

$$\text{Exc } \xi_{\gamma,\delta} = \{x_0 = 0, x_1 = 0, x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0, x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 = 0\}$$

l'ensemble des automorphismes  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{P}^2$  satisfaisant (6.3.1) est fini.

**Remarque 6.34.** — On retrouve ici que la g.d. orbite de  $\xi_{\gamma,\delta}$  est de dimension 16.

Posons

$$\mathcal{X} := \{A\xi_{\gamma,\delta}B \mid A, B \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}), \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \gamma^2 \neq 4, \delta \neq \gamma_{\pm}\} \subset \mathring{\text{Bir}}_3;$$

il s'agit d'une réunion d'orbites gauche-droite qui représentent les transformations dont l'ensemble exceptionnel est constitué d'une conique lisse  $C$  et quatre droites non tangentes à  $C$  (configuration  $\{15\}$ ).

La Proposition qui suit est conséquence directe de ce qui précède :

**Proposition 6.35.** — *L'adhérence de  $\mathcal{X}$  dans  $\text{Rat}_3 \simeq \mathbb{P}^{29}$  est une variété algébrique irréductible de dimension 18.*

Dans les traités anciens on trouve le discours suivant : les courbes du réseau homaloïdal associé à une transformation birationnelle cubique satisfont les équations suivantes ([1]) :

$$\sum \mu_i^2 = 8, \quad \sum \mu_i = 6, \quad \mu_i \in \mathbb{N}$$

où  $\mu_i$  désigne la multiplicité aux points base (qui rappelons le ne sont pas nécessairement propres) et  $q$  le nombre de points base. Ce système d'équations a pour solution, à réindexation près,  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = (2, 1, 1, 1, 1)$ . Ces formules sont satisfaites par tout élément « générique » de  $\mathcal{X}$  qui compte cinq points d'indétermination dont un d'ordre 2 et quatre d'ordre 1.

**Proposition 6.36 (Décomposition de NETHER des éléments de  $\mathcal{X}$ )**

*Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{X}$ ; alors  $f$  possède une écriture du type :*

$$B\sigma A\sigma C$$

avec  $A, B, C \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.* — Considérons un automorphisme  $A$  de  $\mathbb{P}^2$  de la forme spéciale suivante :

$$A = (b_0 x_1 + c_0 x_2 : b_1 x_1 + c_1 x_2 : a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2).$$

La transformation  $\sigma A \sigma$  s'écrit

$$((b_1x_1 + c_1x_2)Q : (b_0x_1 + c_0x_2)Q : x_0(b_0x_1 + c_0x_2)(b_1x_1 + c_1x_2))$$

avec  $Q = a_2x_1x_2 + b_2x_0x_2 + c_2x_0x_1$ . On constate qu'elle est cubique pure dès que  $a_2b_2c_2$  est non nul, condition qui caractérise la lissité de la conique  $Q = 0$ . Visiblement les courbes

$$Q = 0, \quad b_0x_1 + c_0x_2 = 0, \quad b_1x_1 + c_1x_2 = 0, \quad x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 0$$

sont contractées. Ainsi pour des valeurs des paramètres en dehors d'un ensemble algébrique la configuration des courbes contractées par  $\sigma A \sigma$  est du type  $\{15\}$ . Notons que la configuration de Exc ( $\sigma A \sigma$ ) détermine les lignes de la matrice  $A$  à multiplication scalaire près (ce qui correspond à l'action à gauche du groupe diagonal) et permutation  $(x_0 : x_2 : x_1)$  près. On en déduit facilement que l'ensemble des transformations du type  $B \sigma A \sigma C$ , avec  $A$  comme ci-dessus, est de dimension 18. Par suite aux configurations de type  $\{15\}$  est associée une décomposition de la forme  $B \sigma A \sigma C$  avec  $B, C \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et

$$A = (b_0x_1 + c_0x_2 : b_1x_1 + c_1x_2 : a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2).$$

□

**Remarque 6.37.** — L'énoncé précédent donne une nouvelle justification à l'étude des transformations  $A$  telles que le degré de  $\sigma A \sigma$  soit anormal, étude faite au Chapitre 4.

Notons  $\mathbb{C}\mathcal{X} = \mathring{\text{Bir}}_3 \setminus \mathcal{X}$ ; chaque élément de  $\mathbb{C}\mathcal{X}$  est g.d. conjugué à l'un des modèles représentant toutes les configurations exceptées  $\{15\}$ . Comme ces modèles dépendent au plus d'un paramètre, on en déduit que la dimension de l'adhérence de  $\mathbb{C}\mathcal{X}$  est en tout point inférieure ou égale à 17.

D'après la Remarque 6.3 et pour des raisons de dimension on a  $\text{Inv}(\overline{\mathcal{X}}) = \overline{\mathcal{X}}$ , ce que l'on peut voir de façon explicite en inversant les  $\xi_{\gamma,\delta}$ .

Pour démontrer l'irréductibilité de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  on procède comme suit; on cherche à joindre tout élément  $f_0$  de  $\mathbb{C}\mathcal{X}$  à l'adhérence de  $\mathcal{X}$  par un chemin rationnel  $s \mapsto f_s$  de sorte que  $f_{s=0} = f_0$  et  $f_s$  appartiennent à  $\overline{\mathcal{X}}$  pour les valeurs génériques de  $s$ . Il est souvent plus commode de travailler avec des formes « prénormales » qui font intervenir « beaucoup » de paramètres, comme celles données dans le Lemme 6.13, plutôt qu'avec les formes finales (par exemple celles de la Proposition 6.14). On procède au cas par cas suivant la nature du lieu exceptionnel.

### 6.3.1. Le lieu exceptionnel contient une conique. —

Nous allons essayer de joindre les formes prénormales du Lemme 6.13 de type (b) à celles de type (a) qui sont nécessairement dans  $\overline{\mathcal{X}}$ . Soit  $f_0 = (x_0Q : x_1Q : x_0x_1^2)$  où

$$Q = \alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + \epsilon x_1x_2$$

un élément de type (b). On considère la transformation  $f_s = (x_0Q : x_1Q : x_0x_1(sx_2 + x_1))$ . Pour  $s = 0$ , on atteint la transformation initiale  $f_0$  et  $f_s$  est dans  $\mathcal{X}$  pour  $s$  non nul.

Maintenant on cherche à relier un élément  $f_0$  de type (c)

$$f_0 = (x_0(x_0^2 + \gamma x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1(x_0 - x_1))$$

à  $\overline{\mathcal{X}}$ . On introduit  $f_s := (x_0(x_0^2 + \gamma x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1(sx_2 + x_0 - x_1))$ . Pour  $s = 0$ , on obtient la transformation initiale et pour  $s \neq 0$  on constate que  $f_s$  est dans  $\overline{\mathcal{X}}$ ; en effet  $f_s(x_0 : x_1 : \frac{x_2 - x_0 + x_1}{s})$  s'écrit  $(x_0 P : x_1 P : x_0 x_1 x_2)$  où

$$P = \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right) x_0^2 + \frac{x_1^2}{s} + \frac{\gamma - 1}{s} x_0 x_1 + \frac{\gamma}{s} x_0 x_2 + \frac{x_1 x_2}{s}.$$

Pour les éléments  $f_0$  de type (d) :

$$f_0 = (x_0 x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_1 x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_0 x_1(x_0 - x_1))$$

on peut procéder simplement comme suit. Les transformations

$$f_s = (x_0(sx_0^2 + \gamma x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(sx_0^2 + \gamma x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1(x_0 - x_1))$$

sont conjuguées pour  $s \neq 0$  à  $f_{s=1}$  que l'on sait être dans  $\overline{\mathcal{X}}$  car de la forme (c). Pour  $s = 0$ , on a l'élément  $f_0$  de type (d).

### 6.3.2. Le lieu exceptionnel est constitué de plus de 4 droites. —

Il s'agit de montrer que la transformation

$$f = (x_1(x_0 - x_1)(x_0 + x_2) : x_0(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) : (x_0 + x_1)x_1 x_2)$$

obtenue dans la Proposition 6.28 est dans  $\overline{\mathcal{X}}$ . On constate que

$$(x_0 + x_1 : x_1 : x_2) f(x_0 - x_1 : x_1 : x_2),$$

qui s'écrit aussi

$$(x_0(x_0^2 + 2x_1^2 - 3x_0 x_1 + x_0 x_2 - 2x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + 2x_1^2 - 3x_0 x_1 + x_0 x_2 - 2x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2),$$

est du type (a) à homothétie près ainsi  $f$  appartient bien à  $\overline{\mathcal{X}}$ .

### 6.3.3. Le lieu exceptionnel est constitué de trois droites. —

Les éléments de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  dont le lieu exceptionnel est constitué d'une conique lisse et deux droites appartiennent à  $\overline{\mathcal{X}}$ ; on déduit de l'invariance de  $\overline{\mathcal{X}}$  par Inv que les modèles obtenus dans la Proposition 6.22 sont dans l'adhérence de  $\mathcal{X}$ .

Considérons une transformation de type (a). Si  $\alpha = \varepsilon = 1$  et  $\beta = \gamma = \delta = 0$  elle s'écrit

$$f = (x_0(x_0^2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2).$$

Posons

$$g_s := \left(\frac{x_0 - x_2}{s} : x_1 : x_2\right) f(sx_0 : sx_1 : x_2) = (x_0^3 : x_1(sx_0^2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2);$$

on remarque que  $g_{s=0} = (x_0^3 : x_1^2 x_2 : x_0 x_1 x_2)$  est le modèle de la Proposition 6.23.

Reste à considérer les deux modèles dont le lieu exceptionnel est constitué de trois droites concourantes. Lorsque  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma = 2$  et  $\delta = \varepsilon = 0$  une transformation du type (a) est de la forme :  $(x_0(x_0 + x_1)^2 : x_1(x_0 + x_1)^2 : x_0x_1x_2)$ ; on constate alors que

$$(x_0 + x_1 : x_1 : x_2)(x_0(x_0 + x_1)^2 : x_1(x_0 + x_1)^2 : x_0x_1x_2)(x_0 - x_1 : x_1 : x_2)$$

coïncide avec  $(x_0^3 : x_0^2x_1 : x_1x_2(x_0 - x_1))$ , l'un des deux modèles de la Proposition 6.21.

Considérons la seconde transformation obtenue dans la Proposition 6.21

$$(x_0^2(x_0 - x_1) : x_0x_1(x_0 - x_1) : x_0x_1x_2 + x_1^3);$$

elle s'écrit dans la carte  $x_1 = 1$  comme suit  $(x_0, \frac{x_0x_2+1}{x_0(x_0-1)})$ . On peut la perturber de la façon suivante :

$$\left(x_0, \frac{x_0x_2 + 1}{x_0(x_0 - 1) + sx_2}\right), \quad s \in \mathbb{C};$$

on remarque que c'est une homographie en  $x_2$ . En homogénéisant on obtient l'élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  suivant :

$$(x_0(x_0(x_0 - x_1) + sx_1x_2) : x_1(x_0(x_0 - x_1) + sx_1x_2) : x_0x_1x_2 + x_1^3),$$

élément qui contracte la conique lisse  $x_0(x_0 - x_1) + sx_1x_2$  dès que  $s$  est non nul; or un tel élément est dans  $\overline{\mathcal{X}}$  (voir §6.3.1) donc  $(x_0^2(x_0 - x_1) : x_0x_1(x_0 - x_1) : x_0x_1x_2 + x_1^3)$  l'est aussi.

#### 6.3.4. Le lieu exceptionnel est constitué de deux droites. —

Le modèle  $(x_0x_1x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 - x_0^2x_1)$  de la Proposition 6.20, dont l'inverse

$$(x_0(x_1x_2 + x_0^2) : x_1^3 : x_1(x_1x_2 + x_0^2))$$

contracte une droite et une conique, est, de par l'invariance de  $\overline{\mathcal{X}}$  par Inv, dans  $\overline{\mathcal{X}}$ .

Voici rapidement comment on procède pour les cas restants. Considérons une transformation de la forme (b) que l'on sait être dans  $\overline{\mathcal{X}}$ . Après conjugaison dynamique par  $(x_1 : x_0 : x_2)$  on obtient lorsque  $\beta = \delta = 1$  et  $\alpha = \gamma = \varepsilon = 0$  l'élément  $f = (x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_0^2x_1 + x_1^2x_2 : x_0^2x_1)$ . Posons

$$g_s = \left(x_2 : \frac{x_1 - x_2}{s} : x_0\right) f(x_2 : x_0 : sx_1) = (x_0x_2^2 : x_0^2x_1 : x_2^3 + sx_0x_1x_2);$$

alors  $g_{s=0} = (x_0x_2^2 : x_0^2x_1 : x_2^3)$  est le modèle obtenu dans la Proposition 6.20.

Partons encore d'une transformation du type (b). Lorsque  $\alpha = \beta = \varepsilon = 1$  et  $\gamma = \delta = 0$  on a

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2).$$

Posons

$$g_s := \left(\frac{x_2}{s} : \frac{x_0 - x_2}{s^3} : x_1\right) (x_0(x_0^2 + x_1^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2)(sx_0 : x_2 : s^2x_1),$$

soit

$$g_s = (x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2(s^2x_0^2 + x_2^2 + s^2x_1x_2)).$$

On remarque  $g_{s=0} = (x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3)$  est un des cas de la Proposition 6.20; il est donc dans  $\overline{\mathcal{X}}$ .

Le modèle  $(x_0^2x_2 : x_0^2x_1 + x_2^3 : x_0x_2^2)$  de la Proposition 6.20 a pour inverse

$$(x_0^3 : x_0x_1x_2 - x_2^3 : x_0^2x_2).$$

On vérifie que

$$(-x_2 : x_1 : x_0)(x_0^3 : x_0x_1x_2 - x_2^3 : x_0^2x_2)(-x_2 : x_1 : x_0) = (x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3).$$

On vient de voir que  $(x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3)$  appartient à  $\overline{\mathcal{X}}$ ; comme  $\overline{\mathcal{X}}$  est invariant par Inv la transformation  $(x_0^2x_2 : x_0^2x_1 + x_2^3 : x_0x_2^2)$  est dans l'adhérence de  $\mathcal{X}$ .

Pour finir prenons la transformation  $f = (x_0^2x_2 : x_0^3 + x_2^3 + x_0x_1x_2 : x_0x_2^2)$  de la Proposition 6.20. Soit  $f_s$  la transformation birationnelle définie par

$$f_s = (x_0^2x_2 : x_0^3 + x_2^3 + x_0x_1(x_2 - sx_0) : x_0x_2(x_2 - sx_0)).$$

On constate que pour  $s$  non nul  $f_s$  contracte trois droites donc est dans  $\overline{\mathcal{X}}$  et que  $f_{s=0} = f$ ; ceci implique que  $f$  appartient aussi à  $\overline{\mathcal{X}}$ .

### 6.3.5. Le lieu exceptionnel est constitué d'une droite. —

Considérons le modèle  $(x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3)$  qui contracte exactement deux droites. Posons

$$g_s = (x_1 - s^3x_2 : x_0 - sx_2 : x_2)(x_0x_2^2 : x_0^3 + x_0x_1x_2 : x_2^3) \left( x_1 + sx_2 : \frac{x_0}{s} - 3sx_1 : x_2 \right);$$

on constate que  $g_s = (x_1^3 + \frac{x_0x_1x_2}{s} + x_0x_2^2 : x_1x_2^2 : x_2^3)$ . Lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$ , la transformation  $g_s$  tend vers  $(x_1^3 + x_0x_2^2 : x_1x_2^2 : x_2^3)$ ; on reconnaît l'élément obtenu dans la Proposition 6.16 qui contracte précisément une droite.

Finalement on obtient le :

**Théorème 6.38.** — *L'adhérence (ordinaire) de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathring{\text{Bir}}_3$  est  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . En particulier  $\mathring{\text{Bir}}_3$  est irréductible.*

### 6.3.6. Non irréductibilité de $\text{Bir}_3$ en tant que sous-ensemble de $\mathbb{P}^{29}$ . —

Alors que  $\text{Bir}_2$  est lisse et irréductible, il n'en est pas de même pour  $\text{Bir}_3$  (vu comme sous-ensemble de  $\mathbb{P}^{29}$ ); comme nous l'avons vu  $\mathring{\text{Bir}}_3$  est irréductible (en fait rationnellement connexe).

**Théorème 6.39.** — *Le sous-ensemble  $\text{Bir}_3$  de  $\mathbb{P}^{29}$  a deux composantes irréductibles.*

*Démonstration.* — Considérons un élément de  $\text{Bir}_3$  du type suivant  $f_0 = \ell A \sigma$  où  $\ell$  est une forme linéaire générique, disons  $x_0 + x_1 + x_2$ . Il est clair que  $f_0$  en tant que triplet de formes homogènes ne peut être limite de transformations de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  car aucun élément de  $\mathring{\text{Bir}}_3$  contracte quatre droites en position générale. Ceci implique que  $\text{Bir}_3$  n'est pas irréductible; plus précisément les composantes irréductibles de  $\overline{\text{Bir}}_3$  sont  $\mathring{\text{Bir}}_3$  et  $\overline{\text{Bir}}_3'$  où  $\overline{\text{Bir}}_3'$  désigne l'ensemble des transformations de type  $\ell Q$  avec  $\ell$  forme linéaire et  $Q$  dans  $\text{Bir}_2$ . On note que  $\overline{\text{Bir}}_3'$  est de dimension 16. Toutefois chaque élément de  $\text{Bir}_2$  se représente dans  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Plus précisément avec les notations habituelles  $\text{Bir}_3^\bullet = (\mathring{\text{Bir}}_3)^\bullet$ .  $\square$

#### 6.4. Décomposition de NETHER

Rappelons que  $\rho = (x_2 - x_1 : x_1 - x_0 : x_1)\sigma(x_1 + x_2 : x_2 : x_0)\sigma(x_0 + x_2 : x_1 - x_2 : x_2)$  et

$$\begin{aligned} \tau &= (x_1 - x_0 : 2x_1 - x_0 : x_2 - x_1 + x_0)\sigma(x_0 + x_2 : x_0 : x_1)\sigma \\ &\quad (-x_1 : x_0 + x_2 - 3x_1 : x_0)\sigma(x_0 + x_2 : x_0 : x_1)\sigma(x_1 - x_0 : -2x_0 + x_2 : 2x_0 - x_1). \end{aligned}$$

Nous avons vu dans la Proposition 6.36 la décomposition de NETHER des éléments de  $\mathcal{X}$ ; voyons ce qu'il en est pour les autres éléments de  $\text{Bir}_3$ . Nous reprenons les notations et l'ordre du tableau obtenu au §6.2.3; introduisons les automorphismes  $A$ ,  $B$  et  $C$  définis par

$$A = \left( (1 - \delta\gamma_+)x_0 + \frac{\gamma_- + \gamma_+\delta^2 - 2\delta}{\gamma_+\gamma\delta - \gamma^+ - \delta}x_1 : -\frac{2\delta\gamma_+ + \gamma_+\gamma\delta^2 + 1 - \delta^2}{\gamma_+\gamma\delta - \delta - \gamma_+}x_0 + \zeta x_1 : \right. \\ \left. x_0 + \frac{\gamma_- + \gamma_+\delta^2 - 2\delta}{\gamma_+(\gamma\delta - \delta^2 - 1)}x_1 - \frac{\delta(\sqrt{\gamma^2 - 4} - 2\gamma_+\delta^2 - 2\gamma_+\gamma\delta + \delta^2\gamma^2\gamma_+ + 4\delta - \delta^2\gamma)}{1 - \gamma\delta + \delta^2 - \gamma_+\delta + \gamma_+\delta^2\gamma - \delta^3\gamma_+}x_2 \right),$$

$$\text{où } \zeta = -\frac{\gamma_+(12\gamma(\delta^3\gamma - 1 - \delta^2) - 4\delta\gamma^2(1 + \delta^2\gamma^2 + \delta^3\gamma) + 6\delta^2\gamma^3 + \gamma + \delta^4\gamma^3 + 3\delta^4\gamma + 4\delta) + 6\delta^2(1 - \gamma^2) + 4\gamma\delta(\gamma^2\delta^2 + 1) - 1 - 8\gamma\delta^3 + \delta^4(3\gamma^2 - \gamma^4 - 1)}{\gamma_+(\delta^3\gamma^5 - 4\delta^3\gamma^3 - \gamma^2 + 3\delta\gamma^3 - 3\delta^2\gamma^4 - 3\delta^2 - 6\gamma\delta + 4\delta^2\gamma^2 + 3\delta^3\gamma + 1) + \gamma + 3\delta(1 - \gamma^2) + 3\gamma\delta^2(\gamma^2 - 2) + \delta^3(3\gamma^2 - 1 - \gamma^4)},$$

$$B = \left( x_1 + x_2 : x_1 - \frac{\gamma_- \delta}{\gamma_+\delta\gamma - \delta - \gamma_+}x_2 : x_0 + \gamma_+\delta x_1 + x_2 \right)$$

et

$$C = \left( -x_0 + \delta x_1 + \delta x_2 : \frac{(\delta\gamma_+ - 1)(1 - \gamma\delta + \delta^2)}{\delta - \gamma_-}x_1 : (1 - \gamma\delta + \delta^2)x_2 \right).$$

**Théorème 6.40.** — *La décomposition de NETHER des transformations birationnelles cubiques est donnée, à conjugaison g.d. près, par la liste qui suit. En particulier la décomposition de NETHER d'une transformation birationnelle cubique fait intervenir au plus huit fois l'involution de CREMONA :*

$$\begin{aligned} &(x_0 : x_2 : x_1)\rho(x_2 : x_1 : x_0)\tau(x_2 : x_1 : -x_0)\rho(x_0 : x_2 : x_1), \{1\} \\ &((x_2 : x_1 : x_0)\rho)^2, \{2\} \\ &(x_2 : x_0 : x_1)\rho(x_2 : x_1 : x_0)\tau(x_2 : x_0 : -x_1), \{2\} \\ &(x_1 : x_2 : x_0)\tau(x_1 : x_0 : -x_2)\tau(x_0 : x_2 : -x_1), \{2\} \\ &(x_1 : x_0 : x_2)\rho(x_0 + x_1 : x_0 : x_2)\rho(x_2 : x_1 : x_0)\rho, \{2\} \\ &(x_1 : x_0 : -x_2)\tau(x_2 : x_0 : x_1)\rho, \{2\} \\ &(\rho(x_1 : x_2 : x_0))^2, \{3\} \\ &(x_0 + x_2 : x_2 : x_1)\rho(-x_0 + x_1 : x_2 - x_1 : x_0)\sigma, \{3\} \\ &(x_1 : x_2 : x_0 + x_2)\rho(-x_0 - x_1 + x_2 : x_0 : x_1)\sigma, \{3\} \\ &(x_1 : x_0 : -x_2)\tau\sigma, \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (x_0 + x_2 : x_2 : x_1)\sigma(x_0 : x_1 : x_2 - x_0)\rho(x_1 : x_2 : x_0), \{4\} \\
& (x_1 + x_2 : x_2 : x_0 + x_2)\rho(-x_0 + x_1 + x_2 : x_1 : x_0 - x_1)\tau(x_0 : x_1 : -x_2), \{4\} \\
& (x_1 + x_2 : -x_2 : -x_0 - x_2)\rho(-x_0 - x_1 + x_2 : -x_0 : x_0 + x_1)\sigma, \{5\} \\
& (-x_0 : \beta x_2 : \alpha \beta x_1)\sigma(x_2 : x_0 + \alpha x_1 : x_1 + \beta x_2)\sigma\left(-\frac{x_2}{\alpha \beta} : -\frac{x_1}{\beta} : x_0 + x_1\right), \{5\} \\
& \sigma(x_0 + x_2 : -x_0 + x_2 : 4x_1 + 2x_2)\rho\left(-\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2} : x_2 : \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right), \{5\} \\
& \sigma(-\delta x_0 + \delta x_1 : \delta \gamma_{+x_0} - \delta \gamma_{-x_1} : x_2)\sigma(x_0 + \gamma_{+x_1} : x_0 + \gamma_{-x_1} : x_2), \{6\} \\
& (2(x_1 + x_2) : 2(x_1 - x_2) : 2(x_0 + x_2))\rho\left(-\frac{x_0}{2} - \frac{x_1}{2} + x_2 : -\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2} : \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right)\sigma, \{7\} \\
& \sigma(\delta \gamma_{+x_0} - \delta \gamma_{-x_1} : -\delta x_0 + \delta x_1 : x_1 + x_2)\sigma(\gamma_{+x_0} + x_1 : \gamma_{-x_0} + x_1 : x_2), \{7\} \\
& (x_0 + x_2 : x_2 - x_0 : x_1 - x_2)\rho(x_0 - x_1 + 2x_2 : -x_0 + x_1 : x_0 + x_1)\sigma, \{7\} \\
& \rho(x_1 : x_2 : x_0)\tau(x_1 : x_0 : -x_2), \{8\} \\
& (x_1 : x_0 : x_2)\rho(x_0 : x_0 + x_1 : x_2)\rho(x_0 : x_2 : x_1), \{9\} \\
& (x_2 : x_0 : x_1)\sigma(x_0 : x_0 + x_1 : x_2)\rho(x_0 : x_2 : x_1), \{10\} \\
& \sigma(x_1 : x_2 : x_0 + x_1)\rho(x_2 : x_0 : x_1), \{10\} \\
& (x_0 : x_2 : x_1)\sigma(x_0 : x_0 + x_1 : x_2)\rho(x_1 : x_2 : x_0), \{10\} \\
& (x_1 : x_2 : x_0)\sigma(x_0 + x_1 + x_2 : x_0 : x_2)\rho(x_1 : x_2 : x_0), \{11\} \\
& \sigma(x_1 : x_2 : x_0 + x_1 + x_2)\sigma, \{11\} \\
& (-x_0 : x_1 : -x_2)\sigma(x_1 + x_2 : x_2 : x_0 + x_1 + x_2)\sigma(x_2 : x_0 : -x_0 - x_1) \{12\} \\
& (x_0 : x_0 - x_1 : x_2)\sigma(x_1 - x_0 : x_1 : x_2)\tau(x_1 : x_0 : -x_2), \{12\} \\
& \sigma(-\gamma x_2 : x_1 + x_2 : -\gamma^2 x_0 + x_1 + (1 - \gamma)x_2)\sigma\left(x_2 : -\frac{x_1}{\gamma} : x_0 + \frac{x_1}{\gamma}\right), \{13\} \\
& \sigma(-x_0 - x_1 : \gamma_{-x_0} + \gamma_{+x_1} : \gamma_{-x_0} + \gamma_{+x_1} + (\gamma^2 - 4)x_2)\sigma(-\delta(x_0 + \gamma_{-x_1}) : \delta(x_0 + \gamma_{+x_1}) : x_2), \{14\} \\
& \sigma(-2x_1 + 4x_2 : 2x_1 + 4x_2 : -4x_0 + x_1 + 4x_2)\rho\left(\frac{x_0}{4} + \frac{x_1}{4} + x_2 : -\frac{x_0}{4} - \frac{x_1}{4} : -\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right), \{14\} \\
& A\sigma B\sigma C, \{15\}.
\end{aligned}$$

**Remarque 6.41.** — Les décompositions présentées dans l'énoncé qui précède ne sont peut-être pas de « longueur optimale ».

### 6.5. Transformations birationnelles cubiques et feuilletages

On mime ce qui a été fait au Chapitre 3 pour le cas quadratique avec des notations analogues. Puisque  $\text{Rat}_3 \simeq \mathbb{P}^{29}$  et  $\mathcal{F}_3 \simeq \mathbb{P}^{23}$  on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\cdot) : \mathbb{P}^{29} &\rightarrow \mathbb{P}^{23} \\
f = (f_0 : f_1 : f_2) &\mapsto (x_1 f_2 - x_2 f_1) dx_0 + (x_2 f_0 - x_0 f_2) dx_1 + (x_0 f_1 - x_1 f_0) dx_2
\end{aligned}$$

Soit  $f$  dans  $\mathring{\text{Bir}}_3$ . Lorsque le feuilletage  $\mathcal{F}(f)$  est vraiment de degré 3, *i.e.* lorsque  $\mathcal{F}(f)$  ne s'annule pas sur une hypersurface, les points singuliers de  $\mathcal{F}(f)$  sont la réunion des points d'indétermination et des points fixes de  $f$ . Alors qu'en degré 2 cette même application restreinte à  $\text{Bir}_2$  est essentiellement surjective, il n'en est pas de même en degré 3. Comme  $\mathring{\text{Bir}}_3$  est de dimension 18, son image par  $\mathcal{F}(\cdot)$  est a priori de dimension au plus 18.

Rappelons que  $\mathcal{X}$  est l'orbite des transformations  $\xi_{\gamma,\delta}$  de la forme

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2)$$

induisant la configuration  $\{15\}$ . Un élément de  $\mathcal{X}$  s'écrit  $B\xi_{\gamma,\delta}C$  pour certains  $B, C$  dans  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  et  $\gamma, \delta$  dans  $\mathbb{C}$ . Notons que  $B\xi_{\gamma,\delta}C$  est conjugué à  $CB\xi_{\gamma,\delta}$  et par suite  $\mathcal{F}(B\xi_{\gamma,\delta}C)$  est linéairement conjugué à  $\mathcal{F}(CB\xi_{\gamma,\delta})$ . Dans la suite on se concentre donc sur les transformations du type  $A\xi_{\gamma,\delta}$ . Elles s'écrivent

$$(a_0 x_0 Q + b_0 x_1 Q + c_0 x_0 x_1 x_2 : a_1 x_0 Q + b_1 x_1 Q + c_1 x_0 x_1 x_2 : a_2 x_0 Q + b_2 x_1 Q + c_2 x_0 x_1 x_2)$$

où  $A = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$  et  $Q = x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2$ . Un calcul direct montre que  $\mathcal{F}(A\xi_{\gamma,\delta})$  est donné par la 1-forme :

$$\begin{aligned} \omega = & (x_1(a_2 x_0 Q + b_2 x_1 Q + c_2 x_0 x_1 x_2) - x_2(a_1 x_0 Q + b_1 x_1 Q + c_1 x_0 x_1 x_2)) dx_0 + \\ & (x_2(a_0 x_0 Q + b_0 x_1 Q + c_0 x_0 x_1 x_2) - x_0(a_2 x_0 Q + b_2 x_1 Q + c_2 x_0 x_1 x_2)) dx_1 + \\ & (x_0(a_1 x_0 Q + b_1 x_1 Q + c_1 x_0 x_1 x_2) - x_1(a_0 x_0 Q + b_0 x_1 Q + c_0 x_0 x_1 x_2)) dx_2 \end{aligned}$$

On remarque que  $\omega$ , écrit dans la carte affine  $x_2 = 1$ , a son jet d'ordre 1 nul en  $(0,0)$ ; ce type de feuilletages a des propriétés dynamiques spéciales ([29]). En fait son 2-jet en  $(0,0)$  est donné par

$$(-\delta a_1 x_0^2 + (a_1 + b_1 \delta + c_1)x_0 x_1 + b_1 x_1^2) dx_0 + (\delta a_0 x_0^2 + (a_0 + b_0 \delta + c_0)x_0 x_1 + b_0 x_1^2) dx_1.$$

En particulier, toujours pour  $\gamma, \delta$  et  $A$  génériques, la multiplicité du point singulier  $(0,0)$  pour  $\omega$  est 4. Ceci semble indiquer qu'il y a génériquement 10 points singuliers. Pour confirmer cela on constate que si  $A = \text{id}$ , les points singuliers de  $\xi_{\text{id},\gamma,\delta}$  pour  $\gamma, \delta$  génériques sont au nombre de 9

$$\begin{aligned} (1 : 1 : 0), \quad (1 : -1 : 0), \quad (1 : -\gamma_+ : 0), \quad (1 : -\gamma_- : 0), \quad (0 : 0 : 1), \\ (0 : -1 : 1), \quad (-\delta : 0 : 1), \quad ((1 + \delta) : (1 + \delta) : -(1 + \gamma)), \quad (\delta - 1 : \delta - 1 : 1 - \gamma) \end{aligned}$$

avec la notation habituelle  $\gamma_{\pm} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$ .

On remarque alors que le 2-jet en  $(0,0)$  de  $\omega_{\text{id},\gamma,\delta}$  n'est pas de type général, en particulier sa multiplicité  $\mu$  est strictement plus grande que 4. Un feuilletage de degré 3 de  $\mathbb{P}^2$  a 13 points singuliers comptés avec multiplicité. Ceci implique que les autres points singuliers sont de multiplicité 1 et que  $\mu = 5$ . Si  $A$  est voisin de l'identité et générique, les huit points simples subsistent, le point  $(0,0)$  devient de multiplicité 4 donc un dixième point singulier apparaît. Ce qui précède permet d'énoncer la :

**Proposition 6.42.** — *Un élément générique de  $\mathcal{X}$  possède dix points spéciaux. Cinq sont des points d'indétermination dont l'un est de multiplicité 4, les cinq autres sont des points fixes simples.*

En général pour un élément  $f$  de  $\mathcal{X}$  au moins quatre des cinq points fixes sont en position générale (pas d'alignement 3 à 3). Pour cela il suffit de construire un exemple. On se donne une transformation  $\xi_{\gamma,\delta}$  et on choisit quatre points  $p_0, p_1, p_2$  et  $p_3$  en position générale tels que  $\xi_{\gamma,\delta}$  soit un difféomorphisme local en chacun de ces points. On suppose que les  $q_i := \xi_{\gamma,\delta}(p_i)$  sont aussi en position générale. Alors il existe un unique automorphisme linéaire  $A$  tel que  $Aq_i = p_i$ . La transformation birationnelle  $A\xi_{\gamma,\delta} \in \mathcal{X}$  possède quatre points fixes en position générale.

Considérons maintenant deux transformations génériques de  $\mathcal{X}$  ayant leurs cinq points d'indétermination communs comptés avec multiplicité (*i.e.* le point de multiplicité 4 est commun aux deux transformations) ainsi que 4 points fixes communs ; comme les transformations sont génériques ces 4 points fixes sont en position générale. Remarquons que les points d'indétermination déterminent les 5 courbes contractées : ce sont donc les mêmes pour les deux transformations. On se ramène bien sûr au cas où les deux transformations s'écrivent  $A\xi_{\gamma,\delta}$  et  $B\xi_{\gamma,\delta}$ . Mais si  $\xi_{\gamma,\delta}$  et  $\xi_{\gamma,\delta}$  ont même points d'indétermination elles sont égales, c'est un calcul élémentaire. Les quatre points fixes communs nous permettent d'affirmer que  $A = B$ . Comme en degré 2 on obtient le :

**Théorème 6.43.** — *Une transformation birationnelle de degré 3 générique est déterminée par la position de ses 5 points fixes et de ses 5 points d'indétermination affectés de leur multiplicité.*

Dans le cas quadratique pour 7 points en position générale on peut trouver un élément de  $\text{Bir}_2$  ayant ces 7 points spéciaux ; les configurations de 10 points étant de dimension 20 il n'est pas possible de réaliser un 10-uplet de points génériques comme points spéciaux d'un élément de  $\text{Bir}_3$ . Pour une transformation de  $\text{Bir}_3$  générique la position de 9 points spéciaux détermine celle du dixième.

**Problème.** Est ce que toute transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  est déterminantielle ?

**Problème.** Existe-t-il une généralisation en tout degré du Théorème 6.43 ?

## ANNEXE A

### DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6.14

Nous présentons ici une démonstration de la Proposition 6.14. Il s'agit de réduire le nombre de paramètres apparaissant dans les différents modèles du Lemme 6.13 à conjugaison g.d. près. Pour cela à chaque transformation on associe deux invariants gauche-droite :

- la configuration des courbes contractées avec multiplicité, celle qui apparaît dans la décomposition en facteurs irréductibles du déterminant jacobien ;
- la configuration des points images des courbes contractées qui n'est rien d'autre que celle des points d'indétermination de  $f^{-1}$ .

Nous allons voir que pour certaines valeurs spécifiques des paramètres quelques modèles faisant partie de types distincts (on fait ici allusion aux types (a), (b), (c) et (d) introduits au Lemme 6.13) présentent des configurations d'ensembles  $\text{Exc } f$  et  $\text{Ind } f^{-1}$  identiques.

Nous avons découpé la preuve en deux parties. La première (§A.1) est une approche grossière de la classification : modulo quelques conjugaisons immédiates on liste les ensembles  $\text{Exc } f$  lorsque  $f$  décrit les différents modèles du Lemme 6.13. La seconde (§A.2) consiste à comparer les transformations qui présentent une même configuration d'ensemble exceptionnel.

Toutes les manipulations se font à conjugaison g.d. près (nous ne le mentionnerons pas toujours) ; ceci permet souvent de normaliser certains coefficients (en général à 0 ou 1).

#### A.1. Première étape

##### A.1.1. Éléments de la forme (a). —

Soit  $f$  une transformation de type (a). Suivant que le paramètre  $\alpha$  est nul ou non, on se ramène à  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ .

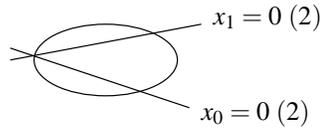
(a) *i.* Commençons par étudier l'éventualité  $\alpha = 0$ . La transformation  $f$  étant dans  $\mathring{\text{Bir}}_3$  le paramètre  $\delta$  et le couple  $(\beta, \varepsilon)$  sont non nuls ; il suffit donc de traiter les possibilités suivantes :

$$(\beta, \delta, \varepsilon) = (0, 1, 1), \quad (\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 0), \quad (\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 1).$$

(a) *i.1.* Supposons que  $(\beta, \delta, \varepsilon) = (0, 1, 1)$ . Notons que si  $\gamma = 0$ , la transformation  $f$  est quadratique, par suite  $\gamma = 1$  à conjugaison g.d. près et

$$f = (x_0(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$$

pour laquelle on observe la configuration  $\{11\}$  :



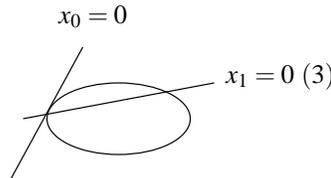
Rappelons que les indices  $( )$  indiquent la multiplicité qui apparaît dans la décomposition en facteurs irréductibles du déterminant jacobien. Cette multiplicité, qui est évidemment un invariant g.d., n'est mentionnée que lorsqu'elle est strictement supérieure à 1.

(a) *i.2.* Si  $(\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 0)$ , alors

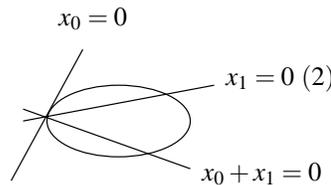
$$f = (x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1x_2).$$

On a l'alternative suivante :

- ou bien  $\gamma = 0$ , l'ensemble  $\text{Exc } f$  est du type  $\{10\}$  :



- ou bien on peut supposer que  $\gamma$  vaut 1 et on constate que  $f$  présente la configuration  $\{12\}$  :



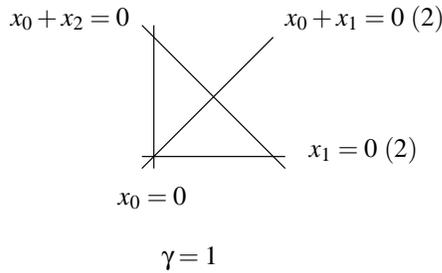
(a) *i.3.* Lorsque  $(\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 1)$  on a

$$f = (x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2).$$

La conique d'équation  $x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$  est lisse si et seulement si  $\gamma \neq 1$ . Les courbes contractées présentent la configuration  $\{11\}$ , resp.  $\{13\}$  lorsque la conique est lisse :



et la configuration  $\{5\}$  lorsqu'elle ne l'est pas :



(a) *ii.* Supposons que  $\alpha = 1$ . On observe que le couple  $(\beta, \varepsilon)$  est non nul ; comme précédemment il suffit de considérer les possibilités :

$$(\beta, \varepsilon) = (1, 0), \quad (\beta, \varepsilon) = (0, 1), \quad (\beta, \varepsilon) = (1, 1).$$

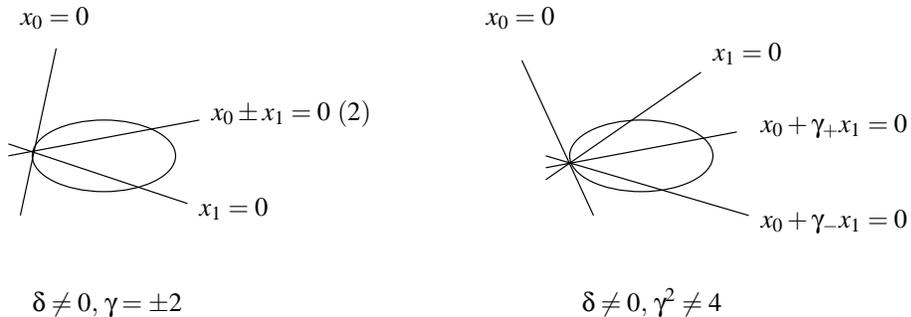
(a) *ii.1.* Étudions l'éventualité  $(\beta, \varepsilon) = (1, 0)$  :

$$f = (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2) : x_0 x_1 x_2).$$

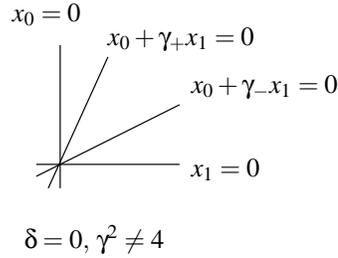
Rappelons que

$$\gamma_+ := \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}, \quad \gamma_- := \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}.$$

La conique d'équation  $x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 = 0$  est lisse si et seulement si  $\delta \neq 0$ . Si  $\delta$  est non nul, le lieu exceptionnel de  $f$  contient une conique lisse et on observe les configurations  $\{12\}$  et  $\{14\}$  :



Lorsque  $\delta$  est nul on constate que  $f$  présente la configuration  $\{6\}$  :

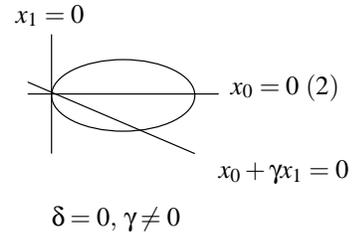
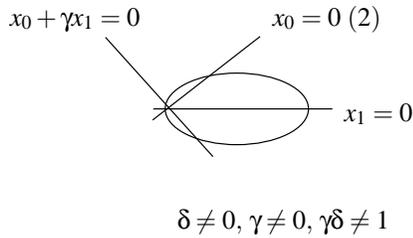


Remarquons que pour  $\gamma^2 = 4$  et  $\delta = 0$ , la conique est une droite double, donc non réduite, ce qui sort du contexte étudié ici.

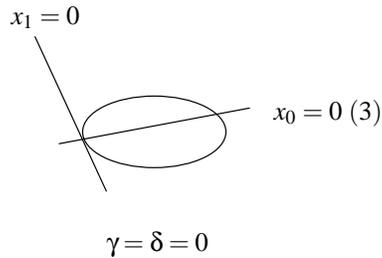
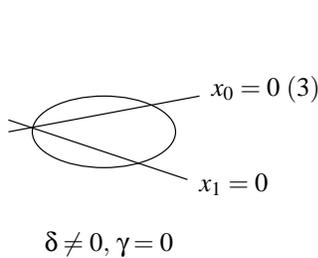
(a) **ii.2.** Si  $(\beta, \epsilon) = (0, 1)$ , alors  $f$  s'écrit

$$(x_0(x_0^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2).$$

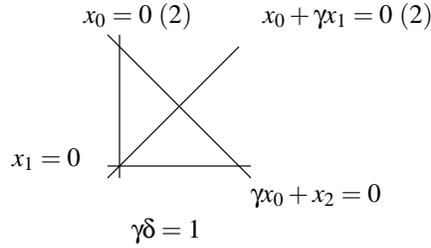
La conique d'équation  $x_0^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0$  est lisse si et seulement si  $\gamma\delta \neq 1$ . On observe les configurations  $\{13\}$ , resp.  $\{12\}$  :



Lorsque  $\gamma$  est nul, le nombre de droites diminue et on obtient les configurations  $\{13\}$ , resp.  $\{12\}$  :



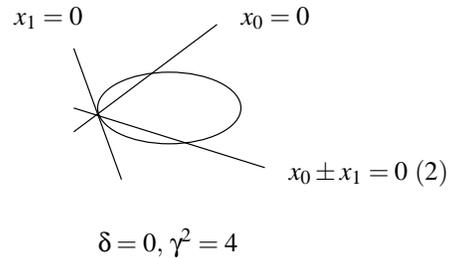
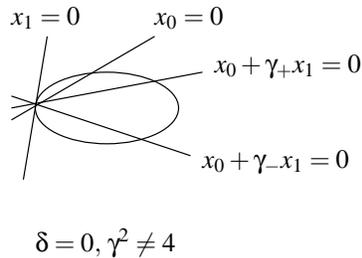
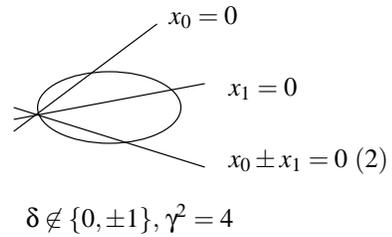
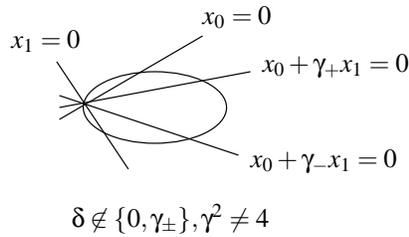
Enfin si  $\gamma\delta = 1$  on constate que  $f$  ne contracte plus de conique lisse ; plus précisément  $f$  a pour configuration  $\{5\}$  :



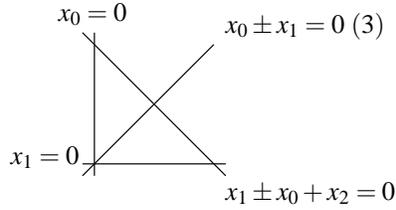
(a) *iii.* Enfin on s'intéresse à la possibilité  $(\beta, \varepsilon) = (1, 1)$ ; on a

$$f = (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2).$$

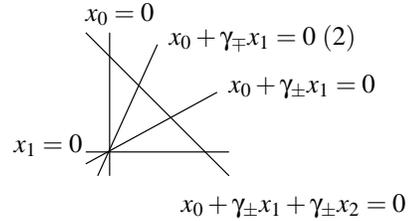
Notons que la conique  $x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0$  est lisse si et seulement si  $\delta \notin \{\gamma_+, \gamma_-\}$ . Si  $\delta$  est distinct de  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ , les configurations des courbes contractées sont  $\{15\}$ ,  $\{13\}$ ,  $\{14\}$  et  $\{12\}$  :



Lorsque la conique dégénère ou bien  $\delta = \gamma_{\pm}$ , ou bien  $(\gamma, \delta) = (\pm 2, \pm 1)$ . Si on change  $x_0$  en  $-x_0$  on voit que les configurations  $(\gamma, \delta) = (2, 1)$  et  $(\gamma, \delta) = (-2, -1)$  sont isomorphes, tout comme  $(\gamma, \delta) = (2, -1)$  et  $(\gamma, \delta) = (-2, 1)$ ; de sorte qu'il n'y a que les éventualités  $(\gamma, \delta) = (2, \pm 1)$  à considérer. On obtient alors les configurations  $\{5\}$  et  $\{7\}$  :



$$\gamma = 2, \delta = \pm 1$$



$$\delta = \gamma_{\pm}, \gamma^2 \neq 4$$

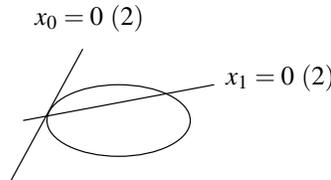
**A.1.2. Éléments du type (b). —**

Soit  $f$  un élément de la forme (b).

(b) *i.* Dans un premier temps supposons que  $\alpha = 0$ . La transformation  $f$  étant purement cubique on peut supposer que  $\delta = 1$  et  $(\beta, \varepsilon) \neq (0, 0)$ ; on distingue les possibilités suivantes à conjugaison g.d. près :

$$(\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 0), \quad (\beta, \delta, \varepsilon) = (0, 1, 1), \quad (\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 1).$$

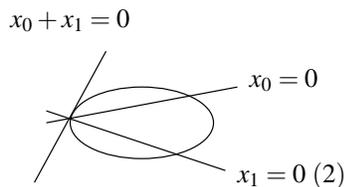
(b) *i.1.* Si  $(\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 0)$ , alors  $f = (x_0(x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + x_0 x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + x_0 x_2) : x_0 x_1^2)$  et la configuration de Exc  $f$  est la configuration  $\{10\}$  :



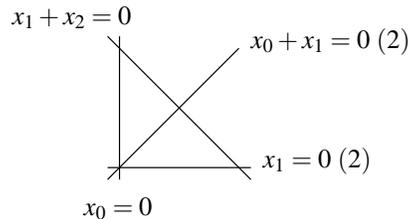
(b) *i.2.* Lorsque  $(\beta, \delta, \varepsilon) = (0, 1, 1)$  on a

$$f = (x_0(\gamma x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(\gamma x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1^2).$$

La conique  $\gamma x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0$  est lisse si et seulement si  $\gamma \neq 0$ ; nous avons donc les configurations  $\{12\}$  et  $\{5\}$  :



$$\gamma \neq 0$$

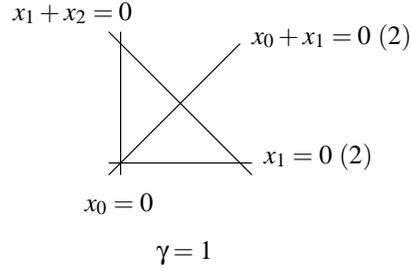
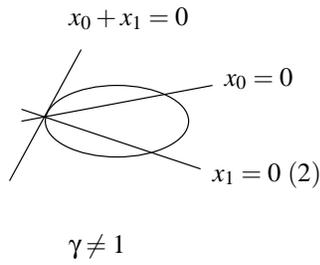


$$\gamma = 0$$

(b) *i.3.* Pour  $(\beta, \delta, \varepsilon) = (1, 1, 1)$  la transformation  $f$  est du type

$$(x_0(x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1^2).$$

La conique  $x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0$  étant lisse si et seulement si  $\gamma \neq 1$ , on observe les configurations  $\{12\}$  et  $\{5\}$  :



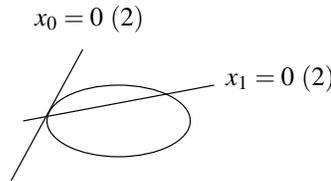
(b) *ii.* Lorsque  $\alpha$  est non nul, on peut supposer que  $\alpha = 1$ . Puisque  $f$  appartient à  $\mathring{\text{Bir}}_3$  on a  $(\beta, \varepsilon) \neq (0, 0)$ ; par suite à conjugaison près

$$(\beta, \varepsilon) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

(b) *ii.1.* Lorsque  $(\beta, \varepsilon) = (1, 0)$  la transformation  $f$  s'écrit

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2) : x_0 x_1^2)$$

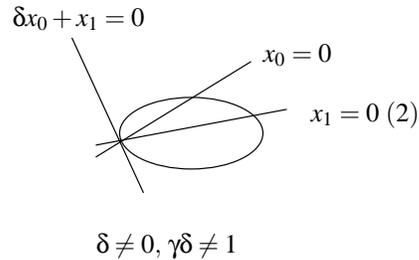
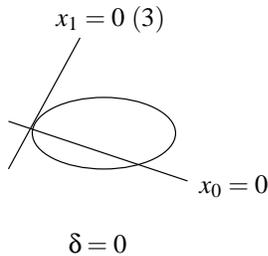
et présente la configuration  $\{10\}$  :



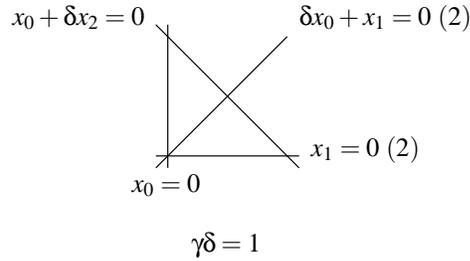
(b) *ii.2.* Si  $(\beta, \varepsilon) = (0, 1)$  on a :

$$f = (x_0(x_0^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1^2).$$

La conique d'équation  $x_0^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0$  étant lisse si et seulement si  $\gamma \delta \neq 1$  on observe pour  $\gamma \delta \neq 1$  les configurations  $\{10\}$  et  $\{12\}$  :



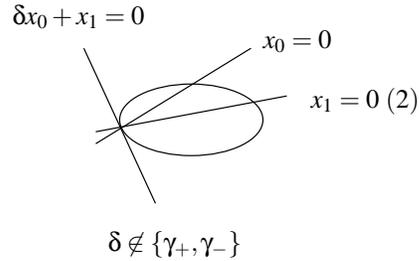
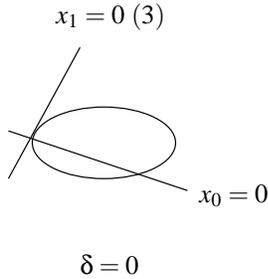
Si  $\gamma \delta = 1$  on obtient la configuration  $\{5\}$  :



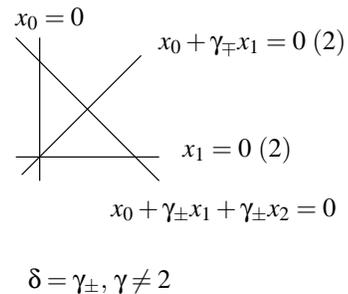
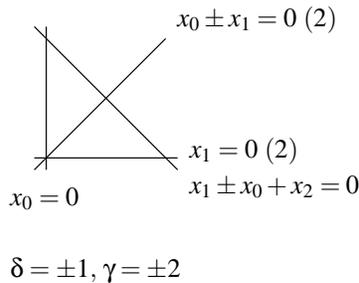
(b) **ii.3.** Pour finir lorsque  $(\beta, \varepsilon) = (1, 1)$  la transformation  $f$  s'écrit

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1^2).$$

La conique d'équation  $x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0$  est lisse si et seulement si  $\delta$  n'appartient pas à  $\{\gamma_+, \gamma_-\}$ . Dans ce cas Exc  $f$  présente la configuration  $\{10\}$  ou  $\{12\}$  :

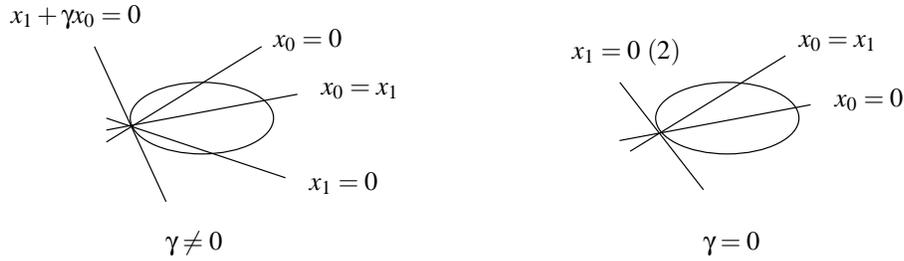


Lorsque  $\delta = \gamma_{\pm}$  on observe la configuration  $\{5\}$  :

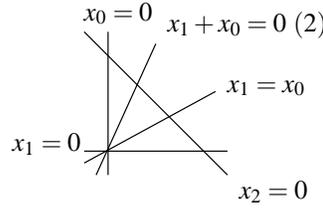


**A.1.3. Éléments de la forme (c) et (d). —**

Les transformations de type (c) conduisent aux configurations  $\{14\}$  et  $\{12\}$  :



Enfin pour un élément de la forme  $(\delta)$  on a la configuration  $\{7\}$  :



## A.2. Deuxième étape

### A.2.1. Configuration $\{5\}$ . —

Les transformations du §A.1 ayant la configuration  $\{5\}$  sont les suivantes :

$$f_1 = (x_0(x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_1(x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_0x_1x_2);$$

$$f_2 = (x_0(x_2 + \gamma x_0) \left( \frac{x_0}{\gamma} + x_1 \right) : x_1(x_2 + \gamma x_0) \left( \frac{x_0}{\gamma} + x_1 \right) : x_0x_1x_2);$$

$$f_3 = (x_0(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) : x_0x_1x_2);$$

$$f_4 = (x_0x_2(x_0 + x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1) : x_0x_1^2);$$

$$f_5 = (x_0(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_1 + x_2) : x_0x_1^2);$$

$$f_6 = (x_0 \left( \frac{x_0}{\gamma} + x_1 \right) (x_2 + \gamma x_0) : x_1 \left( \frac{x_0}{\gamma} + x_1 \right) (x_2 + \gamma x_0) : x_0x_1^2);$$

$$f_7 = (x_0(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) : x_0x_1^2);$$

$$f_8 = (x_0(x_1 + \gamma_+x_0)(x_1 + \gamma_-x_0 + x_2) : x_1(x_1 + \gamma_+x_0)(x_1 + \gamma_-x_0 + x_2) : x_0x_1^2).$$

On remarque que d'une part  $f_4, f_5, f_6, f_7$  et  $f_8$  sont g.d. conjuguées comme suit :

$$f_4 = f_5(x_0 : x_1 : x_2 - x_1); \quad f_4 = \left( \frac{x_0}{\gamma} : x_1 : \frac{x_2}{\gamma} \right) f_6(\gamma x_0 : x_1 : x_2 - \gamma^2 x_0);$$

$$f_4 = f_7(x_0 : x_1 : x_2 - x_0 - x_1); \quad f_4 = (\gamma_+x_0 : x_1 : \gamma_+x_2) f_8 \left( \frac{x_0}{\gamma_+} : x_1 : x_2 - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} x_0 - x_1 \right);$$

d'autre part  $f_1$  et  $f_2$  appartiennent à la même g.d. orbite :

$$f_1 = (\gamma x_1 : x_0 : x_2) f_2 \left( x_1 : \frac{x_0}{\gamma} : \gamma x_2 \right).$$

Les éléments  $f_1$  et  $f_4$  ne sont pas g.d. conjugués :  $\# \text{Ind } f_4 \neq \# \text{Ind } f_1$ .

Les transformations  $f_1$  et  $f_3$  ne sont pas g.d. conjuguées : tous les points d'indétermination de  $f_3$  sont des intersections de droites de  $\text{Exc } f_3$  ce qui n'est pas le cas pour  $f_1$ .

À conjugaison g.d. près il reste donc seulement les modèles suivants pour la configuration  $\{5\}$  :

$$\begin{aligned} & (x_0(x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_1(x_1 + x_2)(x_0 + x_1) : x_0x_1x_2); \\ & (x_0(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) : x_1(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) : x_0x_1x_2); \\ & (x_0x_2(x_0 + x_1) : x_1x_2(x_0 + x_1) : x_0x_1^2). \end{aligned}$$

#### A.2.2. Configuration $\{6\}$ . —

Un seul modèle présente la configuration  $\{6\}$  :

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1) : x_0x_1x_2), \quad \gamma^2 \neq 4.$$

#### A.2.3. Configuration $\{7\}$ . —

Deux modèles du §A.1 possèdent la configuration  $\{7\}$  :

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \gamma_+ x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_2 &= (x_0x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_1x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_0x_1(x_0 - x_1)) \end{aligned}$$

avec dans la première possibilité  $\gamma^2 \neq 4$ .

Les transformations  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas g.d. conjuguées : trois des points de  $f_2(\text{Exc } f_2)$  sont alignés ce qui n'est pas le cas pour  $f_1(\text{Exc } f_1)$ .

#### A.2.4. Configuration $\{10\}$ . —

Les éléments obtenus au §A.1 ayant la configuration  $\{10\}$  sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_2 &= (x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_3 &= (x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1^2); \\ f_4 &= (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2) : x_0x_1^2); \\ f_5 &= (x_0(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1^2); \\ f_6 &= (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1^2). \end{aligned}$$

On constate que  $f_1$  et  $f_2$  (resp.  $f_3$  et  $f_4$ , resp.  $f_5$  et  $f_6$ ) sont dans la même g.d. orbite :

$$f_1 = (x_1 : x_0 : x_2) f_2 (x_1 : x_0 : x_2); \quad f_5 = f_6 (x_0 : x_1 : x_2 - x_1); \quad f_3 = f_4 \left( x_0 : x_1 : \frac{x_2 - x_0}{\delta} \right).$$

L'élément  $f_5$  n'est conjugué ni à  $f_1$ , ni à  $f_2$ , ni à  $f_4$ ; la configuration de  $\text{Exc } f_5$  se distingue de celle des  $f_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$  par la propriété suivante : la droite de  $\text{Exc } f_5$  tangente à la conique de  $\text{Exc } f_5$  est de multiplicité 3.

L'élément  $f_4$  n'est conjugué ni à  $f_1$ , ni à  $f_2$ , ni à  $f_5$  : les deux droites de  $\text{Exc}f_4$  apparaissent avec multiplicité 2 ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles.

La transformation  $f_1$  n'est pas conjuguée à  $f_3$  : la droite de  $\text{Exc}f_1$  tangente à la conique de  $\text{Exc}f_1$  est de multiplicité 1 ce qui n'est pas le cas pour  $f_3$ .

Par ailleurs on remarque que  $f_3$  est g.d. conjugué à  $(x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1^2)$  et que  $f_4$  appartient à

$$O_{g.d.}(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2).$$

Ainsi à conjugaison g.d. près on a les modèles :

$$\begin{aligned} (x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2); & \quad (x_0(x_1^2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2) : x_0x_1^2); \\ (x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1^2). & \end{aligned}$$

#### A.2.5. Configuration {11}. —

Considérons les éléments du §A.1 ayant pour configuration {11} :

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_0(x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_2 &= (x_0(x_1^2 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_3 &= (x_0(x_0^2 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1x_2). \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire conduit à :  $f_3 = (x_1 : x_0 : x_2)f_2(x_1 : x_0 : x_2)$ .

Les transformations  $f_1$  et  $f_3$  ne sont pas g.d. conjuguées : les multiplicités des droites de  $\text{Exc}f_3$  sont 3 et 1 alors que les droites de  $\text{Exc}f_1$  apparaissent avec multiplicité 2.

#### A.2.6. Configuration {12}. —

Les transformations de configuration {12} sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_0(x_1^2 + x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_2 &= (x_0(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_0x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_3 &= (x_0(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_4 &= (x_0(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2); \\ f_5 &= (x_0(x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1^2); \\ f_6 &= (x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1^2); \\ f_7 &= (x_0(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1^2); \\ f_8 &= (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1^2); \\ f_9 &= (x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1)). \end{aligned}$$

L'élément  $f_9$  n'est g.d. conjugué à aucun des autres  $f_i$  : la droite de  $\text{Exc}f_9$  tangente à la conique de  $\text{Exc}f_9$  apparaît avec multiplicité 2 ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles.

Les huit premières transformations sont g.d. conjuguées :

$$\begin{aligned}
f_2 &= (x_1 : x_0 : x_2)f_4(x_1 : x_0 : x_2); & f_7 &= f_8(x_0 : x_1 : x_2 - x_1); \\
f_1 &= (\gamma x_1 : x_0 : x_2)f_3\left(x_1 : \frac{x_0}{\gamma} : \gamma x_2\right); & f_5 &= f_6(x_0 : x_1 : (\gamma - 1)x_2 - x_1); \\
f_1 &= (-x_0 : x_0 + x_1 : x_0 + x_2)f_2(x_0 : -x_0 - x_1 : x_1 + x_2); & f_7 &= f_5(x_0 : x_1 : x_0 + x_2); \\
f_5 &= (x_0 + x_1 : -x_1 : x_2 - x_1)f_1(-x_0 - x_1 : x_1 : x_2).
\end{aligned}$$

Finalement on a deux modèles :

$$\begin{aligned}
&(x_0(x_0^2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1)); \\
&(x_0(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2).
\end{aligned}$$

### A.2.7. Configuration {13}. —

Les transformations possédant la configuration {13} sont :

$$f_1 = (x_0(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2)$$

avec  $\gamma \neq 0, 1$ ;

$$f_2 = (x_0(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + \delta x_0x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + \delta x_0x_2) : x_0x_1x_2)$$

où  $\gamma\delta \neq 0, \gamma\delta \neq 1$ ;

$$f_3 = (x_0(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2 + \delta x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2 + \delta x_0x_2) : x_0x_1x_2)$$

avec  $\delta \neq 0, 1, -1$ .

Notons que  $f_1$  et  $f_2$ , resp.  $f_1$  et  $f_3$ , appartiennent à la même g.d. orbite :

$$f_1 = (x_0 : x_1 : x_2) (x_0(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2) : x_0x_1x_2) \left(x_0 : \delta x_1 : \frac{x_2}{\delta}\right),$$

resp.

$$f_1 = A \left(x_0(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_1x_2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}x_0x_2) : x_0x_1x_2\right) B$$

avec

$$A = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}x_0 : (1-\gamma)x_0 + (1-\gamma)x_1 : x_0 - \frac{x_2}{\gamma}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(-\gamma x_0 : \gamma x_0 + x_1 : \frac{\gamma x_1}{1-\gamma} + \frac{x_2}{1-\gamma}\right).$$

### A.2.8. Configuration {14}. —

Les modèles présentant la configuration {14} sont les suivants :

$$f_1 = (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + \delta x_0x_2) : x_0x_1x_2)$$

où  $\gamma^2 \neq 4, \delta \neq 0$ ,

$$f_2 = (x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0x_1 + x_1x_2) : x_0x_1x_2)$$

avec  $\gamma^2 \neq 4$ ,

$$f_3 = (x_0(x_0^2 + \gamma x_0x_2 + x_1x_2) : x_1(x_0^2 + \gamma x_0x_2 + x_1x_2) : x_0x_1(x_0 - x_1))$$

avec  $\gamma$  non nul.

On remarque que  $f_1$  et  $f_2$  sont g.d. conjugués

$$f_2 = (x_1 : x_0 : \delta x_2) f_1 \left( x_1 : x_0 : \frac{x_2}{\delta} \right);$$

par contre  $f_1$  et  $f_3$  ne le sont pas : trois des points de  $f_3(\text{Exc } f_3)$  sont alignés ce qui n'est pas le cas pour  $f_1(\text{Exc } f_1)$ .

**A.2.9. Configuration {15}. —**

Un seul modèle du §A.1 possède la configuration {15}, il s'agit de :

$$(x_0(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2),$$

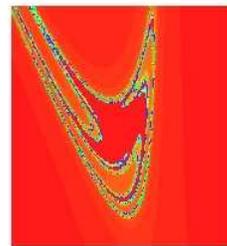
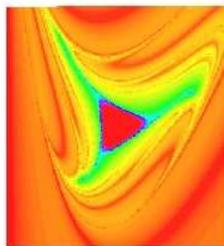
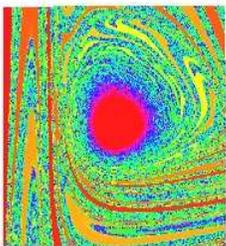
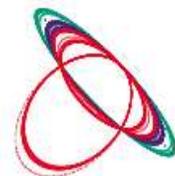
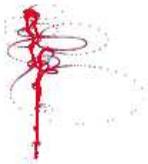
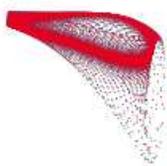
avec  $\gamma^2 \neq 4$ ,  $\delta \notin \{0, 1\}$ .

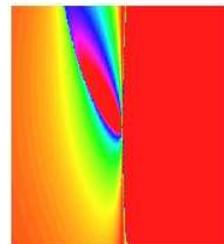
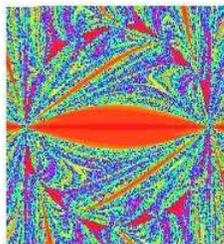
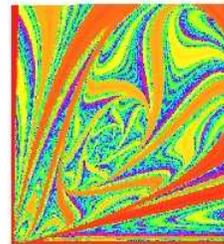
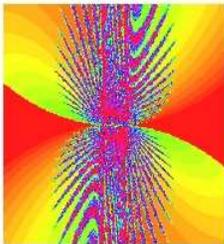
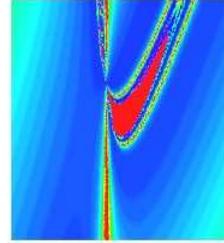
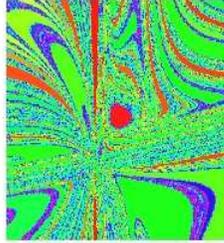
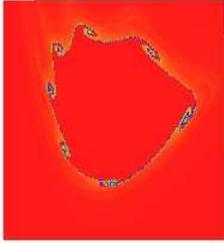


## ANNEXE B

### EN GUISE D'ÉPILOGUE

Nous avons procédé à quelques expériences numériques consultables sur le site des auteurs. Elles concernent pour la plupart des transformations birationnelles quadratiques à coefficients réels pour lesquelles nous avons tenté de dessiner quelques orbites. Nous avons aussi appliqué à ces transformations la procédure permettant de dessiner les ensembles de JULIA des fonctions rationnelles sur la sphère de RIEMANN. Ci-dessous sont présentées 3 orbites typiques, les autres figures sont des ensembles de type JULIA.





## INDEX

|   |     |
|---|-----|
| algébriquement stable                                     | 107 |
| application quadratique déterminantielle                  | 35  |
| automorphisme de HÉNON                                    | 30  |
| automorphisme de type HÉNON                               | 55  |
| birationnellement conjugués                               | 25  |
| coefficients algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ | 108 |
| condition de BEDFORD et DILLER                            | 129 |
| conjugaison dynamique                                     | 24  |
| conjugaison gauche-droite                                 | 24  |
| conique réduite   | 149 |
| contracter une courbe                                     | 24  |
| courbe contractée par une transformation birationnelle    | 24  |
| courbe de points fixes                                    | 93  |
| degré d'une transformation rationnelle                    | 23  |
| désingularisée  | 111 |
| droite mobile   | 51  |
| droite immobile   | 51  |
| éclatement d'un point                                     | 24  |
| ensemble exceptionnel d'une transformation birationnelle  | 24  |
| famille de droites contractées                            | 51  |
| famille de points d'indétermination                       | 51  |
| fibration en droites                                      | 51  |
| fibration invariante                                      | 51  |
| fibration rationnelle                                     | 59  |
| flot polynomial   | 54  |
| générateur infinitésimal                                  | 51  |
| genre arithmétique  | 111 |
| germe de flot   | 50  |
| groupe affine   | 55  |

|   |     |
|---|-----|
| groupe de CREMONA   | 23  |
| groupe de décomposition d'une courbe irréductible de $\mathbb{P}^2$                     | 6   |
| groupe de JONQUIÈRES  | 3   |
| groupe d'inertie d'une courbe irréductible de $\mathbb{P}^2$                            | 6   |
| groupe élémentaire  | 55  |
| indice de BAUM-BOTT du feuilletage $\mathcal{F}$ au point $m$                           | 98  |
| involution de BERTINI   | 5   |
| involution de CREMONA   | 2   |
| involution de GEISER  | 5   |
| $k$ -ième voisinage infinitésimal   | 1   |
| lieu d'indétermination d'une transformation birationnelle                               | 24  |
| modèle birationnel  | 50  |
| normalisée  | 111 |
| pinceau   | 51  |
| point base d'une transformation birationnelle   | 1   |
| point de base d'une fibration   | 51  |
| point critique d'une application polynomiale homogène                                   | 27  |
| point d'intermation d'une transformation birationnelle                                  | 24  |
| point fixe d'une transformation birationnelle   | 92  |
| point fixe résonnant  | 112 |
| point périodique hyperbolique   | 127 |
| point infiniment proche   | 1   |
| point immobile  | 51  |
| point mobile  | 51  |
| point périodique d'une transformation birationnelle                                     | 127 |
| point propre d'une transformation birationnelle   | 1   |
| point singulier de type nœud col  | 49  |
| premier degré dynamique   | 108 |
| premier voisinage infinitésimal   | 1   |
| préserver une fibration fibre à fibre   | 51  |
| purement de degré $k$   | 23  |
| rationnellement intégrable  | 51  |
| relation linéaire   | 31  |
| réseau homaloïdal   | 1   |
| sous-groupe normal de $G$ engendré par l'élément $f$ de $G$                             | 141 |
| surface de DEL PEZZO  | 4   |
| symétrie forte  | 58  |
| transformation quadratique $\mathcal{C}$ -générique                                     | 6   |
| transformation rationnelle  | 1   |
| transformation rationnelle non dégénérée  | 28  |
| transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans lui-même, transformation de CREMONA | 1   |
| transformation de JONQUIÈRES  | 3   |
| transformation monomiale  | 100 |

## INDEX DES NOTATIONS

|                               |  |    |
|-------------------------------|--|----|
| $\sigma$                      | involution de CREMONA, $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$   |    |
| dJ                            | groupe de JONQUIÈRES   | 3  |
| $\lambda(f)$                  | premier degré dynamique de $f$   | 8  |
| $f^\bullet$                   | à un élément $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ de $\text{Rat}_k$ on associe la transformation birationnelle<br>$f^\bullet = \delta(f_0 : f_1 : f_2), \quad \delta = (\text{pgcd}(f_0, f_1, f_2))^{-1}$ | 11 |
| $Df_{(m)}$                    | différentielle de $f$ en $m$   | 15 |
| $\text{tr}(Df_{(m)})$         | trace de $Df_{(m)}$  | 15 |
| $\text{Rat}_k$                | projectivisé de l'espace des triplets de polynômes homogènes de degré $k$ en 3 variables   | 23 |
| $\mathring{\text{Rat}}_k$     | ensemble des éléments de $\text{Rat}_k$ purement de degré $k$  | 23 |
| Rat                           | ensemble des transformations rationnelles de $\mathbb{P}^2$ dans lui-même  | 23 |
| $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$    | groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2$ , groupe de CREMONA  | 23 |
| $\text{Bir}_k$                | ensemble des transformations de $\text{Rat}_k$ inversibles en tant que transformations rationnelles  | 23 |
| $\text{Rat}_k^\bullet$        | $\{f^\bullet \mid f \in \text{Rat}_k\}$  |    |
| $\text{Bir}_k^\bullet$        | $\{f^\bullet \mid f \in \text{Bir}_k\}$  |    |
| $\mathring{\text{Bir}}_k$     | ensemble des transformations birationnelles purement de degré $k$  | 23 |
| $O_{\text{dyn}}(Q)$           | orbite d'un élément $Q$ de Rat sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ par conjugaison dynamique   | 24 |
| $O_{g.d.}(Q)$                 | orbite d'une transformation rationnelle $Q$ sous l'action gauche-droite  | 24 |
| Ind $f$                       | lieu d'indétermination de $f$  | 24 |
| Exc $f$                       | ensemble exceptionnel de $f$   | 24 |
| $\rho$                        | $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 x_1 : x_2^2 : x_1 x_2)$  |    |
| $\tau$                        | $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2 - x_0 x_2)$  |    |
| $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_v$ | ensemble des polynômes homogènes de degré $v$ dans $\mathbb{C}^3$  | 25 |
| det jac                       | application définie par<br>$\text{Rat}_2 \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3) \simeq \{ \text{courbes de degré } 3 \}, \quad [Q] \mapsto [\det \text{jac } Q = 0]$            | 25 |
| $C(f)$                        | lieu critique de $f$   | 27 |
| $\Sigma^3$                    | orbite de $\sigma$ sous l'action gauche-droite, <i>i.e.</i> $\Sigma^3 = O_{g.d.}(\sigma)$  | 29 |
| $\Sigma^2$                    | orbite de $\rho$ sous l'action gauche-droite, <i>i.e.</i> $\Sigma^2 = O_{g.d.}(\rho)$  | 29 |
| $\Sigma^1$                    | orbite de $\tau$ sous l'action gauche-droite, <i>i.e.</i> $\Sigma^1 = O_{g.d.}(\tau)$  | 29 |

|                                    |   |     |
|------------------------------------|---|-----|
| $\Sigma^0$                         | $\{\ell(\ell_0 : \ell_1 : \ell_2), \ell, \ell_i \text{ formes linéaires, les } \ell_i \text{ étant indépendantes}\}$  |     |
| $\text{RL}(Q)$                     | $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des relations linéaires de $Q$   | 31  |
| $e(Q)$                             | dimension de $\text{RL}(Q)$   | 31  |
| $\text{Sing } \mathcal{F}$         | lieu singulier du feuilletage $\mathcal{F}$   | 39  |
| $\text{Isot } f$                   | groupe d'isotropie de $f$   | 41  |
| $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  | groupe engendré par $f_1, \dots, f_n$   | 41  |
| $\mathcal{S}_6$                    | $\{\text{id}, (x_0 : x_2 : x_1), (x_2 : x_1 : x_0), (x_1 : x_0 : x_2), (x_1 : x_2 : x_0), (x_2 : x_0 : x_1)\}$  |     |
| $A$                                | groupe affine<br>$A = \{(x_0, x_1) \mapsto (a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1, a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2) \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0\}$  | 55  |
| $E$                                | groupe élémentaire<br>$E = \{(x_0, x_1) \mapsto (\alpha x_0 + P(x_1), \beta x_1 + \gamma) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[x_1]\}$  | 55  |
| $\mathcal{F}_v$                    | projectivisé de l'espace vectoriel des formes $\omega$ satisfaisant l'identité d'EULER :<br>$\mathcal{F}_v = \mathbb{P}\{\omega = F_0 dx_0 + F_1 dx_1 + F_2 dx_2 \mid x_0 F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 = 0, \deg F_i = v + 1\}$      | 91  |
| $\mathcal{F}_v^\bullet$            | espace des feuilletages de degré inférieur ou égal à $v$  | 91  |
| $\mathring{\mathcal{F}}_v$         | ensemble des feuilletages de degré $v$  | 92  |
| $\mathcal{F}(\cdot)$               | application donnée par<br>$\text{Rat}_n \rightarrow \mathcal{F}_n, f = (f_0 : f_1 : f_2) \mapsto (x_1 f_2 - x_2 f_1) dx_0 + (x_2 f_0 - x_0 f_2) dx_1 + (x_0 f_1 - x_1 f_0) dx_2$  | 92  |
| $\text{Fix } f$                    | ensemble des points fixes de $f$  | 92  |
| $\text{Re } z$                     | partie réelle de $z$  | 98  |
| $\text{BB}(\mathcal{F}(m))$        | indice de BAUM-BOTT du feuilletage $\mathcal{F}$ au point $m$   | 98  |
| $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ | groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$   | 109 |
| $A^\kappa$                         | élément obtenu en faisant agir l'élément $\kappa$ de $\text{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sur les coefficients de l'automorphisme $A$ de $\mathbb{P}^2$   | 109 |
| $\text{Ind}^+ f$                   | $\bigcup_{n \geq 1} \text{Ind } f^n$  |     |
| $\text{Ind}^- f$                   | $\bigcup_{n \geq 1} \text{Ind } f^{-n}$   |     |
| $\text{Exc}^+ f$                   | $\bigcup_{n \geq 1} \text{Exc } f^n$  |     |
| $\text{Exc}^- f$                   | $\bigcup_{n \geq 1} \text{Exc } f^{-n}$   |     |
| $f_{\alpha, \beta}$                | famille de transformations birationnelles définie par<br>$\left( \frac{\alpha x_0 + x_1}{x_0 + 1}, \beta x_1 \right), \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$   | 129 |
| $\text{dist}$                      | métrique de FUBINI-STUDY  | 130 |
| $\text{N}(f, G)$                   | sous-groupe normal de $G$ engendré par l'élément $f$ de $G$   | 141 |
| $\text{Inv}$                       | application qui à une transformation birationnelle associe son inverse  | 149 |
| (a)                                | transformation du type<br>$(x_0(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + \varepsilon x_1 x_2) : x_1(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + \varepsilon x_1 x_2) : x_0 x_1 x_2)$   | 154 |
| (b)                                | transformation de la forme<br>$(x_0(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + \varepsilon x_1 x_2) : x_1(\alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_0 x_1 + \delta x_0 x_2 + \varepsilon x_1 x_2) : x_0 x_1^2)$ | 154 |
| (c)                                | transformation du type<br>$(x_0(x_0^2 + x_1 x_2 + \gamma x_0 x_2) : x_1(x_0^2 + x_1 x_2 + \gamma x_0 x_2) : x_0 x_1(x_0 - x_1))$  | 154 |
| (d)                                | transformation de la forme<br>$(x_0 x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_1 x_2(x_1 + \gamma x_0) : x_0 x_1(x_0 - x_1))$  | 154 |

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] V. Arnol'd. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. “Mir”, Moscow, 1984. Translated from the Russian by Djilali Embarek, Reprint of the 1980 edition.
- [3] H. Bass, E. H. Connell, and D. Wright. The Jacobian conjecture : reduction of degree and formal expansion of the inverse. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(2) :287–330, 1982.
- [4] P. Baum and R. Bott. Singularities of holomorphic foliations. *J. Differential Geometry*, 7 :279–342, 1972.
- [5] L. Bayle and A. Beauville. Birational involutions of  $\mathbb{P}^2$ . *Asian J. Math.*, 4(1) :11–17, 2000. Kodaira’s issue.
- [6] A. Beauville.  $p$ -elementary subgroups of the Cremona group. *J. Algebra*, 314(2) :553–564, 2007.
- [7] E. Bedford and J. Diller. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math. J.*, 128(2) :331–368, 2005.
- [8] E. Bedford and K. Kim. Dynamics of rational surface automorphisms : linear fractional recurrences. *J. Geom. Anal.*, 19(3) :553–583, 2009.
- [9] E. Bedford, K. Kim, T. T. Truong, N. Abarenkova, and J.-M. Maillard. Degree complexity of a family of birational maps. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 11(1) :53–71, 2008.
- [10] E. Bedford and J. Smillie. Fatou-Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(2) :789–792, 1991.
- [11] E. Bertini. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. *Annali di Mat.*, 8 :244–286, 1877.
- [12] G. Birkhoff. Lie groups simply isomorphic with no linear group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42(12) :883–888, 1936.

- [13] J. Blanc. Conjugacy classes of affine automorphisms of  $\mathbb{K}^n$  and linear automorphisms of  $\mathbb{P}^n$  in the Cremona groups. *Manuscripta Math.*, 119(2) :225–241, 2006.
- [14] J. Blanc. On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane. *Michigan Math. J.*, 56(2) :315–330, 2008.
- [15] J. Blanc. Sous-groupes algébriques du groupe de Cremona. *Transform. Groups*, 14(2) :249–285, 2009.
- [16] J. Blanc. Groupes de Cremona, connexité et simplicité. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(2) :357–364, 2010.
- [17] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust. Sur un théorème de Castelnuovo. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 39(1) :61–80, 2008.
- [18] F. E. Browder, editor. *Mathematical developments arising from Hilbert problems*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1976.
- [19] M. Brunella. Minimal models of foliated algebraic surfaces. *Bull. Soc. Math. France*, 127(2) :289–305, 1999.
- [20] F. Cano, D. Cerveau, and J. Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Échelles. Belin, 2013.
- [21] S. Cantat. Invariant hypersurfaces in holomorphic dynamics. *Math. Res. Lett.*, 17(5) :833–841, 2010.
- [22] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 174(1) :299–340, 2011.
- [23] S. Cantat and C. Favre. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :199–235, 2003.
- [24] S. Cantat and S. Lamy. Normal subgroups in the Cremona group, arxiv:1007.0895. *Acta Math.*, À paraître.
- [25] G. Castelnuovo. Sulle trasformazioni cremoniane del piano, che ammettono una curva fiera. *Rend. Accad. Lincei*, 1892.
- [26] G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36 :861–874, 1901.
- [27] D. Cerveau. Feuilletages holomorphes de codimension 1. Réduction des singularités en petites dimensions et applications. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix, xi, 11–47. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [28] D. Cerveau. Feuilletages en droites, équations des eikonales et autres équations différentielles. *Astérisque*, (323) :101–122, 2009.

- [29] D. Cerveau, A. Lins-Neto, F. Loray, J. V. Pereira, and F. Touzet. Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences. *Mosc. Math. J.*, 7(1) :21–54, 2007.
- [30] A. Chambert-Loir. Théorèmes d'équidistribution pour les systèmes dynamiques d'origine arithmétique. In *Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux*, volume 30 of *Panor. Synthèses*, pages 203–294. Soc. Math. France, Paris, 2010.
- [31] A. B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*. Revised printing. American Mathematical Society Colloquium Publication, vol. X. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [32] J. L. Coolidge. *A History of Geometrical Methods*. Oxford University Press, New York, 1940.
- [33] J. L. Coolidge. *A treatise on algebraic plane curves*. Dover Publications Inc., New York, 1959.
- [34] T. de Fernex. On planar Cremona maps of prime order. *Nagoya Math. J.*, 174 :1–28, 2004.
- [35] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [36] P. Deligne. Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d'après W. Fulton). In *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, volume 842 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–10. Springer, Berlin, 1981.
- [37] P. Delorme. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations. *Bull. Soc. Math. France*, 105(3) :281–336, 1977.
- [38] M. Demazure, H. C. Pinkham, and B. Teissier, editors. *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980. Held at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977.
- [39] J. Déserti. Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 71701, 27, 2006.
- [40] J. Déserti. Sur les automorphismes du groupe de Cremona. *Compos. Math.*, 142(6) :1459–1478, 2006.
- [41] J. Déserti. Le groupe de Cremona est hopfien. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(3) :153–156, 2007.
- [42] J. Déserti. Sur les sous-groupes nilpotents du groupe de Cremona. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3) :377–388, 2007.
- [43] J. Déserti. Expériences sur certaines transformations birationnelles quadratiques. *Nonlinearity*, 21(6) :1367–1383, 2008.

- [44] J. A. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Troisième édition, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 5.
- [45] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.
- [46] J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) :2793–2991 (electronic), 2007.
- [47] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
- [48] R. Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J.*, 131(2) :219–247, 2006.
- [49] N. Fakhruddin. Questions on self maps of algebraic varieties. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 18(2) :109–122, 2003.
- [50] C. Favre. Points périodiques d’applications birationnelles de  $\mathbb{P}^2$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(4) :999–1023, 1998.
- [51] C. Favre. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini. *Astérisque*, (332) :Exp. No. 998, vii, 11–43, 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.
- [52] J. E. Fornæss and N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension. II. In *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, volume 137 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 135–182. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.
- [53] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.
- [54] J.-P. Furter. On the degree of iterates of automorphisms of the affine plane. *Manuscripta Math.*, 98(2) :183–193, 1999.
- [55] M. Kh. Gizatullin. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) :909–970, 1134, 1982.
- [56] L. Godeaux. *Les transformations birationnelles du plan*. Mémor. Sci. Math., no. 122. Gauthier-Villars, Paris, 1953. 2nd ed.
- [57] X. Gómez-Mont and G. Kempf. Stability of meromorphic vector fields in projective spaces. *Comment. Math. Helv.*, 64(3) :462–473, 1989.
- [58] X. Gómez-Mont and I. Luengo. The Bott Polynomial of a Holomorphic Foliation by Curves. *Ecuaciones Diferenciales y Singularidades (Colloque Medina 1995)*, Universidad de Valladolid (1997).
- [59] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

- [60] A. Guichardet. Étude de la  $l$ -cohomologie et de la topologie du dual pour les groupes de Lie à radical abélien. *Math. Ann.*, 228(3) :215–232, 1977.
- [61] A. Guillot. Un théorème de point fixe pour les endomorphismes de l'espace projectif avec des applications aux feuilletages algébriques. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 35(3) :345–362, 2004.
- [62] J. Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.
- [63] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of algebraic geometry. Vol. II*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Book III : General theory of algebraic varieties in projective space, Book IV : Quadrics and Grassmann varieties, Reprint of the 1952 original.
- [64] H. P. Hudson. *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press. 1927.
- [65] V. A. Iskovskih. Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(1) :19–43, 237, 1979.
- [66] V. A. Iskovskih. Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5(245)) :255–256, 1985.
- [67] D. Jackson. *Invariant curves for birational maps*. PhD thesis, University of Notre Dame, 2005.
- [68] J.-P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [69] H. W. E. Jung. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, 184 :161–174, 1942.
- [70] S. Kantor. Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. *Mayer & Mullen, Berlin*, 1895.
- [71] S. Lamy. L'alternative de Tits pour  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . *J. Algebra*, 239(2) :413–437, 2001.
- [72] S Lamy. Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, 48(3-4) :291–315, 2002.
- [73] S. Lefschetz. On the fixed point formula. *Ann. of Math. (2)*, 38(4) :819–822, 1937.
- [74] Ju. I. Manin. Rational surfaces over perfect fields. II. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114) :161–192, 1967.
- [75] M. Manjarin. Flows of birational quadratic transformations in the complex projective space of dimension 3, *arxiv* :1002.3466. 2010.

- [76] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [77] J. Martinet. Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.-D. Brjuno). In *Bourbaki Seminar, Vol. 1980/81*, volume 901 of *Lecture Notes in Math.*, pages 55–70. Springer, Berlin, 1981.
- [78] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4) :469–523, 1980.
- [79] D. I. Moldavanski. Certain subgroups of groups with one defining relation. *Sibirsk. Mat. Z.*, 8 :1370–1384, 1967.
- [80] M. Noether. Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. *Göttigen Nachr.*, pages 1–6, 1869.
- [81] M. Noether. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. *Math. Ann.*, 3(2) :161–227, 1870.
- [82] M. Noether. Zur Theorie der eidentigen Ebenentransformationen. *Math. Ann.*, 5(4) :635–639, 1872.
- [83] I. Pan. Une remarque sur la génération du groupe de Cremona. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(1) :95–98, 1999.
- [84] I. Pan. Sur le degré dynamique des transformations de Cremona du plan qui stabilisent une courbe irrationnelle non-elliptique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(7) :439–443, 2005.
- [85] I. Pan. *Communication personnelle*, 2007.
- [86] I. Pan. Sur le sous-groupe de décomposition d'une courbe irrationnelle dans le groupe de Cremona du plan. *Michigan Math. J.*, 55(2) :285–298, 2007.
- [87] I. Pan, F. Ronga, and T. Vust. Transformations birationnelles quadratiques de l'espace projectif complexe à trois dimensions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) :1153–1187, 2001.
- [88] K. Saito. On a generalization of de-Rham lemma. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 26(2) :vii, 165–170, 1976.
- [89] J. G. Semple and L. Roth. *Introduction to algebraic geometry*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985. Reprint of the 1949 original.
- [90] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire en anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

- [91] J.-P. Serre. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis. *Astérisque*, (332) :Exp. No. 1000, vii, 75–100, 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.
- [92] C. L. Siegel. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 43 :607–612, 1942.
- [93] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20 :250–270, 1972.
- [94] J.-C. Tougeron. *Idéaux de fonctions différentiables*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71.
- [95] E. B. Vinberg, V. V. Gorbatsevich, and O. V. Shvartsman. Discrete subgroups of Lie groups. In *Lie groups and Lie algebras, II*, volume 21 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–123, 217–223. Springer, Berlin, 2000.
- [96] A. Wiman. Zur theorie der endlichen gruppen von birationalen transformationen in der ebene. *Math. Ann.*, 4, 1987.
- [97] D. Wright. Abelian subgroups of  $\text{Aut}_k(k[X, Y])$  and applications to actions on the affine plane. *Illinois J. Math.*, 23(4) :579–634, 1979.
- [98] S.-W. Zhang. Distributions in algebraic dynamics. In *Surveys in differential geometry. Vol. X*, volume 10 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 381–430. Int. Press, Somerville, MA, 2006.
- [99] R. J. Zimmer. Kazhdan groups acting on compact manifolds. *Invent. Math.*, 75(3) :425–436, 1984.
- [100] R. J. Zimmer. On connection-preserving actions of discrete linear groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4) :639–644, 1986.
- [101] R. J. Zimmer. Actions of semisimple groups and discrete subgroups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 1247–1258, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.
- [102] R. J. Zimmer. Lattices in semisimple groups and invariant geometric structures on compact manifolds. In *Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984)*, volume 67 of *Progr. Math.*, pages 152–210. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.