J. reine angew. Math. **582** (2005), 229—231

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Berlin · New York 2005

Corrigendum à l'article

Symétries birationnelles des surfaces feuilletées

(J. reine angew. Math. **561** (2003), 199–235)

Par *Serge Cantat* à Rennes et *Charles Favre* à Paris

Au corollaire A.1 situé dans l'annexe de l'article [CF], nous avons listé les tores complexes de dimension 2 qui possèdent simultanément un groupe fini non-trivial G d'automorphismes et un automorphisme Anosov φ qui normalise $G : \varphi G \varphi^{-1} = G$. *Cette liste est incomplète* ; l'erreur réside à la fin de la première étape de la preuve du corollaire A.1. Cette erreur se répercute sur le corollaire 3.3 du même article mais n'influence pas les autres énoncés.

Nous allons décrire ici deux classes d'exemples de tores possédant un groupe de symétries d'ordre 5 et 10 respectivement, et un automorphisme Anosov commutant avec ce groupe. Nous montrerons ensuite que ces exemples sont les seuls à ajouter à la liste donnée aux corollaires 3.3 et A.1 de [CF].

Exemple 1. Soit ζ_5 une racine primitive 5-ième de l'unité. Le corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_5]$ possède deux plongements complexes non conjugués σ_1, σ_2 déterminés par $\sigma_1(\zeta_5) = \zeta_5$ et $\sigma_1(\zeta_5) = \zeta_5^2$. L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\zeta_5]$ coïncide avec $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ (voir [ST], p. 64), et son image par $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ définit un réseau. Le quotient de $\mathbb{C}^2$ par $\sigma(\mathbb{Z}[\zeta_5])$ est une variété abélienne que l'on notera T.

Toute unité η de $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ agit par multiplication $\eta.(z, w) := \big(\sigma_1(\eta)z, \sigma_2(\eta)w\big)$ sur $\mathbb{C}^2$, tout en préservant le réseau $\mathbb{Z}[\zeta_5]$, et induit donc un automorphisme de T. Le groupe des unités de $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ est isomorphe au produit du groupe G d'ordre 5 engendré par ζ_5 par le groupe monogène engendré par $\xi = 1 + \zeta_5$. Comme $\sigma_1(\xi)$ et $\sigma_2(\xi)$ ne sont pas de norme 1, ξ induit un automorphisme Anosov A sur T. Cet automorphisme commute avec le groupe fini d'automorphismes engendré par G. L'automorphisme A passe donc au quotient, et induit un automorphisme sur la désingularisée de T/G. On vérifie que cette surface est rationnelle.

On obtient une autre classe d'exemples en quotientant T par le groupe d'ordre 10 engendré par G et l'involution $-\mathrm{Id}$. Là encore, la surface obtenue est rationnelle. $\square$

Fixons deux racines de l'unité d'ordres respectifs 4 et 6:

$$i = \exp(i\pi/2), \quad j = \exp(i\pi/3).$$

L'énoncé correct, dont nous proposons une preuve ci-après, est le suivant.

Corollaire 1. *Soit T un tore complexe de dimension 2 muni d'un automorphisme Anosov φ et d'un groupe fini d'automorphismes G tel que $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1} = G$. Alors T/G est un tore, une surface de Kummer, ou une surface rationnelle. Si T/G est rationnelle, il s'agit d'un des trois cas suivants* :

(1) *La surface T/G est isomorphe au quotient de $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i])^2$ par le groupe d'ordre 4 engendré par l'homothétie de rapport i et φ est induit par l'action linéaire d'un élément de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[i])$ *sur* $\mathbb{C}^2$.

(2) *La surface T/G est isomorphe au quotient de $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[j])^2$ par le groupe d'ordre 6 (resp. 3) engendré par l'homothétie de rapport j (resp. j^2), et φ est induit par l'action linéaire d'un élément de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[j])$.

(3) *Le tore T est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}^2$ par le réseau Γ_5, obtenu en prenant l'image du plongement canonique de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_5]$. La surface T/G est le quotient de ce tore par le groupe d'ordre 5 (resp. 10) engendré par l'action d'une unité d'ordre 5 (resp. d'une unité d'ordre 10) de $\mathbb{Z}[\zeta_5]$. L'automorphisme φ est également induit par l'action d'une unité de $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ d'ordre infini.*

Remarque 1. On pourrait déduire ce résultat de [F] (voir aussi [BGL]), mais nous préférons présenter une preuve dans l'esprit de [CF].

Démonstration. Dans toute la suite, Γ est un réseau de $\mathbb{C}^2$, T est le tore $\mathbb{C}^2/\Gamma$, et M est une transformation $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^2$ qui est d'ordre fini m et préserve Γ.

En oubliant la structure complexe sur $\mathbb{C}^2$, nous pouvons supposer que Γ est le réseau $\mathbb{Z}^4$ de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. Le polynôme caractéristique de M est donc à coefficients entiers et de degré 4 ; si ϕ désigne la fonction d'Euler, $\phi(m)$ est donc compris entre 1 et 4. Lorsque $\phi(m)$ vaut 1, M est l'identité ; puisque ϕ ne prend jamais la valeur 3, nous obtenons $\phi(m) = 2$ ou 4. Le cas $\phi = 2$ a déjà été traité dans [CF] (corollaire A.1) et conduit aux cas des surfaces de Kummer ou aux deux premières classes d'exemples mentionnées ci-dessus. Notons de plus que dans ce cas, M est une homothétie.

Supposons maintenant que $\phi(m)$ est égal à 4. En particulier, m est égal à 5, 8, 10 ou 12. Notons ζ, ζ' les deux valeurs propres de M. Ce sont des racines de l'unité et l'une d'entre elles est primitive, soit ζ.

Si ζ' est égal à $\pm\zeta$ ou $\pm\bar{\zeta}$, l'ordre de M est égal à l'ordre de ζ ; ainsi ζ est d'ordre $m = 5, 8, 10$ ou 12 et, en particulier $\mathrm{Re}(\zeta)$ est irrationnel. D'autre part, $M + M^{-1}$ est conjuguée à $2\,\mathrm{Re}(\zeta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$. Comme $(M + M^{-1})^2 = 4\,\mathrm{Re}(\zeta)^2\,\mathrm{Id}$ préserve le réseau Γ, le nombre réel $\mathrm{Re}(\zeta)^2 = \cos^2(2i\pi/m) = 1/2\big(\cos(4i\pi/m) + 1\big)$ devrait être rationnel. Ceci n'est possible que si $m \in \{2, 4, 6\}$. Nous avons donc montré que ζ' n'appartient pas à $\{\pm\zeta, \pm\bar{\zeta}\}$.

Lorsque $m = 8$ (resp. $= 12$), la matrice M^2 est d'ordre 4 (resp. 6), et on a vu que M^2 était nécessairement une homothétie. Ceci contredit $\zeta' \notin \{\pm\zeta, \pm\bar{\zeta}\}$.

On a donc $m = 5$ ou $= 10$. La matrice M ne peut avoir de valeur propre égale à 1. Sinon M admettrait dans $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ deux plans invariants définis sur $\mathbb{Q}$, et induirait sur l'un d'entre eux un automorphisme d'ordre 5 ou 10, ce qui est impossible. L'argument précédent montre alors que M a deux valeurs propres primitives ζ et ζ' qui sont non conjuguées (on utilise le fait que $M^2 = -\mathrm{Id}$ lorsque $m = 10$).

Lorsque $m = 5$, le corps $\mathbb{Q}[M]$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[\zeta_5]$, et le réseau Γ est naturellement un $\mathbb{Z}[M]$-module. Il est nécessairement libre et de rang 1, car M n'admet pas de plan invariant défini sur $\mathbb{Q}$. Enfin, $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ est un anneau principal (voir [H], p. 593, ou [ST], p. 70), donc Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ (en tant que module). On en déduit l'existence d'un vecteur $e \in \Gamma \subset \mathbb{C}^2$ tel que $\Gamma = \mathbb{Z}[M] \cdot e$. Il existe alors un unique isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire Φ de $\mathbb{R}^4$ envoyant e sur $(1,1)$ et commutant avec M. Par construction, l'image de Γ par Φ est l'image de $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ par son plongement naturel dans $\mathbb{C}^2$. On vérifie que dans $\mathbb{C}^2$ on a $M - M^{-1} + M^2 - M^{-2} = r \times i\,\mathrm{Id}$ pour un réel r. Donc Φ commute avec $i\,\mathrm{Id}$, et préserve donc la structure complexe de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. On a donc montré qu'il existait un isomorphisme de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ envoyant Γ bijectivement sur l'image de $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ par son plongement naturel dans $\mathbb{C}^2$.

Lorsque $m = 10$, M^2 est d'ordre 5 donc le tore T est aussi isomorphe à $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}[\zeta_5]$.

Une fois que le tore T est déterminé, il est facile de conclure la preuve du corollaire. □

Remerciements. Nous tenons à remercier chaleureusement J. V. Pereira, à la fois nous avoir mentionné cette erreur et pour nous avoir signalé les références [F] et [BGL].

Références

[BGL] *Ch. Birkenhake*, *V. González-Aguilera*, et *H. Lange*, Automorphisms of 3-dimensional abelian varieties, Complex geometry of groups (Olmué 1998), Contemp. Math. **240** (1999), 25–47.

[CF] *S. Cantat* et *C. Favre*, Symétries birationnelles des surfaces feuilletées, J. reine angew. Math. **561** (2003), 199–235.

[F] *A. Fujiki*, Finite automorphism groups of complex tori of dimension two, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), no. 1, 1–97.

[H] *H. Hasse*, Number theory, Grundl. Math. Wiss. **229**, Springer-Verlag, Berlin-New York 1980.

[ST] *I. Stewart* et *D. David*, Algebraic number theory and Fermat's last theorem, A K Peters Ltd., 2002.

Département de Mathématiques, Université de Rennes, Rennes, France
e-mail: cantat@maths.univ-rennes1.fr

Département de Mathématiques, CNRS-Université de Paris VII, Paris, France
e-mail: favre@math.jussieu.fr

Eingegangen 1. Dezember 2004