

Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces

Par SERGE CANTAT

Résumé

Nous étudions les groupes de type fini agissant par transformations birationnelles sur les surfaces complexes compactes kählériennes. Nous montrons (a) que le groupe des transformations birationnelles d'une surface satisfait l'alternative de Tits, (b) que les actions birationnelles de groupes de Kazhdan sur les surfaces sont toutes birationnellement conjuguées à des actions homographiques sur le plan projectif et (c) que si f et g sont deux transformations birationnelles de surfaces qui commutent, alors ou bien f préserve un pinceau de courbes, ou bien l'un des itérés g^m de g , $m > 0$, coïncide avec un itéré f^n de f , $n \in \mathbf{Z}$.

Let S be any compact complex kähler surface and $\text{Bir}(S)$ the group of birational transformations of S . We study the structure of finitely generated subgroups of $\text{Bir}(S)$ and prove three main results : (a) $\text{Bir}(S)$ satisfies the Tits Alternative, (b) if a group with Kazhdan property (T) acts on a compact kähler surface by birational transformations, then the action is conjugate to an action by linear projective transformations on the projective plane, and (c) if f is an element of $\text{Bir}(S)$ which does not preserve any pencil of curves and if g commutes with f then a positive iterate of g coincides with an iterate of f . The second statement provides a positive answer to Zimmer's conjecture for birational actions on surfaces.

1. Introduction

1.1. *Transformations birationnelles.* Les transformations birationnelles d'une variété projective complexe M forment un groupe que nous noterons $\text{Bir}(M)$. Ces groupes se situent à mi-chemin entre les groupes linéaires et les groupes de difféomorphismes des variétés réelles compactes. Pour illustrer ce fait, considérons le cas où M est l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$.

- Une fois fixé un système de coordonnées homogènes, tout élément f de $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$ est déterminé par $k+1$ polynômes homogènes de même degré. Pour se donner un élément de $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$, il « suffit » donc de se donner l'ensemble fini des coefficients de ces polynômes.

- Si k est supérieur ou égal à 2, il existe des éléments de $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$ définis par des polynômes à coefficients réels qui induisent des difféomorphismes

analytiques de $\mathbb{P}^k(\mathbf{R})$ dont l'entropie topologique est strictement positive et dont la dynamique n'est pas uniformément hyperbolique (voir [59]).

- Pour tout $k \geq 2$, le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$ contient des groupes de type fini non linéaires. Par exemple, le groupe des automorphismes extérieurs du groupe libre F_n se plonge dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$ dès que k est suffisamment grand. Pourtant, $\text{Out}(F_n)$ n'est pas un groupe linéaire si $n \geq 4$ (voir [51], [34]).

Dans cet article, nous considérerons exclusivement le cas où la dimension de M est égale à 2. L'exemple principal qu'il faut donc garder à l'esprit est le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, encore appelé groupe de Cremona. Les résultats que nous obtiendrons concernent la structure algébrique des groupes de type fini pouvant agir fidèlement par transformations birationnelles sur les surfaces. Pour cela, nous importerons des idées issues de la théorie géométrique des groupes, notamment de la théorie des groupes hyperboliques de Gromov.

1.2. *Rang et groupe de Cremona.* Le rang (réel) d'un sous-groupe algébrique G de $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ est la dimension maximale d'un sous-groupe abélien de G diagonalisable sur \mathbf{R} . Par exemple, le rang de $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ est égal à $n - 1$ et celui de $\text{SO}(p, q)$ au minimum de p et de q . Le groupe de Cremona contient le groupe des automorphismes

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}(3, \mathbf{C}),$$

qui est de rang 2. Le premier but de ce texte est de montrer que les groupes de transformations birationnelles des surfaces se comportent comme des groupes linéaires de rang inférieur ou égal à 1, modulo l'exception fournie par $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$. Ce phénomène peut déjà être observé à l'aide du théorème d'Enriques et Demazure affirmant que toute action birationnelle « algébrique » du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ est conjuguée à une action par homographies (voir [18], [21] et [2]). Nous étendrons ce principe en étudiant les groupes de Kazhdan et les groupes abéliens dénombrables agissant birationnellement sur les surfaces.

Remarque 1.1. Par projection stéréographique, la quadrique $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est birationnelle au plan projectif. Son groupe d'automorphismes se plonge donc dans le groupe de Cremona ; en particulier, le groupe

$$\text{PGL}(2, \mathbf{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbf{C})$$

est de rang 2 et se plonge dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Toutefois, ce groupe n'est pas un groupe de Lie simple, et ne jouera donc pas un rôle aussi important que $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ dans ce texte.

1.3. *Groupes de Kazhdan et espace de Picard-Manin.* Un groupe dénombrable Γ a la propriété (T) de Kazhdan si toute action de Γ par isométries affines sur un espace de Hilbert possède un point fixe ; l'exemple le plus simple

de groupe de Kazhdan infini est sans doute le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$, pour $n \geq 3$. Le théorème suivant étend un énoncé de Déserti valable pour les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$.

THÉORÈME A. *Soit S une surface kählérienne compacte. Soit Γ un groupe infini dénombrable de transformations birationnelles de S . Si Γ a la propriété (T) de Kazhdan, il existe une application birationnelle $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ qui conjugue Γ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.*

Les groupes de Lie réels, connexes et simples de rang réel supérieur ou égal à 2 et leurs réseaux satisfont la propriété (T) (voir [41]). Cet énoncé confirme donc l'affirmation du [paragraphe 1.2](#) concernant le « rang » de $\mathrm{Bir}(S)$. Il soutient aussi une conjecture célèbre de Zimmer suivant laquelle un réseau d'un groupe de Lie réel, connexe, simple et de rang supérieur strictement à d ne peut agir fidèlement sur une variété compacte de dimension d : le théorème A démontre cette conjecture pour les actions birationnelles en dimension $d = 2$ (voir le §4.3).

Lorsque la surface S n'est pas rationnelle, le théorème A affirme que tout morphisme d'un groupe de Kazhdan vers $\mathrm{Bir}(S)$ a une image finie. C'est la partie facile, le cas difficile correspondant aux sous-groupes de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. La preuve que nous exposerons utilise une version asymptotique du théorème de l'indice de Hodge : nous verrons en effet que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ se plonge dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(1, \infty)$ des isométries d'un espace de Hilbert pour un produit hilbertien de signature $(1, \infty)$. Cet espace, introduit par Manin dans son étude des surfaces cubiques, est la limite inductive des groupes de Picard des surfaces obtenues en éclatant successivement tous les points (même infiniment proches) du plan projectif : cet « espace de Picard-Manin » jouera un rôle central tout au long du texte.

L'idée d'éclater le plan indéfiniment pour lever simultanément toutes les indéterminations d'une application rationnelle et de ses itérés a déjà été utilisée pour comprendre, entre autre, la dynamique des transformations polynomiales du plan affine ou la croissance des degrés des itérés de transformations rationnelles non inversibles. Nous renvoyons le lecteur à [42] et [43], à [33] et au travail récent de Boucksom, Favre et Jonsson (voir [7]).

1.4. *Dynamique, centralisateur et rang du groupe de Cremona.* Si G est un groupe et f est un élément de G , le centralisateur de f dans G est le sous-groupe de G défini par $\mathrm{Cent}(f, G) = \{g \in G \mid f \circ g = g \circ f\}$.

Soient S une surface complexe compacte kählérienne et f une transformation rationnelle de S . L'application f détermine un opérateur linéaire f^* sur les groupes de cohomologie de S , qui préserve la décomposition de Hodge. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace des endomorphismes de $H^{1,1}(S, \mathbf{R})$. Le (premier)

degré dynamique $\lambda(f)$ est alors défini par

$$\lambda(f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\| (f^n)^* \|^{1/n} \right).$$

Ce nombre réel positif est un nombre algébrique invariant par conjugaison birationnelle (voir [24]). Les applications birationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ déterminées par des polynômes homogènes de degré d fixé forment une variété algébrique $\text{Bir}_d(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$; en dehors d'un fermé de Zariski de codimension 1 dans $\text{Bir}_d(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, le degré dynamique $\lambda(f)$ est égal à d . Ainsi, le degré dynamique d'un élément générique de $\text{Bir}_d(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ est égal à d (cf. [exemple 2.1](#)).

THÉORÈME B. *Soit f une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte S dont le degré dynamique $\lambda(f)$ est strictement plus grand que 1. Si g est une transformation birationnelle de S qui commute avec f il existe deux entiers $m \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que g^m est égal à f^n .*

Dans $\text{SL}(r+1, \mathbf{C})$, le centralisateur d'un élément générique est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^r$. Le [théorème B](#) suggère donc que $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ se comporte comme un groupe de Lie de rang 1. Nous présenterons deux preuves du [théorème B](#), l'une de nature arithmétique utilisant l'espace de Picard-Manin (§5.1), l'autre de nature dynamique (§8). Dans la plupart des cas, nous montrerons en fait que le groupe cyclique engendré par f est d'indice fini dans $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$.

1.5. *Alternative de Tits.* Un groupe G satisfait l'alternative de Tits lorsque tout sous-groupe de type fini de G , contient un groupe libre non abélien ou un sous-groupe résoluble d'indice fini. Cette alternative a été établie par Tits pour les groupes linéaires $\text{GL}(n, \mathbf{k})$, où \mathbf{k} est n'importe quel corps, mais n'est pas valable pour les groupes de difféomorphismes des variétés réelles de dimension strictement positive (voir [36]). Le théorème suivant rapproche donc les groupes de transformations birationnelles des groupes linéaires et les écarte un peu des groupes de difféomorphismes. Il étend un résultat de Lamy concernant les automorphismes polynomiaux de \mathbf{C}^2 (voir [48]).

THÉORÈME C. *Si X est une variété complexe, compacte et kählérienne de dimension inférieure ou égale à 2, le groupe $\text{Bir}(X)$ vérifie l'alternative de Tits.*

Les groupes d'automorphismes des variétés complexes compactes kählériennes vérifient également l'alternative de Tits, quelque soit la dimension de la variété (voir le [théorème 6.3](#) et [57]). Il serait intéressant d'étendre ce résultat à $\text{Bir}(M)$ lorsque $\dim_{\mathbf{C}}(M)$ est supérieure ou égale à 3. Ceci permettrait d'étendre l'alternative de Tits à tous les groupes non linéaires qui agissent birationnellement sur une variété kählérienne compacte, fournissant ainsi une preuve unifiée de l'alternative de Tits pour une nouvelle classe de groupes, incluant les groupes modulaires $\text{Mod}(g)$ des surfaces Riemann de genre g et les groupes $\text{Out}(F_m)$ mentionnés au [paragraphe 1.1](#) (voir [51], [1], et [45], [6]).

Nous compléterons ces résultats au [paragraphe 7](#) par une description des groupes de type finis dont tous les éléments sont d'ordre fini et de ceux qui sont résolubles et sans torsion.

1.6. *Remerciements.* Merci à J. Déserti pour avoir partagé ses connaissances sur le groupe de Cremona, à F. Paulin pour m'avoir expliqué certains arguments de ping-pong dans les espaces hyperboliques, et à P. Autissier, D. Cerveau, R. Dujardin et M. Jonsson pour de nombreuses discussions sur ce sujet. Un merci tout particulier à C. Favre ; ses remarques et suggestions ont contribué à modifier profondément ce texte, notamment aux [paragrapes 5.1 et 6.5](#).

2. Transformations birationnelles et degré dynamique

Cette partie concerne la dynamique des transformations birationnelles des surfaces complexes compactes kählériennes. Nous y résumons des travaux de Diller, Favre et Gizatullin.

2.1. *Indéterminations et ensemble exceptionnel.* Soit f une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte. Les points d'indétermination de f forment un ensemble fini qui sera noté $\text{Ind}(f)$. Les courbes contractées par f sont aussi en nombre fini, et leur union sera notée $\text{Exc}(f)$, pour « ensemble exceptionnel » ; $\text{Exc}(f)$ coïncide avec le lieu critique de f .

2.2. *Degré dynamique et stabilité algébrique.* Le (premier) degré dynamique $\lambda(f)$ d'une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne S a été défini au [paragraphe 1.4](#). C'est un invariant de conjugaison birationnelle.

Exemple 2.1. Soit f une transformation birationnelle du plan projectif. L'action de f sur $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est la multiplication par un entier $\text{deg}(f)$; une fois fixé des coordonnées homogènes, $\text{deg}(f)$ est le degré des polynômes homogènes sans facteur commun définissant f . Le degré dynamique de f coïncide alors avec la limite supérieure de $\text{deg}(f^n)^{1/n}$. En particulier, si $\text{deg}(f^n) = \text{deg}(f)^n$ pour tout n , alors $\lambda(f) = \text{deg}(f)$ et le premier degré dynamique de f est un entier.

Pour l'involution de Cremona standard, définie par $\sigma[x : y : z] = [yz : zx : xy]$, les degrés $\text{deg}(\sigma^n)$ valent 1 ou 2 suivant que n est pair ou impair, si bien que $\lambda(\sigma) = 1$.

Soit E la courbe elliptique $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[j]$ où j est une racine primitive cubique de l'unité. La transformation linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

agit linéairement sur \mathbf{C}^2 en préservant le réseau $\mathbf{Z}[j] \times \mathbf{Z}[j]$ et passe donc au quotient en un automorphisme f_A de $E \times E$ satisfaisant $\lambda(f_A) = (7 + 3\sqrt{5})/2$

(voir [13]). Puisque cette transformation commute à $\eta(x, y) = (jx, jy)$, elle passe au quotient en un automorphisme g_A de même degré dynamique sur la surface $S = (E \times E)/\eta$. Il se trouve que cette surface est rationnelle : l'automorphisme g_A est donc conjugué à une transformation birationnelle du plan projectif dont le degré dynamique est égal à $\lambda(f_A)$ et n'est donc pas un entier.

Ces exemples montrent que l'action d'une transformation birationnelle f sur la cohomologie d'une surface complexe S ne satisfait pas toujours $(f^n)^* = (f^*)^n$. En particulier, l'application de $\text{Bir}(S)$ vers $\text{End}(H^*(S, \mathbf{Z}))$ qui à f associe f^* n'est pas un morphisme.

Lorsque $(f^*)^n = (f^n)^*$ pour tout entier n , on dit que f est « algébriquement stable ». Ceci équivaut à dire que l'orbite positive de $\text{Ind}(f^{-1})$ ne rencontre pas $\text{Ind}(f)$. Dans [24], Diller et Favre ont montré que toute transformation birationnelle f d'une surface compacte S est conjuguée à une transformation birationnelle algébriquement stable : *il existe un morphisme birationnel $\pi : S' \rightarrow S$ tel que $\pi^{-1} \circ f \circ \pi$ soit une transformation algébriquement stable de S' .*

2.3. Croissance des degrés et classification grossière. D'après les travaux de Gizatullin, puis de Diller et Favre, il y a quatre types de transformations birationnelles, liés à quatre comportements asymptotiques possibles pour la suite $\|(f^n)^*\|$ (voir [24], [38], [10]).

- *Normes bornées.* - Lorsque $\|(f^n)^*\|$ est une suite bornée, il existe un entier $l > 0$ et une application birationnelle $\varphi : S' \dashrightarrow S$ tels que $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$ soit un automorphisme de S' isotope à l'identité. En d'autres termes, $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$ est un élément de la composante connexe de l'identité $\text{Aut}^0(S')$ dans le groupe de Lie complexe $\text{Aut}(S')$.

- *Croissance linéaire.* - Lorsque $\|(f^n)^*\|$ croît linéairement avec n , il existe une application birationnelle $\varphi : S' \dashrightarrow S$ et une fibration de S' par courbes rationnelles telles que $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$ préserve cette fibration.

- *Croissance quadratique.* - Lorsque $\|(f^n)^*\|$ croît quadratiquement avec n , il existe une application birationnelle $\varphi : S' \dashrightarrow S$ et une fibration de S' par courbes elliptiques telle que $\varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi$ soit un automorphisme de S' préservant la fibration.

- *Croissance exponentielle.* - La suite $\|(f^n)^*\|$ tend exponentiellement vite vers l'infini. En ce cas, $\lambda(f)$ est strictement plus grand que 1 ; c'est un nombre de Salem ou de Pisot (voir [24]).

Exemple 2.2. L'involution de Cremona standard σ (voir l'exemple 2.1) devient un automorphisme d'ordre 2 si l'on éclate les trois sommets du triangle d'équation $xyz = 0$.

Remarque 2.3. Lorsque la croissance est linéaire ou quadratique, les fibrations fournies sont les seuls feuilletages algébriques invariants par f (voir [15]). En particulier, ce sont les seules fibrations invariantes.

Il est fructueux de comparer cette classification à celle de Nielsen et Thurston pour les éléments du groupe modulaire d'une surface réelle compacte. Si la croissance des normes est linéaire ou quadratique, la transformation f ressemble à un « twist de Dehn » : f préserve une fibration et effectue un twist le long de cette fibration ; ce twist explique simultanément l'absence de feuilletage invariant distinct de la fibration et la croissance des normes (voir [15]).

Si la croissance des normes est exponentielle, f ressemble au niveau cohomologique à une transformation de type pseudo-Anosov. Dans ce cas, le rôle joué par les feuilletages mesurés dans la théorie de Nielsen-Thurston est remplacé par celui des courants positifs fermés f -invariants (voir [10], [24] et [15]). Au niveau dynamique, on sait que le nombre de points périodiques de f de période N croît comme $\lambda(f)^N$ et l'on s'attend à ce que f ait une entropie topologique positive (voir [24], [28] et le §8). Avec cette analogie entre $\text{Bir}(S)$ et le groupe modulaire (ou mapping class group) $\text{Mod}(g)$ d'une surface réelle orientable compacte de genre g , le **théorème B** peut être comparé au fait qu'un élément pseudo-Anosov de $\text{Mod}(g)$ a un centralisateur virtuellement cyclique (voir [45]).

Définition 2.4. Soit f une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne. Nous dirons que f est

- (1) *virtuellement isotope à l'identité* si la suite $\|(f^n)^*\|$ est bornée,
- (2) *un twist de De Jonquières* si la suite $\|(f^n)^*\|$ croît linéairement,
- (3) *un twist de Halphen* si la suite $\|(f^n)^*\|$ évolue quadratiquement,
- (4) *entropique* si $\lambda(f)$ est strictement plus grand que 1.

Ce vocabulaire est justifié par l'analogie avec les groupes modulaires et les remarques suivantes : le groupe de De Jonquières est le groupe des transformations birationnelles du plan préservant un pinceau de courbes rationnelles ; il ne dépend du pinceau que par conjugaison au sein du groupe de Cremona (voir [18] et le §6.4). De même, les pinceaux de courbes de genre 1 du plan $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ ont été classés par Halphen : tout tel pinceau est conjugué à l'un des pinceaux d'Halphen (voir [18], et [26] ou [44]).

3. Espace de Picard-Manin

Dans cette partie nous présentons une construction due à Manin. Il s'agit de décrire la limite inductive des groupes de Néron-Severi, ou de Picard, des surfaces obtenues en éclatant ad vitam aeternam tous les points d'une surface S , puis de montrer que $\text{Bir}(S)$ agit linéairement sur ce groupe limite ; pour cela nous suivons le chapitre cinq du livre [52]. L'espace introduit peut être pensé

comme le groupe de Néron-Severi (ou de Picard) de l'espace de Riemann-Zariski de S (voir [42] et [7]). Cette construction permettra de reprendre la classification de Diller, Favre et Gizatullin vue au §2.3.

3.1. *Groupes de Picard et morphismes birationnels.* Soit S une surface complexe compacte kählérienne. Nous noterons $\text{Pic}(S)$ le groupe de Picard de S , $\text{NS}(S)$ son groupe de Néron-Severi et $\text{Pic}^0(S)$ le noyau du morphisme $\text{Pic}(S) \rightarrow \text{NS}(S)$ qui associe à un fibré en droite L sa classe de Chern $c_1(L)$. Lorsque $\text{Pic}^0(S)$ est trivial, $\text{Pic}(S)$ est isomorphe à $\text{NS}(S)$, ce qui nous permettra d'identifier ces deux groupes. Nous noterons $\rho(S)$ la dimension de $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$, que nous appellerons *nombre de Picard* de S . Le groupe de Néron-Severi et, par suite, le groupe de Picard sont munis d'une forme d'intersection notée $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Lorsque S est projective, le théorème de l'indice de Hodge montre que cette forme quadratique est une forme non dégénérée de type hyperbolique : sa signature est égale à $(1, \rho(S) - 1)$. Le cône nef, ou « numériquement effectif », est le cône convexe engendré par les classes des fibrés en droites nef (voir [49, Ch. 1]). Nous le noterons $\text{NS}^+(S)$ ou $\text{Pic}^+(S)$ si $\text{NS}(S)$ et $\text{Pic}(S)$ coïncident.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces et $\varepsilon : S_1 \rightarrow S_2$ un morphisme birationnel. Nous noterons ε^* et ε_* les morphismes induits par ε au niveau des groupes de Picard (resp. de Néron-Severi). Le morphisme ε^* est injectif et préserve le cône nef :

$$\varepsilon^*(\text{NS}^+(S_2)) \subset \text{NS}^+(S_1).$$

Il préserve aussi le produit d'intersection : si l et l' sont deux éléments de $\text{Pic}(S_1)$, alors $\langle \varepsilon^*l | \varepsilon^*l' \rangle = \langle l | l' \rangle$ où les intersections sont calculées respectivement dans $\text{NS}(S_2)$ et $\text{NS}(S_1)$.

3.2. *Limite inductive et action de $\text{Bir}(S)$.* Fixons une surface complexe compacte kählérienne S . Suivant [52], considérons la catégorie $\mathcal{B}(S)$ dont les objets sont les morphismes birationnels $\varepsilon : S' \rightarrow S$; un morphisme entre deux objets $\varepsilon_1 : S'_1 \rightarrow S$ et $\varepsilon_2 : S'_2 \rightarrow S$ de cette catégorie est un morphisme birationnel $m : S'_1 \rightarrow S'_2$ tel que $\varepsilon_2 \circ m = \varepsilon_1$. Ainsi, l'ensemble des morphismes entre deux objets est vide ou réduit à un unique élément.

L'ensemble des objets de cette catégorie est ordonné de la manière suivante : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ s'il existe un morphisme de ε_1 vers ε_2 ; on dira alors que ε_1 (resp. S'_1) domine ε_2 (resp. S'_2). Géométriquement, ceci correspond à dire que ε_1^{-1} éclate les mêmes points que ε_2^{-1} plus éventuellement quelques autres. Si ε_1 et ε_2 sont deux objets de $\mathcal{B}(S)$ il en existe toujours un troisième qui les domine simultanément. Suivant [52], nous poserons alors

$$\mathbf{Z}(S) = \varinjlim (\text{NS}(S'))$$

où la limite inductive est prise suivant les morphismes injectifs ε^* . Le groupe $Z(S)$ sera appelé *groupe (ou espace) de Picard-Manin de S* . Les structures invariantes par les morphismes ε^* passent à la limite et $Z(S)$ est donc muni

- (i) d'une forme d'intersection $\langle \cdot | \cdot \rangle : Z(S) \times Z(S) \rightarrow \mathbf{Z}$,
- (ii) d'un cône nef $Z^+(S) = \lim_{\rightarrow} (\mathbf{NS}^+(S))$,
- (iii) d'une classe canonique, vue comme une forme linéaire $\Omega : Z(S) \rightarrow \mathbf{Z}$.

Chaque groupe $\mathbf{NS}(S')$, où S' domine S , s'injecte dans $Z(S)$; nous identifierons régulièrement $\mathbf{NS}(S')$ à son image dans $Z(S)$.

Le groupe des transformations birationnelles de S agit sur $Z(S)$ de la manière suivante. Soient S_1 et S_2 deux surfaces et $f : S_1 \dashrightarrow S_2$ une transformation birationnelle. Nous pouvons lever les indéterminations de f à l'aide de deux morphismes birationnels $g : S' \rightarrow S_1$ et $h : S' \rightarrow S_2$, de sorte que $f = h \circ g^{-1}$. Par composition, g injecte $\mathcal{B}(S')$ dans $\mathcal{B}(S_1)$ et h injecte $\mathcal{B}(S')$ dans $\mathcal{B}(S_2)$. Tout objet de $\mathcal{B}(S_1)$ (resp. $\mathcal{B}(S_2)$) étant dominé par un objet de $g_*(\mathcal{B}(S'))$ (resp. $h_*(\mathcal{B}(S'))$), ceci induit deux isomorphismes g_* et h_* de $Z(S')$ vers $Z(S_1)$ et $Z(S_2)$. On pose alors $f_* = h_* \circ (g_*)^{-1}$.

THÉORÈME 3.1 (Manin, [52, p. 194]). *L'application $f \mapsto f_*$ détermine un morphisme de groupe injectif de $\text{Bir}(S)$ vers $\text{GL}(Z(S))$. Si f appartient à $\text{Bir}(S)$, l'application linéaire f_* préserve la forme d'intersection $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et le cône nef.*

3.3. Base de l'espace de Picard-Manin et complétion hilbertienne.

3.3.1. *Éclatements, base et intersection.* Notons $\text{Eclat}(S)$ l'espace obtenu en recollant tous les éclatés de S . Plus précisément, $\text{Eclat}(S)$ est l'union des surfaces S' munies d'un morphisme birationnel $\varepsilon : S' \rightarrow S$, modulo la relation d'équivalence qui identifie deux points $x_1 \in S'_1$ et $x_2 \in S'_2$ lorsque la transformation birationnelle $(\varepsilon_2)^{-1} \circ \varepsilon_1$ est un isomorphisme local d'un voisinage de x_1 sur un voisinage de x_2 . Un point de $\text{Eclat}(S)$ correspond donc à un point de S , ou un point situé sur le diviseur exceptionnel d'un éclatement de S , etc. Toute surface S' qui domine S se plonge donc dans $\text{Eclat}(S)$. Nous noterons $\text{Ec}(S)$ le groupe abélien libre engendré par les points de $\text{Eclat}(S)$. On munit $\text{Ec}(S)$ du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ défini par

$$\langle x | x \rangle_E = -1 \text{ et } \langle x | y \rangle_E = 0$$

si x est distinct de y .

Nous pouvons maintenant plonger le groupe abélien libre $\text{Ec}(S)$ dans $Z(S)$ de la manière suivante. Soit \bar{x} un élément de $\text{Eclat}(S)$. Il existe une surface S' , un morphisme birationnel $\varepsilon : S' \rightarrow S$ et un point x de S' tel que la classe $\bar{x} \in \text{Eclat}(S)$ soit représentée par le point x . Soit S'' la surface obtenue en éclatant S' au point x . Soient D_x le diviseur exceptionnel de cet éclatement et

$\varepsilon' : S'' \rightarrow S'$ le morphisme birationnel obtenu en contractant D_x . La composition de ε et ε' détermine un morphisme birationnel de S'' sur S et le fibré en droites (ou faisceau inversible) $\mathcal{O}(D_x)$ détermine un élément de $\text{NS}(S'')$, donc de $\text{Z}(S)$. Si l'on change de représentant (S', x, ε) pour le point \bar{x} de $\text{Eclat}(S)$ on ne change pas l'élément de $\text{Z}(S)$ ainsi déterminé.

Dans la suite, nous noterons e_x le point de $\text{Z}(S)$ associé à l'élément x de $\text{Eclat}(S)$: e_x est donc la classe du diviseur exceptionnel D_x . Ceci détermine l'image de la base de $\text{Ec}(S)$ dans $\text{Z}(S)$, d'où un morphisme

$$\begin{cases} \text{Ec}(S) & \rightarrow & \text{Z}(S) \\ \sum a(x)x & \mapsto & \sum a(x)e_x. \end{cases}$$

Considérons maintenant le morphisme de groupes abéliens

$$\text{NS}(S) \times \text{Ec}(S) \rightarrow \text{Z}(S)$$

obtenu en prenant l'injection canonique de $\text{NS}(S)$ dans $\text{Z}(S)$ et le morphisme $\text{Ec}(S) \rightarrow \text{Z}(S)$ défini ci-dessus.

PROPOSITION 3.2 ([52, p. 197]). *Le morphisme $\text{NS}(S) \times \text{Ec}(S) \rightarrow \text{Z}(S)$ ainsi défini détermine une isométrie de la somme directe orthogonale de $\text{NS}(S)$ (muni de sa forme d'intersection) et de $\text{Ec}(S)$ (muni du produit $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$) vers $\text{Z}(S)$ (muni du produit d'intersection $\langle \cdot | \cdot \rangle$).*

Exemple 3.3. Soit p un point du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. Soient X la surface obtenue par éclatement de p et D_p le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Soit q un point de D_p . Soient Y la surface obtenue en éclatant q et D_q le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Les deux éléments e_p et e_q appartiennent à l'image de $\text{NS}(Y)$ dans $\text{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Notons D_p^* la transformée stricte de D_p dans Y . Alors e_p correspond à $D_p^* + D_q$ et e_q à D_q (ou plutôt aux classes de Chern des fibrés en droites $\mathcal{O}(D_p^* + D_q)$ et $\mathcal{O}(D_q)$). Nous avons donc bien

$$\begin{aligned} \langle e_p | e_q \rangle &= (D_p^* \cdot D_q) + (D_q)^2 = 1 - 1 = 0, \\ \langle e_p | e_p \rangle &= (D_p^*)^2 + (D_q)^2 + 2 = -2 - 1 + 2 = -1. \end{aligned}$$

3.3.2. Complétion hilbertienne. Par la suite, nous considérerons la complétion hilbertienne $\mathcal{E}(S)$ de

$$\text{Ec}(S) \otimes \mathbf{R}$$

pour le produit scalaire $-\langle \cdot | \cdot \rangle_E$. Le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ s'étend alors en un produit hilbertien défini négatif sur $\mathcal{E}(S)$. Nous noterons $\mathcal{Z}(S)$ la somme directe orthogonale de $\text{NS}(S)$, qui est de dimension finie, et de $\mathcal{E}(S)$. Puisque $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ est définie négative et que la forme d'intersection sur $\text{NS}(S)$ est de signature $(1, \rho(S) - 1)$, l'espace $\mathcal{Z}(S)$ est muni d'une forme d'intersection de signature $(1, \infty)$. Cette construction ne dépend pas du choix de la surface S dans sa classe d'équivalence birationnelle : si S' est birationnelle à S , il existe une surface S'' munie de deux morphismes birationnels $\varepsilon : S'' \rightarrow S$ et $\varepsilon' : S'' \rightarrow S'$;

on remarque alors que $\text{Ec}(S'')$ détermine simultanément un sous-espace de codimension finie dans $\text{Ec}(S)$ et dans $\text{Ec}(S')$, donc les complétions obtenues à partir de $\text{Ec}(S)$ et $\text{Ec}(S')$ coïncident avec celle issue de $\text{Ec}(S'')$.

Le cône nef de $\mathcal{Z}(S)$ sera noté $\mathcal{Z}^+(S)$, la forme d'intersection sera toujours notée $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Remarque 3.4. Si Γ est un sous-groupe de type fini dans $\text{Bir}(S)$, on pourra se contenter de n'éclater que les points d'indétermination (parfois infiniment proches) des éléments de Γ . En ce cas, $\mathcal{E}(S)$ est à base dénombrable. Nous n'aurons donc besoin que d'espaces de Hilbert séparables dans la suite.

Remarque 3.5. Soit $g : S \dashrightarrow S$ une transformation birationnelle virtuellement isotope à l'identité. Conjuguons g à un automorphisme (encore noté g) d'une surface S' (voir le §2.3). Alors g induit une isométrie d'ordre fini de $\text{NS}(S')$ pour la forme d'intersection et la transformation g_* de $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(S')$ préserve la somme directe orthogonale $\mathcal{Z}(S') = \text{NS}(S') \oplus \text{Ec}(S')$. Si e_x est un élément de $\text{Ec}(S')$, l'image de e_x par g_* est le point $e_{g(x)}$ où $g(x)$ est défini comme suit : si x est un point de S' , alors $g(x)$ est l'image de x par g , si x est situé sur le diviseur exceptionnel D_p obtenu en éclatant S' en un point p , alors on éclate $g(p)$, on relève g en un difféomorphisme local d'un voisinage de D_p sur un voisinage de $D_{g(p)}$ et on prend l'image de x par ce difféomorphisme, et ainsi de suite. En particulier, g_* détermine un opérateur borné de $\mathcal{Z}(S)$.

D'après le théorème de Noether, le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ est engendré par des transformations virtuellement isotopes à l'identité, à savoir $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ et l'involution de Cremona σ (voir les exemples 2.1 et 2.2). Chaque transformation crémonnienne plane agit donc continûment sur $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Cette propriété peut être démontrée directement pour toutes les surfaces complexes compactes kählériennes car $\text{Bir}(S)$ agit par isométries pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (voir [7]); nous n'en ferons pas usage pour les surfaces irrationnelles.

3.4. *L'espace hyperbolique de dimension infinie.* L'hyperboloïde constitué des points x de $\mathcal{Z}(S)$ satisfaisant $\langle x | x \rangle = 1$ comporte deux nappes, et une seule d'entre elles intersecte le cône nef $\mathcal{Z}^+(S)$. Nous noterons $\mathbb{H}^\infty(S)$ (ou plus simplement \mathbb{H}^∞) cette nappe et la munirons de la métrique définie par

$$\cosh(\text{dist}(x, y)) = \langle x | y \rangle.$$

Il s'agit d'un modèle de « l'espace hyperbolique de dimension infinie ». Le groupe de ses isométries sera noté $\text{Isom}(\mathbb{H}^\infty)$ ou $\text{O}(1, \infty)$ (voir [40, §6]). L'espace \mathbb{H}^∞ est un espace $\text{CAT}(-1)$ complet et est donc hyperbolique au sens de Gromov (voir [37]).

L'action de $\text{Bir}(S)$ sur $\mathcal{Z}(S)$ préserve la structure entière de $\mathcal{Z}(S)$, le cône nef et la forme d'intersection. Préservant le cône nef, $\text{Bir}(S)$ agit isométriquement sur l'espace hyperbolique de dimension infinie $\mathbb{H}^\infty(S)$. Nous obtenons ainsi un plongement $\text{Bir}(S) \hookrightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^\infty(S))$.

3.5. *Classification des transformations crémonniennes planes.* Puisque l'espace \mathbb{H}^∞ est un espace métrique $\text{cat}(-1)$ complet, ses isométries sont de trois types : elliptique, parabolique ou hyperbolique (voir [37], ou [8, p. 228 et suivantes]). Dans le cas précis d'un espace hyperbolique, nous pouvons caractériser ces trois types d'isométries de la façon suivante.

• *Isométrie elliptique.* Il existe un élément l de $\mathcal{Z}(S)$ tel que $f_*(l) = l$ et $\langle l|l \rangle > 0$. En ce cas, f_* est une rotation autour de l et l'orbite de tout vecteur x de $\mathcal{Z}(S)$ (resp. de tout point x de \mathbb{H}^∞) est bornée.

• *Isométrie parabolique.* Dans ce cas f n'est pas elliptique mais il existe un élément non nul l de $\mathcal{Z}^+(S)$ tel que $f(l) = l$. Le vecteur l appartient au cône de lumière de la forme d'intersection, i.e. $\langle l|l \rangle = 0$, et $\mathbf{R}l$ est l'unique droite invariante par f_* qui intersecte $\mathcal{Z}^+(S)$. Si x appartient à $\mathcal{Z}^+(S)$, la suite de droites $(f_*)^n(\mathbf{R}x)$ tend vers $\mathbf{R}l$ lorsque n tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

• *Isométrie hyperbolique.* Il existe un nombre réel $\lambda > 1$ et deux éléments l_+ et l_- du cône de lumière de $\mathcal{Z}(S)$ tels que $f_*(l_+) = \lambda l_+$ et $f_*(l_-) = (1/\lambda)l_-$. Si x est un point de $\mathcal{Z}^+(S)$ n'appartenant pas à la droite $\mathbf{R}l_-$, la suite $(1/\lambda)^n f_*^n(x)$ tend vers un vecteur non nul de $\mathbf{R}l_+$ (un énoncé analogue vaut pour l_- et f^{-1}).

Cette classification est moins fine que celle du [paragraphe 2.3](#). Les deux sont liées par le théorème suivant (voir la [définition 2.4](#)).

THÉORÈME 3.6. *Soit f une transformation birationnelle d'une surface projective complexe. Soit f_* l'action induite par f sur $\mathcal{Z}(S)$.*

- (i) f_* est elliptique si, et seulement si f est virtuellement isotope à l'identité ;
- (ii) f_* est parabolique si, et seulement si f est un twist de De Jonquières ou d'Halphen ;
- (iii) f_* est hyperbolique si, et seulement si f est une transformation birationnelle entropique.

Démonstration. Rappelons que f est entropique si et seulement si son (premier) degré dynamique satisfait l'inégalité $\lambda(f) > 1$. D'après [7], il existe alors un vecteur non nul ξ du cône nef $\mathcal{Z}^+(S)$ tel que $f_*\xi = \lambda(f)\xi$. En particulier, f_* est hyperbolique si et seulement si $\lambda(f)$ est strictement supérieur à 1, si et seulement si f est entropique.

Soit f une transformation birationnelle virtuellement isotope à l'identité. Nous pouvons donc conjuguer f à un automorphisme $f' : S' \rightarrow S'$ à l'aide d'une application birationnelle $h : S' \dashrightarrow S$. L'isométrie $(f')_*$ de $\text{NS}(S')$ est d'ordre fini et préserve donc un fibré en droites ample $l \in \text{NS}(S')$. L'image de l dans $\mathcal{Z}(S)$ par l'injection canonique de $\text{NS}(S')$ dans $\mathcal{Z}(S)$ est un point fixe de f_* d'auto-intersection strictement positive. Donc f_* est une isométrie elliptique. Réciproquement, si f est une transformation birationnelle de S telle

que f_* soit elliptique, et si l est une classe nef, la suite $\langle l|(f_*)^n l \rangle$ est bornée. Il en résulte que la suite des normes de $(f^n)_* : \mathbf{NS}(S) \rightarrow \mathbf{NS}(S)$ est bornée (voir [7, preuve du théorème 3.2]). D'après le [paragraphe 2.3](#), on sait alors que f est virtuellement isotope à l'identité.

Les points (i) et (iii) étant établis, le point (ii) en résulte. Précisons toutefois que, lorsque f est un twist de Halphen ou de De Jonquières, l'unique fibration f -invariante détermine un élément du cône de lumière de $\mathcal{Z}(S)$ qui est préservé par f_* : c'est l'unique point fixe de l'isométrie f_* sur l'union de $\mathbb{H}^\infty(S)$ et de son bord. □

Remarque 3.7. Soient l un élément de $\mathcal{Z}^+(S)$, f un élément de $\text{Bir}(S)$ et α un nombre complexe tel que $f_*(l) = \alpha l$. Alors α est égal à $\lambda(f)$ ou $\lambda(f)^{-1}$; il est donc égal à 1 si et seulement si f est elliptique ou parabolique. Lorsque f est parabolique, l correspond à l'unique point fixe de f_* au bord de l'espace $\mathbb{H}^\infty(S)$; un multiple positif de l coïncide donc avec la classe de l'unique fibration, f -invariante.

3.6. Stabilisateur d'un point.

PROPOSITION 3.8. *Soit $f : S' \dashrightarrow S$ une transformation birationnelle entre deux surfaces. Soient l' un élément de $\mathbf{NS}(S') \otimes \mathbf{R}$ et l un élément de $\mathbf{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$ tels que (i) $f_*(l') = l$ et (ii) l soit une classe ample. Alors f est un morphisme birationnel.*

Esquisse de démonstration (voir [52, lemme 35.13]). Factorisons f à l'aide de deux morphismes $g : S'' \rightarrow S'$ et $h : S'' \rightarrow S$, de sorte que $f = h \circ g^{-1}$. Supposons pour simplifier que g est la contraction d'une courbe exceptionnelle de première espèce E . Le point $x = g(E)$ est alors l'unique point d'indétermination possible de f . Soit $[E]$ la classe de E dans $\mathbf{NS}(S'')$. Nous obtenons

$$0 = \langle g^*(l')|[E] \rangle = \langle h^*(l)|[E] \rangle.$$

Puisque l est ample, h contracte E . Ainsi, la courbe contractée par g l'est aussi par h et f est holomorphe. Le cas général découle de ce cas particulier. □

Remarque 3.9. Si l n'est pas ample, on obtient toutefois la propriété suivante : toute courbe contractée par g est orthogonale à $h^*(l)$. Si, par exemple, $h^*(l)$ est la classe des fibres d'une fibration, ceci signifie que les courbes contractées par g sont contenues dans les fibres.

Cette proposition montre que si l est un point de $\mathbf{Z}^+(S) \otimes \mathbf{R}$ issu d'une classe ample de $\mathbf{NS}(S') \otimes \mathbf{R}$ (où S' est birationnelle à S), alors tout élément f de $\text{Bir}(S)$ pour lequel $f_* : \mathcal{Z}(S) \rightarrow \mathcal{Z}(S)$ stabilise l est conjugué à un automorphisme de S' ; cet automorphisme est virtuellement isotope à l'identité car f_* est elliptique. La proposition suivante étend ce résultat de deux façons : l appartient à $\mathbf{Z}^+(S)$ et f est remplacée par un groupe de type fini G . Le fait que G soit de type fini est essentiel (voir §7).

PROPOSITION 3.10. *Soit G un sous-groupe de type fini de $\text{Bir}(S)$. Soit l un élément de $\mathcal{Z}^+(S) \setminus \{0\}$ fixé par tous les éléments de G .*

- (i) *Il existe un élément l' de $\mathcal{Z}^+(S)$ qui est G -invariant.*
- (ii) *Si $\langle l|l \rangle > 0$ on peut choisir l' de sorte que $\langle l'|l' \rangle > 0$. Dans ce cas, il existe une transformation birationnelle $\Phi : S \dashrightarrow S'$ telle que l' soit issu de $\text{NS}(S')$, $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$ soit contenu dans $\text{Aut}(S')$, et un sous-groupe d'indice fini de $\Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$ soit contenu dans $\text{Aut}^0(S')$.*

Démonstration. La difficulté consiste à se ramener de l'hypothèse $l \in \mathcal{Z}(S)$ à l'hypothèse $l \in \mathcal{Z}(S)$. Nous utiliserons la [remarque 3.5](#) et les notations qui l'accompagnent.

Puisque le groupe G fixe un vecteur nef non nul, tous les éléments de G sont paraboliques ou elliptiques (voir la [remarque 3.7](#)). Si l'un des éléments est parabolique, l est proportionnel à la classe d'une fibration elliptique ou rationnelle ; dans ce cas, un multiple de l appartient à $\mathcal{Z}^+(S)$ et $\langle l|l \rangle = 0$. Nous pouvons donc désormais supposer que tous les éléments de G sont elliptiques.

Soit $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ un système de générateurs fini de G . D'après le [théorème 3.6](#), chaque g_i est virtuellement isotope à l'identité et est donc conjugué à un automorphisme d'une surface S_i birationnelle à S . La transformation $(g_i)_*$ préserve donc la décomposition

$$\mathcal{Z}(S) = (\text{NS}(S_i) \otimes \mathbf{R}) \oplus \mathcal{E}(S_i).$$

Pour chaque entier $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, l'élément l de $\mathcal{Z}^+(S)$ peut donc être décomposé en

$$(3.1) \quad l = p_i + \sum a_r(l)e_r$$

où p_i est issu de $\text{NS}(S_i)$ et les e_r sont associés à des éclatements de points dominants S_i , i.e. à des points de $\text{Eclat}(S_i)$. D'après la [remarque 3.5](#), g_i permute entre eux les termes $a_r(l)e_r$ de la décomposition (3.1) :

$$\forall r, \exists r', (g_i)_*(a_r(l)e_r) = a_{r'}(l)e_{r'}.$$

Puisque la somme hilbertienne $\sum a_r(l)^2$ doit être finie, ou bien l'orbite de e_r par $(g_i)_*$ est finie, ou bien $a_r(l)$ est nul.

Décomposons maintenant l dans la base canonique de $\mathcal{Z}(S)$,

$$l = p_0 + \sum a_x(l)e_x$$

où p_0 appartient à $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$ et les e_x correspondent à des éclatements au-dessus de S . Soit S'' une surface qui domine à la fois les S_i et la surface S . Soit J une partie finie de $\text{Eclat}(S)$ telle que l'image de $\text{NS}(S'')$ dans $\mathcal{Z}(S)$ soit contenue dans l'espace vectoriel engendré par $\text{NS}(S)$ et les e_j , $j \in J$. Chaque p_i peut alors être décomposé en une somme finie

$$p_i = p_i(S) + \sum_{j \in J} a_j(p_i)e_j$$

avec $p_i(S) \in \text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$.

Soit ε un nombre réel strictement positif inférieur à la moitié de la plus petite valeur non nulle parmi les $|a_j(p_i)|$, $j \in J$. Soit g_i l'un des k générateurs du groupe G . Soit e_x un élément de $\text{Eclat}(S)$ pour lequel le coefficient $a_x(l)$ est plus petit que ε . Alors x n'appartient pas à J donc e_x n'est pas issu de $\text{NS}(S_i)$. Ceci montre que

$$(g_i)_* a_x(l) e_x = a_{x'}(l) e_{x'}$$

où $x' = g_i(x)$ est un autre point de $\text{Eclat}(S_i)$. Nous en déduisons que le groupe G stabilise le vecteur

$$l_0 = \sum_{|a_x(l)| < \varepsilon} a_x(l) e_x$$

où la somme ne porte que sur les termes pour lesquels $|a_x(l)| < \varepsilon$. Par conséquent, la somme finie $l' = l - l_0$ est G -invariante. Puisque l_0 est orthogonal à l' et $\langle l_0 | l_0 \rangle \leq 0$, nous avons $\langle l' | l' \rangle \geq \langle l | l \rangle$. Ce vecteur appartient à $Z(S)$.

Supposons maintenant que $\langle l' | l' \rangle > 0$ (ce qui ne permet pas encore d'appliquer la proposition 3.8). Si C est une courbe irréductible de S'' contractée par un élément g de G , alors $\langle l' | C \rangle = 0$. Ceci montre que le sous- \mathbf{Z} -module W de $\text{NS}(S'')$ engendré par les classes des courbes contractées par G est entièrement contenu dans l'orthogonal de l' pour la forme d'intersection. Le théorème de l'indice de Hodge montre alors que la forme d'intersection est définie négative sur W , et le critère de Mumford-Grauert permet de contracter simultanément toutes ces courbes, ce qui fournit un morphisme birationnel $\pi : S'' \rightarrow S'''$, où S''' est une surface munie d'un nombre fini de singularités normales. Le morphisme π conjugue G à un sous-groupe de $\text{Aut}(S''')$, et G agit donc par automorphismes sur l'unique résolution minimale S' de S''' . Puisque tous les éléments de G sont elliptiques, leur action sur $\text{NS}(S')$ est d'ordre fini ; comme tout groupe linéaire de torsion et de type fini est fini, un sous-groupe d'indice fini de G est contenu dans $\text{Aut}^0(S')$. □

4. Action de groupes de Kazhdan sur les surfaces

Dans cette partie nous décrivons les actions birationnelles des groupes de Kazhdan sur les surfaces : il s'agit de montrer le théorème A et quelques corollaires. Nous commençons par le cas facile des surfaces irrationnelles.

4.1. Surfaces irrationnelles.

THÉORÈME 4.1. *Si X est une surface complexe compacte kählérienne qui n'est pas rationnelle, tout sous-groupe dénombrable de $\text{Bir}(X)$ qui a la propriété (T) de Kazhdan est un groupe fini.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que la dimension de Kodaira de X est positive ou que X est une surface réglée irrationnelle. Dans ce paragraphe, $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Bir}(X)$ est un morphisme d'un groupe de Kazhdan dénombrable vers $\text{Bir}(X)$. Il s'agit de montrer que l'image de α est finie.

4.1.1. *Préliminaire (voir [41]).* Nous utiliserons plusieurs fois le théorème suivant : Soit Γ un groupe de Kazhdan ; si ρ est un morphisme de Γ vers le groupe orthogonal $O(1, n)$, alors $\rho(\Gamma)$ est relativement compact. Ceci s'applique en particulier pour les morphismes de Γ dans $SL(2, \mathbf{R})$ et $SL(2, \mathbf{C})$ car ces groupes de Lie sont localement isomorphes $O(1, 2)$ et $O(1, 3)$; dans ce cas, l'image de ρ est en fait finie, car les groupes $O(2)$ et $O(3)$ ne contiennent pas de groupe de Kazhdan infini.

4.1.2. *Dimension de Kodaira positive.* Lorsque la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle, X possède un unique modèle minimal X_0 obtenu en contractant une à une des courbes exceptionnelles de première espèce. Le groupe $\text{Bir}(X)$ est alors conjugué au groupe des automorphismes de X . Nous pouvons donc supposer que α est à valeurs dans $\text{Aut}(X_0)$. L'action de $\alpha(\Gamma)$ sur le groupe de cohomologie $H^{1,1}(X_0, \mathbf{R})$ y préserve la forme d'intersection, qui est de signature $(1, \rho(X) - 1)$ (voir le §3.1). L'image de Γ dans $\text{GL}(H^{1,1}(X_0, \mathbf{R}))$ est donc relativement compacte (§4.1.1). Chaque élément de $H^{2,0}(X_0, \mathbf{C})$ est représenté par une unique 2-forme holomorphe et l'action de $\alpha(\Gamma)$ sur $H^{2,0}(X_0, \mathbf{C})$ préserve le produit hermitien (défini positif)

$$(\Omega, \Omega') \mapsto \int_X \Omega \wedge \overline{\Omega'}.$$

Par conjugaison, l'action de $\alpha(\gamma)$ sur $H^{0,2}(X_0, \mathbf{C})$ est également unitaire. L'image de Γ dans $\text{GL}(H^2(X_0, \mathbf{C}))$ est donc relativement compacte. Puisque Γ préserve la structure entière de la cohomologie, cette image est finie. D'après [50], il existe un sous-groupe d'indice fini Γ_0 dans Γ tel que $\alpha(\Gamma_0)$ soit contenu dans la composante connexe de l'identité $\text{Aut}^0(X_0)$. Puisque la dimension de Kodaira de X_0 est positive, ce groupe est abélien (voir [9]). Puisque Γ_0 hérite de la propriété de Kazhdan, $\alpha(\Gamma_0)$ et donc $\alpha(\Gamma)$ sont finis (voir [41]).

4.1.3. *Surfaces réglées.* Supposons maintenant que X est une surface réglée irrationnelle. La fibration d'Albanese de X détermine une fibration holomorphe non triviale à fibres rationnelles $a_X : X \rightarrow B$ où B est une courbe de genre supérieur ou égal à 1. Cette fibration est invariante sous l'action de $\text{Bir}(X)$: il existe un morphisme de $\text{Bir}(X)$ dans $\text{Aut}(B)$ tel que a_X soit équivariante. On conclut alors avec le lemme suivant, qui est extrait de [22].

LEMME 4.2. *Soient S une surface complexe compacte, B une courbe et $\pi : S \rightarrow B$ une fibration holomorphe de S . Soit $\text{Bir}(S, \pi)$ le groupe des transformations birationnelles de S qui permutent les fibres de π . Si Γ est un sous-groupe dénombrable de $\text{Bir}(S, \pi)$ qui a la propriété (T), Γ est fini.*

Démonstration. L'hypothèse signifie qu'il existe un morphisme ρ de Γ dans $\text{Aut}(B)$ tel que $\pi \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \pi$ pour tout élément γ de Γ . Le groupe $\text{Aut}(B)$ est isomorphe à $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ lorsque B est la sphère de Riemann et est virtuellement

abélien sinon. Puisque Γ a la propriété (T), le noyau Γ_0 de ρ est d'indice fini dans Γ (§4.1.1). Supposons d'abord que la fibre générique de π est rationnelle. Trivialisons la fibration π au-dessus d'un ouvert de Zariski B' de B , de sorte que $\pi^{-1}(B')$ soit isomorphe à $B' \times E$, où E est une courbe, et que π s'identifie à la projection sur B' . Si γ est un élément de Γ_0 , il existe une application rationnelle $A_\gamma : B' \dashrightarrow \text{Aut}(E)$ telle que $\gamma(b, z) = (b, A_\gamma(b)(z))$. Si E est de genre 0, ceci détermine un morphisme injectif $\gamma \mapsto A_\gamma$ de Γ_0 vers le groupe $\text{PGL}(2, \mathcal{M}(B))$ où $\mathcal{M}(B)$ est le corps des fonctions rationnelles de B . Comme Γ_0 a la propriété (T), l'image de ce morphisme est finie (§4.1.1). Si le genre de la fibre générique E est strictement positif, $\text{Aut}(E)$ est virtuellement abélien, et l'on montre de même que l'image de γ est finie. Le groupe Γ est donc fini. \square

4.2. *Actions sur le plan.* Dans ce paragraphe, nous montrons le résultat principal de cette partie, celui qui termine la preuve du théorème A.

THÉOREME 4.3. *Soit Γ un groupe de Kazhdan discret. Soit α un morphisme de Γ dans le groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Ou bien $\alpha(\Gamma)$ est fini, ou bien $\alpha(\Gamma)$ est conjugué à un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.*

4.2.1. *Automorphismes isotopes à l'identité.* Soit S une surface complexe compacte et $\text{Aut}^0(S)$ le groupe de ses automorphismes isotopes à l'identité. Si E est une courbe rationnelle lisse de S dont l'auto-intersection est égale à -1 , E est uniquement déterminée par sa classe d'homologie. Le groupe $\text{Aut}^0(S)$ agit trivialement sur l'homologie de S et préserve donc la courbe E . Contractant la courbe E , nous obtenons un morphisme $\pi : S \rightarrow S'$ qui conjugue $\text{Aut}^0(S)$ à un sous-groupe de $\text{Aut}^0(S')$. Répétant cette procédure, nous voyons que, pour toute surface S , il existe un morphisme birationnel $\varepsilon : S \rightarrow S_0$ de S vers un modèle minimal S_0 de S tel que $\varepsilon \text{Aut}^0(S) \varepsilon^{-1}$ soit un sous-groupe de $\text{Aut}^0(S_0)$. Si S est rationnelle, les modèles minimaux sont

- le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et $\text{Aut}^0(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}(3, \mathbf{C})$;
- la quadrique $Q = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ pour laquelle $\text{Aut}^0(Q)$ correspond au groupe $\text{PGL}(2, \mathbf{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbf{C})$ agissant diagonalement ;
- les surfaces de Hirzebruch \mathbb{F}_m : pour tout entier $m \geq 1$, la surface \mathbb{F}_m est construite en quotientant l'espace total du fibré $\mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(0)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$, privé de sa section nulle, par les homothéties dans les fibres. La surface \mathbb{F}_m fibre donc naturellement sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$, avec des fibres rationnelles ; nous noterons $\pi_m : \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ cette fibration. Les automorphismes de \mathbb{F}_m préservent cette fibration et agissent par homographies sur la base et dans les fibres.

Le lemme 4.2 et le théorème 4.1 fournissent donc le résultat suivant.

LEMME 4.4. *Si S est une surface complexe compacte kählérienne, si Γ a la propriété (T) et si $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Aut}^0(S)$ est un morphisme, ou bien l'image de*

α est finie ou bien α est conjugué à un morphisme de Γ dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ par un morphisme birationnel $S \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$.

4.2.2. *Démonstration du théorème 4.3.* Il s'agit de juxtaposer la [partie 3](#) à des idées exposées par Gromov et Valette dans [40, 7.A] et [17, §7.4].

Composant α avec l'action de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ sur l'espace de Picard-Manin $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, nous obtenons un morphisme α_* de Γ dans le groupe d'isométries de $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ pour la forme d'intersection $\langle . | . \rangle$. En utilisant les notations du [paragraphe 3.4](#), ceci détermine une action de Γ par isométries sur \mathbb{H}^∞ ou, plus précisément, sur $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$.

Notons $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la distance associée à la métrique de \mathbb{H}^∞ et fixons un point x de \mathbb{H}^∞ . D'après le corollaire 8.2 de [29], la fonction

$$\gamma \mapsto \log(\cosh \text{dist}(\gamma(x), x))$$

est de type négatif sur Γ , donc bornée puisque Γ a la propriété (T) ([41, ch. 5 et ch. 6]). L'orbite $\text{Orb}(x, \Gamma)$ de x sous Γ forme donc un ensemble borné de \mathbb{H}^∞ . Puisque \mathbb{H}^∞ satisfait l'inégalité de la médiane nous pouvons appliquer le lemme du centre ([41, p. 37]) : il existe un unique point x_0 de \mathbb{H}^∞ qui minimise la fonction

$$y \in \mathbb{H}^\infty \mapsto \sup_{g \in \Gamma} \{\text{dist}(y, g(x))\}.$$

Ce point x_0 , appelé centre de l'orbite de x , est invariant sous l'action de $\alpha_*(\Gamma)$, ce qui montre que $\alpha_*(\Gamma)$ fixe un point x_0 de \mathbb{H}^∞ .

Ayant la propriété (T), le groupe Γ est de type fini ([41, p. 11]). Nous pouvons donc appliquer la [proposition 3.10](#) : il existe un sous-groupe distingué et d'indice fini Γ_0 dans Γ tel que $\alpha(\Gamma_0)$ soit conjugué à un sous-groupe de $\text{Aut}^0(S)$ où S est une surface rationnelle. Le [paragraphe 4.2.1](#) fournit l'alternative : ou bien $\alpha(\Gamma)$ est fini ou bien $\alpha(\Gamma_0)$ est conjugué à un sous-groupe infini de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) = \text{PGL}(3, \mathbf{C})$. Nous pouvons donc désormais supposer que $\alpha(\Gamma_0)$ est un sous-groupe infini de $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$.

LEMME 4.5. *Si G est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ qui a la propriété (T) de Kazhdan et si G préserve une courbe $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, G est fini.*

Démonstration. Si G préserve une courbe, son adhérence de Zariski est un sous-groupe algébrique strict de $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$. Par ailleurs, si H est un sous-groupe algébrique complexe de $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ de codimension supérieure ou égale à 1, tout sous-groupe de Kazhdan de H est fini. \square

Puisque $\alpha(\Gamma_0)$ est infini et a la propriété (T), le [lemme 4.5](#) montre que $\alpha(\Gamma_0)$ ne préserve aucune courbe C de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. Soit γ un élément de Γ . Puisque Γ_0 est distingué dans Γ ,

$$\gamma \circ \Gamma_0 = \Gamma_0 \circ \gamma,$$

et comme $\alpha(\Gamma_0)$ agit par automorphismes sur le plan, $\alpha(\Gamma_0)$ stabilise l'union finie des courbes contractées par la transformation birationnelle $\alpha(\gamma)$. Nous déduisons du [lemme 4.5](#) que $\alpha(\gamma)$ ne contracte aucune courbe, i.e. que $\alpha(\gamma)$ est un automorphisme du plan. Ainsi, $\alpha(\Gamma)$ est entièrement contenu dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ et le théorème est démontré.

4.3. *Remarques autour du « programme de Zimmer ».* Le « programme de Zimmer » consiste à étudier les actions de réseaux de groupes de Lie par difféomorphismes sur les variétés compactes, dans l'esprit des travaux de Margulis concernant les actions linéaires. Une conjecture centrale de ce domaine stipule, entre autres choses, qu'un réseau Γ d'un groupe de Lie réel simple (connexe) G ne peut agir fidèlement sur une variété compacte dont la dimension serait strictement inférieure au rang réel de G . Dans cet esprit, le théorème A admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.6. *Soit G un groupe de Lie réel, connexe et presque simple. Soit Γ un réseau de G . Soit S une surface complexe compacte kählérienne. Si le rang réel de G est supérieur ou égal à 3, tout morphisme de Γ dans $\text{Bir}(S)$ a une image finie. Si le rang réel de G est égal à 2, et si $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Bir}(S)$ est un morphisme dont l'image est infinie, il existe une application birationnelle de S vers $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ qui conjugue $\rho(\Gamma)$ à un sous-groupe de $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que le rang réel de G est supérieur ou égal à 2. En ce cas, G et Γ ont la propriété (T). Si S n'est pas rationnelle, tout morphisme de Γ dans $\text{Bir}(S)$ a donc une image finie. Nous pouvons donc supposer maintenant que S est le plan projectif et que l'image de Γ est contenue dans $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$ (appliquer le [théorème 4.3](#)). On déduit alors de [[53](#), thm. 2', p. 4] que le rang de G est inférieur ou égal à 2 (voir par exemple [[11](#), pp. 764–765] pour cet argument). \square

Remarque 4.7. Notons $\text{Bir}^\omega(\mathbb{P}^2(\mathbf{R}))$ le sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ constitué des transformations birationnelles à coefficients réels qui induisent des difféomorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$. Ce groupe s'identifie à un sous-groupe des difféomorphismes analytiques réels de $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$ et se place donc à l'intersection de $\text{Diff}(\mathbb{P}^2(\mathbf{R}))$ et $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Sous cette forme, le théorème A fournit un exemple supplémentaire confirmant les conjectures de Zimmer pour les difféomorphismes de surfaces réelles compactes (voir [[35](#)] ou [[30](#)]).

Pour ce qui concerne les groupes de rang 1, deux situations distinctes apparaissent. Si G est localement isomorphe à $\text{Sp}(1, n)$ ou $F_4^{(-20)}$, alors G et Γ ont la propriété (T). On déduit alors du théorème A et des résultats de rigidité de Corlette ([[19](#)]) que toute action birationnelle de Γ sur une surface projective

complexe se réduit à l'action d'un groupe fini. Le cas intéressant est donc celui des réseaux de $\mathrm{SO}(1, n)$ et de $\mathrm{SU}(1, n)$.

Exemple 4.8 (Surfaces de Coble). Soit C une courbe sextique plane comportant 10 points doubles, choisie génériquement parmi les courbes de ce type. Soit X la surface rationnelle obtenue en éclatant ces dix points. Le rang du groupe de Néron-Severi de X est donc égal à 11 et le fibré canonique K_X détermine un élément $[K_X]$ de $\mathrm{NS}(X)$ d'auto-intersection -1 . Soit M_X l'orthogonal de $[K_X]$ dans $\mathrm{NS}(X)$. Puisque le fibré canonique est invariant par tout automorphisme de X , nous obtenons un morphisme de $\mathrm{Aut}(X)$ dans le groupe $\mathrm{O}(M_X)$ des isométries de $M_X \otimes \mathbf{R}$ pour la forme d'intersection ; puisque $[K_X]^2$ est négatif, la forme d'intersection est non dégénérée et de signature $(1, 9)$ sur M_X . Les travaux de Coble et Dolgachev montrent que ce morphisme plonge $\mathrm{Aut}(X)$ en un réseau de $\mathrm{O}(M_X)$. Ainsi, X étant rationnelle, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ contient une copie d'un réseau de $\mathrm{O}(1, 9)$ (voir [27] et les références qui s'y trouvent).

Exemple 4.9. Soit Σ_g la surface de genre g , avec $g \geq 2$. D'après [16], il existe des plongements de $\pi_1(\Sigma_g)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan affine, donc dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ qui ne sont pas birationnellement conjugués à un plongement dans un groupe d'automorphismes d'une surface rationnelle. Je ne sais pas s'il existe des réseaux cocompacts de $\mathrm{SO}(1, 3)$ qui admettent de tels plongements.

Question : Quelles sont les valeurs de l'entier n pour lesquelles existe un réseau de $\mathrm{SO}(1, n)$ qui s'injecte dans le groupe des transformations birationnelles (resp. des automorphismes) d'une surface projective complexe ?

Je ne sais malheureusement pas répondre à cette question. Si X est une surface K3, le noyau de l'action de $\mathrm{Aut}(X)$ sur $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est fini. Puisque la dimension de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est égale à 20, les théorèmes de rigidité de Mostow montrent qu'un réseau de $\mathrm{O}(1, n)$ ne peut se plonger dans $\mathrm{Aut}(X)$ si n est supérieur à 19. À l'inverse, pour tout entier $n \leq 9$, il existe un réseau de $\mathrm{SO}(1, n)$ qui est isomorphe au groupe d'automorphismes d'une surface K3 (ceci résulte du théorème de Torelli pour les surfaces K3 et des résultats de Nikulin ; voir [56, cor. 2.9]). La question précédente se réduit donc au cas des plongements de réseaux dans le groupe de Cremona.

5. Centralisateurs et groupes abéliens

Dans cette partie, nous utilisons l'action sur l'espace de Picard-Manin pour décrire les éléments de $\mathrm{Cent}(f, \mathrm{Bir}(S))$ lorsque f est une transformation birationnelle entropique d'une surface complexe compacte kählérienne S . Une seconde méthode sera exposée dans l'annexe : elle fournit un critère portant sur la dynamique d'une transformation holomorphe, rationnelle ou analytique réelle qui assure que son centralisateur est virtuellement cyclique.

5.1. Centralisateur et groupe de Picard-Manin.

THÉORÈME 5.1. *Soit f une transformation birationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne X dont le premier degré dynamique $\lambda(f)$ est strictement supérieur à 1. Il existe un morphisme*

$$\alpha : \text{Cent}(f, \text{Bir}(X)) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$$

tel que

- (i) pour tout élément g de $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$, $\alpha(g)$ est égal à $\lambda(g)$ ou $1/\lambda(g)$;
- (ii) le noyau de α est constitué de transformations d'ordre fini ;
- (iii) si G est un sous-groupe de type fini dans $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$, $\alpha(G)$ est un groupe cyclique ;
- (iv) Si g appartient à $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$, il existe deux entiers $n > 0$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que $g^n = f^m$.

Ce théorème précise donc le [théorème B](#). La démonstration s'inspire d'arguments classiques dans le groupe $\text{SO}(1, n)$ et de [\[25\]](#). La démonstration qui suit, distincte de la démonstration initiale que j'avais obtenue (voir [\[12\]](#)), résulte d'une discussion avec C. Favre.

Démonstration. Fixons un vecteur propre Θ^+ de f_* dans $\mathcal{Z}^+(X)$ pour la valeur propre $\lambda(f)$, de sorte que $\mathbf{R}\Theta^+$ coïncide avec l'espace propre de f_* associé à $\lambda(f)$. Le centralisateur de f préserve la droite $\mathbf{R}\Theta^+$, ce qui détermine un morphisme

$$\alpha : \text{Cent}(f, \text{Bir}(X)) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$$

pour lequel $g_*(\Theta^+) = \alpha(g)\Theta^+$ quelque soit g dans $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$; d'après la [remarque 3.7](#), $\alpha(g)$ est égal à $\lambda(g)$ ou $1/\lambda(g)$ quelque soit g .

Puisque f est entropique, aucun multiple de Θ^+ ne coïncide avec la classe d'une fibration rationnelle ou elliptique. Le noyau de α est donc constitué d'éléments elliptiques. Si h est un élément du noyau de α nous pouvons donc supposer, quitte à effectuer une conjugaison birationnelle $X' \dashrightarrow X$, que h est un automorphisme de X dont un itéré h^k appartient à $\text{Aut}^0(X)$. Si h^k est d'ordre infini, l'adhérence de Zariski du groupe

$$\{(h^k)^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$$

dans $\text{Aut}^0(X)$ est un groupe abélien de dimension strictement positive qui commute avec f . Ceci montre que f commute au flot d'un champ de vecteurs holomorphe sur X , ce qui est impossible pour une transformation birationnelle entropique (voir [\[15\]](#)). Ainsi, tout élément du noyau de α est d'ordre fini.

Soit G un sous-groupe de type fini de $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$ pour lequel nous fixons un système de générateurs g_1, \dots, g_k . Notons α_G la restriction de α à G et étudions son image. Chaque $\lambda(g_i)$, $0 \leq i \leq k$, est un entier algébrique dont

nous noterons le degré $d(\lambda(g_i))$ (voir [24]). L'image de α_G est donc constituée d'entiers algébriques de degré inférieur à

$$d := \prod_{i=1}^k d(\lambda(g_i)).$$

Soit t un élément de $\alpha_G(G)$ compris entre $1/2$ et 2 . C'est un entier algébrique de degré $d(t) \leq d$, dont nous noterons $\chi_t(z)$ le polynôme minimal. Puisque t est un nombre de Pisot ou de Salem (voir [24]), les racines de $\chi_t(z)$ qui sont distinctes de t et $1/t$ sont de module 1. Comme t et $1/t$ sont inférieurs à 2 et $d(t)$ est inférieur à d , les coefficients du polynôme $\chi_t(z)$ sont majorés par $(2d)!$. Il n'y a qu'un nombre fini de polynômes à coefficients entiers de degré d dont les coefficients sont ainsi majorés. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de $\alpha_G(G)$ dans l'intervalle $[1/2, 2]$, si bien que l'image de α_G est discrète et, par suite, cyclique.

Soient g un élément de $\text{Cent}(f, \text{Bir}(X))$ et G le groupe engendré par f et g . Il existe alors un réel $\lambda_0 > 1$ tel que $\alpha(G)$ coïncide avec le groupe cyclique $\{\lambda_0^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$. Soient $n > 0$ un entier tel que $\alpha(f) = \lambda_0^n$ et $m \in \mathbf{Z}$ tel que $\alpha(g) = \lambda_0^m$. La transformation birationnelle $g^n \circ f^{-m}$ appartient ainsi au noyau de α et est donc d'ordre fini. Puisque f et g commutent, il existe $n' > 0$ et $m' \in \mathbf{Z}$ tels que $g^{n'}$ soit égal à $f^{m'}$, ce qu'il fallait démontrer. \square

5.2. Centralisateurs des applications birationnelles des surfaces. Dans le paragraphe précédent, nous avons décrit les transformations birationnelles qui commutent à une transformation birationnelle entropique. Lorsque f est un twist de De Jonquières (voir la [définition 2.4](#)), le calcul du centralisateur est plus délicat et conduit à des situations variées (voir [23]). Lorsque f est un twist de Halphen, il est encore possible de borner la taille du centralisateur de f (nous renvoyons à [38] ou [12] pour une preuve) :

PROPOSITION 5.2. *Soit f une transformation birationnelle du plan projectif qui est un twist de Halphen. Le centralisateur de f dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ contient un sous-groupe d'indice fini qui est abélien, libre et de rang inférieur ou égal à 8.*

6. Alternative de Tits

Dans cette partie, nous montrons l'alternative de Tits pour les groupes d'automorphismes des variétés kähleriennes compactes et, surtout, le [théorème C](#) concernant l'alternative de Tits pour les transformations birationnelles des surfaces.

6.1. Remarques concernant l'alternative de Tits. La suite des groupes dérivés d'un groupe G est définie par la récurrence $D_0(G) = G$, $D_1(G) = [G, G]$, $D_{n+1}(G) = D_1(D_n(G))$. Un groupe G est résoluble s'il existe un entier n tel que $D_n(G)$ soit réduit à l'élément neutre ; la longueur de résolubilité de G est le plus petit entier n tel que $D_n(G)$ soit réduit à l'élément neutre. Un

groupe est virtuellement résoluble s'il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini : la longueur de résolubilité virtuelle de G est alors définie comme le minimum des longueurs de résolubilité des sous-groupes d'indice fini de G . Toute extension d'un groupe résoluble par un autre est résoluble et il en va de même pour les groupes virtuellement résolubles, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 6.1. *Soit G un groupe de type fini. Supposons que G soit une extension d'un groupe virtuellement résoluble R de longueur r par un autre groupe virtuellement résoluble Q de longueur q :*

$$1 \rightarrow R \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

Alors G est virtuellement résoluble de longueur inférieure ou égale à $r + q + 1$.

Démonstration. Quitte à changer Q en l'un de ses sous-groupes résolubles d'indice fini, nous pouvons supposer que Q est résoluble de longueur q . Soit R_0 un sous-groupe de R résoluble, de longueur r et d'indice fini. Soit $\{g_1, \dots, g_k\}$ une partie génératrice finie de G . Le groupe

$$R_1 = \bigcap_{i=1}^{i=k} g_i R_0 g_i^{-1}$$

est distingué dans G , résoluble (de longueur inférieure à r) et d'indice fini dans R .

Soit G_1 le groupe G/R_1 . Le groupe G_1 est une extension de Q par le groupe fini R/R_1 : $1 \rightarrow (R/R_1) \rightarrow G_1 \rightarrow Q \rightarrow 1$. Soit $\text{co} : G_1 \rightarrow \text{Aut}(R/R_1)$ le morphisme associé à l'action de G_1 sur (R/R_1) par conjugaison. Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe d'indice fini G_2 dans G_1 . Ce groupe G_2 intersecte (R/R_1) sur un sous-groupe C de G_2 contenu dans le centre de G_2 . Ainsi, G_2 est une extension centrale d'un groupe abélien fini par un groupe résoluble de longueur q , donc G_2 est résoluble de longueur inférieure à $q + 1$.

Considérons maintenant le sous-groupe G' de G , image réciproque de G_2 par la projection canonique de G sur G_1 . Ce groupe est d'indice fini dans G et est une extension de R_1 par G_2 . C'est donc un sous-groupe résoluble d'indice fini dans G et de longueur inférieure à $r + q + 1$. □

Un groupe G « vérifie l'alternative de Tits » si tout sous-groupe de type fini Γ dans G contient un groupe libre non abélien ou un sous-groupe résoluble d'indice fini. La proposition suivante se déduit facilement du [lemme 6.1](#).

PROPOSITION 6.2. *Si G_1 et G_2 satisfont l'alternative de Tits, et si G est une extension de G_1 par G_2 , alors G satisfait l'alternative de Tits.*

6.2. *Surfaces irrationnelles.* Lorsque X est une surface complexe compacte kählérienne irrationnelle, ou bien X est réglée ou bien la dimension de Kodaira de X est positive. Dans le premier cas, si $\pi : X \rightarrow B$ est la fibration

associée au réglage, le groupe $\text{Bir}(X)$ est une extension d'un groupe virtuellement abélienne de $\text{PGL}(2, \mathcal{M}(B))$ (voir le [paragraphe 4.1.3](#)), et l'alternative de Tits découle de la [proposition 6.2](#). Dans le second cas, $\text{Bir}(X)$ est conjugué à $\text{Aut}(X_0)$ où X_0 est l'unique modèle minimal de X (voir le [§4.1.2](#)). Il suffit donc d'appliquer le théorème suivant pour conclure.

THÉORÈME 6.3. *Si M est une variété complexe compacte kählérienne, son groupe d'automorphismes satisfait l'alternative de Tits.*

Démonstration. Le groupe $\text{Aut}(M)$ agit sur la cohomologie de M , ce qui détermine un morphisme de $\text{Aut}(M)$ dans $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z}))$, où $H^*(M, \mathbf{Z})$ est la somme directe des groupes de cohomologie de M . Dans [50], Lieberman montre que le noyau de ce morphisme est un groupe de Lie complexe n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes et que sa composante connexe $\text{Aut}^0(M)$ est une extension d'un tore complexe compact par un groupe algébrique complexe. La [proposition 6.2](#) et l'alternative de Tits classique montrent donc le résultat. \square

6.3. *Une alternative faible pour les isométries de \mathbb{H}^∞ .* Dans ce paragraphe, nous montrons une alternative de Tits faible, inspirée de [58], pour le groupe $\text{O}(1, \infty)$ des isométries de l'espace hyperbolique de dimension infinie \mathbb{H}^∞ . Fixons les notations, qui sont celles de la [partie 3.4](#), mais dans un cadre général. Soit \mathcal{Z} un espace de Hilbert séparable. Considérons le produit scalaire défini sur \mathcal{Z} par la formule

$$\langle x|x \rangle = x_0^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$$

où les coordonnées x_i sont relatives à une base hilbertienne fixée une fois pour toutes. Le cône de lumière de \mathcal{Z} est l'ensemble des vecteurs x satisfaisant $\langle x|x \rangle = 0$. On choisit alors l'une des deux nappes \mathbb{H}^∞ de l'hyperboloïde $\{x \in \mathcal{Z} \mid \langle x|x \rangle = 1\}$ et l'on munit cet espace de la distance définie au [paragraphe 3.4](#). L'espace \mathbb{H}^∞ est un espace $\text{CAT}(-1)$ complet. C'est donc un espace hyperbolique au sens de Gromov. Nous noterons $\partial\mathbb{H}^\infty$ son bord : il s'identifie au projectifié du cône de lumière de \mathcal{Z} .

THÉORÈME 6.4. *Soit Γ un sous-groupe de $\text{O}(1, \infty)$. Si Γ contient une isométrie hyperbolique f , l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

- (1) Γ contient un groupe libre non abélien,
- (2) Γ permute les deux points fixes de f au bord de \mathbb{H}^∞ ou fixe l'un de ces points fixes de f .

Si Γ ne contient pas d'isométrie hyperbolique, Γ fixe un point de $\mathbb{H}^\infty \cup \partial\mathbb{H}^\infty$.

Remarque 6.5. Dans le cas d'un groupe de transformations birationnelles Γ agissant sur $\mathbb{H}^\infty(S)$, les points fixes construits appartiennent à $\mathcal{Z}^+(S)$, car $\mathcal{Z}^+(S)$ est invariant sous l'action de Γ .

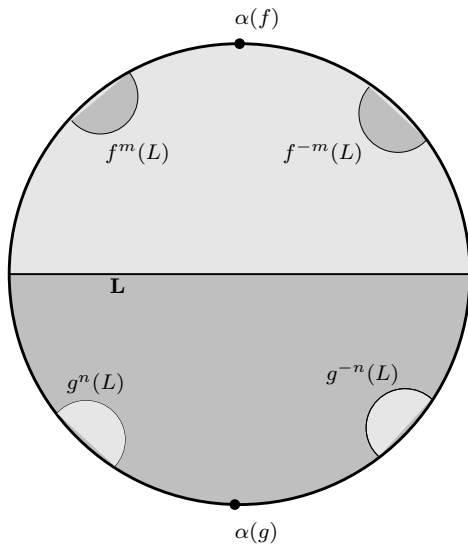


FIGURE 1. Dynamique pour deux isométries paraboliques à points fixes distincts. Le sous-espace L coupe \mathbb{H}^∞ en 2 demi-espaces. L’isométrie f^m et son inverse envoient le demi-espace le plus sombre sur les deux zones sombres proches de $\alpha(f)$ (le modèle de Poincaré est utilisé pour la figure).

La démonstration suivante fait appel à un résultat clé issu de [37], ce qui m’a été suggéré par F. Paulin.

Démonstration. Supposons que Γ contienne deux isométries hyperboliques f et g dont les points fixes au bord de \mathbb{H}^∞ sont distincts deux-à-deux. L’argument de ping-pong montre qu’il existe deux entiers n et m tels que f^n et g^m engendrent un sous-groupe de Γ isomorphe au groupe libre F_2 .

Supposons que Γ contient au moins une isométrie hyperbolique f . Soit α (resp. ω) le point fixe répulsif (resp. attractif) de f au bord de \mathbb{H}^∞ . S’il existe un élément h de Γ tel que $\{h(\alpha), h(\omega)\}$ et $\{\alpha, \omega\}$ soient disjoints, alors f et hfh^{-1} sont deux isométries hyperboliques auxquelles on peut appliquer l’argument précédent. Dans le cas contraire, c’est que Γ fixe le doubleton $\{\alpha, \omega\}$ ou l’un des deux points de ce doubleton ; ainsi, il existe un sous-groupe de Γ d’indice deux qui fixe α ou ω .

Supposons maintenant que Γ comporte deux isométries paraboliques f et g dont les points fixes $\alpha(f)$ et $\alpha(g)$ sur le bord de \mathbb{H}^∞ sont distincts. Choisissons deux éléments du cône de lumière de \mathcal{Z} , encore noté $\alpha(f)$ et $\alpha(g)$, qui représentent ces deux points du bord de \mathbb{H}^∞ . Soit l un point de \mathcal{Z} satisfaisant $\langle \alpha(f)|l \rangle < 0$ et $\langle \alpha(g)|l \rangle > 0$. L’hyperplan de \mathcal{Z} orthogonal à l coupe \mathbb{H}^∞ sur un sous-espace L qui sépare $\alpha(f)$ de $\alpha(g)$. Il existe alors un entier n et un entier m tels que $f^m(L)$, $f^{-m}(L)$, $g^n(L)$ et $g^{-n}(L)$ soient comme dans la

figure 1. L'isométrie $f^m g^n$ a alors deux points fixes au bord de \mathbb{H}^∞ : un point fixe attractif dans la zone entourée par $f^m(L)$ et un point fixe répulsif dans la zone entourée par $g^{-n}(L)$. Cette isométrie est donc hyperbolique et l'on peut appliquer le premier argument pour montrer que le groupe engendré par f et g contient un groupe libre.

Lorsque Γ contient au moins une isométrie parabolique, nous obtenons alors l'alternative : ou bien Γ contient un groupe libre non abélien, ou bien Γ fixe un point du bord de \mathbb{H}^∞ qui est l'unique point fixe de toutes les isométries paraboliques de Γ .

Il reste à traiter le cas où tous les éléments de Γ sont elliptiques ; c'est le cas le plus délicat. Le lemme 35 et la preuve du corollaire 36 du chapitre 8 de [37] montrent que : ou bien l'orbite de tout point x de \mathbb{H}^∞ est bornée, et en ce cas le lemme du centre ([41, p. 37]) montre que Γ fixe un point de \mathbb{H}^∞ , ou bien l'ensemble limite de Γ est réduit à un point, et Γ fixe donc un point du bord de \mathbb{H}^∞ . Ceci termine la démonstration du théorème. \square

Remarque 6.6. Telle que présentée dans [37], la preuve du lemme et du corollaire que nous venons d'utiliser nécessite une hypothèse de compacité locale qui n'est pas satisfaite par l'espace \mathbb{H}^∞ . Plus précisément, le lemme 35 du chapitre 8 de [37] utilise le corollaire 22, donc en fait l'implication (ii) \implies (i) de la proposition 21 qui, à son tour, nécessite de montrer que toute quasi-géodésique est à une distance bornée d'une géodésique. Cette dernière propriété est valable dans \mathbb{H}^∞ , par la même preuve que dans les espaces \mathbb{H}^n en utilisant que \mathbb{H}^∞ est complet, mais elle n'est démontrée dans [37] que pour des espaces localement compacts.

6.4. *Groupes de De Jonquières et automorphismes.* Avant de montrer le théorème C, nous résumons quelques propriétés concernant les automorphismes des surfaces rationnelles et le groupe de De Jonquières. Il s'agit de préliminaires un peu techniques.

6.4.1. *Le groupe de De Jonquières.* Le groupe de De Jonquières Jonq est le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ qui préservent les fibres de la projection sur le premier facteur, $\pi_x : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. Ses éléments sont donc de la forme $f(x, y) = (A(x), B(x)(y))$ où A est un élément de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ et B est un élément de $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$. Le groupe Jonq s'identifie ainsi au produit semi-direct

$$\text{Jonq} \simeq \text{PGL}(2, \mathbf{C}) \ltimes \text{PGL}(2, \mathbf{C}(x)).$$

Appliquant la proposition 6.2 et l'alternative de Tits dans les groupes linéaires, nous obtenons le lemme suivant.

LEMME 6.7. *Le groupe de De Jonquières vérifie l'alternative de Tits.*

Remarque 6.8. 1.— Soient S une surface rationnelle et $\pi : S \rightarrow B$ une fibration rationnelle de S . Il existe alors une application birationnelle $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et un isomorphisme $\eta : B \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ tels que $\eta \circ \pi = \pi_x \circ \varepsilon$. Ainsi, tout sous-groupe de $\text{Bir}(S)$ permutant les fibres de π est conjugué à un sous-groupe de Jonq .

2.— Considérons le groupe des automorphismes algébriques de $\mathbf{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. Puisque \mathbf{C} ne contient pas de sous-variété complexe compacte de dimension 1, les fibres de la projection sur \mathbf{C} sont permutées entre elles par l'action de $\text{Aut}(\mathbf{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$. Ce groupe et, de manière analogue, le groupe $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ se plongent donc dans le groupe de De Jonquières.

6.4.2. Automorphismes isotopes à l'identité.

LEMME 6.9. *Il existe un entier M tel que les propriétés suivantes soient vérifiées pour toute surface rationnelle S et tout sous-groupe de type fini G de $\text{Aut}(S)$:*

- (i) *si G est fini il contient un sous-groupe résoluble d'indice majoré par M ;*
- (ii) *si G est virtuellement résoluble et ne contient que des automorphismes virtuellement isotopes à l'identité, G contient un sous-groupe résoluble de longueur de résolubilité inférieure à M et d'indice majoré par M .*

Pour M on peut prendre la constante $60^2 = 3600$. Avant de montrer ce lemme, signalons qu'il s'agit de propriétés classiques pour les groupes linéaires. Par exemple, le premier point est un théorème de Jordan : pour tout entier positif n , il existe une constante $k(n)$ tel que tout sous groupe fini de $\text{GL}(n, \mathbf{C})$ contienne un sous-groupe central abélien d'indice inférieur à $k(n)$ (voir [20]).

Remarque 6.10. Nous utiliserons que tout sous-groupe fini de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ contient un sous-groupe abélien distingué d'indice inférieur à 60 (voir [46, cor. 2.13.7] pour la classification des groupes de Möbius finis). De même, si G est un sous-groupe virtuellement résoluble de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$, alors G contient un sous-groupe résoluble distingué d'indice inférieur à 60 dont la longueur de résolubilité est inférieure ou égale à 2.

Démonstration de (i). Le point (i) résulte du b, a, ba de la classification des sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Si G est un tel groupe, il préserve une fibration méromorphe $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbf{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ dont les fibres sont rationnelles ou elliptiques. Il existe donc un morphisme ρ de G dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ tel que $\rho(g) = \pi \circ g$ pour tout g dans G . L'image de G est un sous-groupe fini de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$. Elle contient donc un sous-groupe abélien I_0 d'indice majoré par 60. Lorsque la fibration est rationnelle, le noyau de ρ est un sous-groupe fini de $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$. Mais tout sous-groupe fini de $\text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$ se plonge en un sous-groupe fini de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ (par spécialisation de la variable x) et contient donc également un sous-groupe abélien central d'indice majoré par 60. L'image

réciproque de I_0 dans G par ρ contient donc un sous-groupe résoluble d'indice inférieur à $(60)^2$. Lorsque la fibration est elliptique, le noyau de ρ contient un sous-groupe abélien d'indice inférieur à 12 et le même argument s'applique. \square

Avant de démontrer le second point, remarquons que l'existence d'une telle constante M est facile à établir pour le groupe de De Jonquières $\text{Jonq} = \text{PGL}(2, \mathbf{C}) \ltimes \text{PGL}(2, \mathbf{C}(x))$, et donc aussi pour les groupes $\text{Aut}(\mathbf{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$ et $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$.

Remarque 6.11. Si G est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{C}^2)$, le théorème 2.4 de [48] montre que G satisfait l'une des trois propriétés suivantes : (i) G est contenu dans le groupe affine $\text{Aff}(\mathbf{C}^2)$ ou le groupe $\text{El}(\mathbf{C}^2)$ des automorphismes polynomiaux qui préservent la fibration par droites horizontales (ce groupe est résoluble, de longueur 3); (ii) G contient un groupe libre non abélien; (iii) G est isomorphe au produit semi-direct de \mathbf{Z} par un groupe fini cyclique. En particulier, si G est virtuellement résoluble, alors G contient un sous-groupe résoluble d'indice inférieur à 60 dont la longueur de résolubilité est inférieure à 3. Une propriété analogue s'obtient sans difficulté pour les groupes $\text{Aut}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*)$ et $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)$.

Démonstration de (ii). Nous utiliserons les résultats rappelés au [paragraphe 4.2.1](#). Dorénavant, le groupe G est un sous-groupe de type fini résoluble de $\text{Aut}(S)$, où S est une surface rationnelle, et tous les éléments de G sont virtuellement isotopes à l'identité; l'image G^* de G dans $\text{GL}(H^*(S, \mathbf{Z}))$ est un groupe linéaire de type fini et de torsion, donc fini (voir [20]). Notons G_0 l'intersection de G avec $\text{Aut}^0(S)$, $\overline{G_0}$ l'adhérence de Zariski de G_0 dans $\text{Aut}^0(S)$ et G_1 la composante connexe de l'identité dans $\overline{G_0}$; puisque G^* est fini, le théorème de Lieberman [50] montre que G_1 est d'indice fini dans G . Si G_1 est réduit à l'identité, c'est que G est isomorphe à un sous-groupe fini d'une surface rationnelle; le résultat découle alors du premier point. Nous pouvons donc supposer que la dimension de G_1 est supérieure ou égale à 1.

Considérons maintenant le dernier sous-groupe dérivé de G_1 qui ne soit pas réduit à l'identité. Ce groupe abélien, noté G_2 , est un sous-groupe de Lie complexe connexe de $\text{Aut}^0(S)$ de dimension strictement positive. Notons Q la quadrique $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. D'après [9, pp. 87–88] il existe un changement de variable birationnel $\varepsilon : S \dashrightarrow Q$ tel que $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$ soit un sous-groupe de $\text{Aut}^0(Q)$. Le groupe G est alors conjugué au sous-groupe $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ de $\text{Bir}(Q)$.

Puisque G agit par conjugaison sur son sous-groupe distingué G_0 , il agit également par conjugaison sur G_1 et G_2 ; le groupe $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ agit donc par conjugaison sur $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$. Si f est un élément de $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ et ϕ est un élément de $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$, il existe donc un autre automorphisme $\psi \in \varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$ tel que $f \circ \phi = \psi \circ f$. Toute courbe contractée par f est donc ϕ -invariante. Ceci montre que $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$ stabilise les courbes contractées par les éléments de $\varepsilon G \varepsilon^{-1} \subset \text{Bir}(Q)$. Ainsi,

• ou bien les orbites de $\varepsilon G_2 \varepsilon^{-1}$ sont confinées dans des courbes algébriques (rationnelles) et, en ce cas, $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ préserve une fibration rationnelle ; le groupe $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ est donc isomorphe à un sous-groupe de Jonq (cf. [remarque 6.8](#)) et le résultat cherché en découle ;

• ou bien l'ensemble des courbes contractées par $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ est formé d'au plus deux verticales $\{\star\} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et deux horizontales $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \{\star\}$; en ce cas, le groupe $\varepsilon G \varepsilon^{-1}$ est isomorphe à un sous-groupe de Jonq, de $\text{Aut}(\mathbf{C}^2)$, de $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C})$ ou de $\text{Aut}(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)$ et la [remarque 6.11](#) conclut la démonstration. \square

6.5. *Alternative de Tits pour le groupe de Cremona.* Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'alternative de Tits pour le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$, ce qui terminera la preuve du [théorème C](#).

Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$. Le groupe Γ se plonge donc dans le groupe des isométries de $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ et nous identifierons Γ à son image dans le groupe des isométries de $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$; puisqu'il suffit d'éclater les points d'indéterminations des éléments de Γ (cf. [remarque 3.4](#)) ceci permet aussi d'identifier Γ à un sous-groupe du groupe $\text{O}(1, \infty)$ des isométries de \mathbb{H}^∞ . Le [théorème 6.4](#) s'applique, si bien que l'une des situations suivantes est satisfaite :

- (i) Γ fixe un point x à l'intérieur de \mathbb{H}^∞ .
- (ii) Le groupe Γ ne contient pas de transformation hyperbolique, ne fixe pas de point à l'intérieur de \mathbb{H}^∞ , mais fixe un point du bord de \mathbb{H}^∞ .
- (iii) Γ contient un élément hyperbolique f et, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice au plus 2, l'un des deux points fixes α de f est fixé par Γ .
- (iv) Γ contient un groupe libre non abélien.

Il s'agit désormais d'étudier les trois premières situations : le cas elliptique (i), le cas parabolique (ii) et le cas hyperbolique (iii).

6.5.1. *Situation elliptique.* Supposons que Γ fixe un point x de \mathbb{H}^∞ . Puisque Γ est de type fini, la [proposition 3.10](#) montre que Γ est conjugué à un sous-groupe des automorphismes d'une surface rationnelle S . Le [théorème 6.3](#) montre alors que Γ satisfait l'alternative de Tits.

6.5.2. *Situation parabolique et stabilisateurs d'une classe nef.* Plaçons nous maintenant dans la situation (ii). L'ensemble limite de Γ est donc réduit à un singleton $\{\alpha\} \subset \partial \mathbb{H}^\infty$. Soit l un élément de $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbf{C}))$ qui détermine α ; puisque Γ ne contient aucune isométrie hyperbolique, chaque élément γ de Γ fixe l :

$$(6.1) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma(l) = l.$$

PROPOSITION 6.12. *Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\text{Bir}(S)$, où S est une surface rationnelle. S'il existe un élément non nul l de $\mathcal{Z}^+(S)$ qui est fixé par Γ , l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :*

- (a) *il existe une transformation birationnelle $\phi : S' \dashrightarrow S$ et une fibration elliptique ou rationnelle $\pi : S' \rightarrow B$ dont les fibres sont permutées par $\phi^{-1} \circ \Gamma \circ \phi$;*
- (b) *il existe une transformation birationnelle $\phi : S' \dashrightarrow S$ et un sous-groupe d'indice fini Γ_0 dans Γ tel que $\phi^{-1} \circ \Gamma_0 \circ \phi$ soit contenu dans $\text{Aut}^0(S')$.*

Dans les deux cas, Γ vérifie l'alternative de Tits.

Démonstration en présence d'un élément parabolique. Si Γ contient un élément parabolique γ , l est proportionnel à la classe du fibré en droites associé à l'unique fibration γ -invariante. L'équation 6.1 montre alors que cette fibration est Γ -invariante. Il reste à voir que l'alternative de Tits est satisfaite.

Si γ est un twist de Halphen, la fibration est elliptique et le groupe Γ est virtuellement abélien (voir le §5.2). Si γ est un twist de De Jonquières, la fibration est rationnelle et Γ est isomorphe à un sous-groupe de Jonq . On conclut à l'aide du lemme 6.7. \square

Ceci ne termine pas la démonstration de la proposition, car il se peut *a priori* que Γ ne contienne aucun élément parabolique. Nous aurons besoin dans ce cas de la construction suivante.

6.5.3. *Graphes duaux et éclatements.* Soit $D = \sum a_i E_i$, $a_i > 0$ pour tout i , un diviseur effectif à croisements normaux dont les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles lisses. Soit \mathcal{G} le graphe dual de D , i.e. le graphe d'incidence des courbes C_i : les sommets de \mathcal{G} sont en bijection avec les courbes C_i et les arêtes joignant C_i à C_j , $i \neq j$, sont en bijection avec les points d'intersection de C_i avec C_j . Le graphe \mathcal{G} est un graphe fini non orienté. La donnée du diviseur D permet alors de munir \mathcal{G} d'une distance $\text{dist}_{\mathcal{G}}$ définie en imposant que la longueur de toute arête joignant deux courbes adjacentes C_i et C_j est égale à

$$\text{dist}_{\mathcal{G}}(C_i, C_j) = \frac{1}{a_i a_j}.$$

Si l'on éclate un point p de D , la transformée totale D' de D fait apparaître le diviseur exceptionnel E avec multiplicité a_i si p appartient à une unique courbe C_i , et $a_i + a_j$ si p est à l'intersection de C_i et C_j . Dans le premier cas, le graphe \mathcal{G}' de D' s'obtient en ajoutant un sommet E et une unique arête de longueur $1/a_i^2$ reliant E à C_i ; dans le second cas, un sommet E est ajouté sur l'arête de \mathcal{G} déterminée par p , et ce sommet découpe l'arête en deux nouvelles

arêtes $[C_i, E]$ et $[E, C_j]$ de longueurs respectives

$$\frac{1}{a_i(a_i + a_j)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_j(a_i + a_j)}.$$

En particulier, la distance entre C_i et C_j calculée dans \mathcal{G} est égale à celle calculée dans \mathcal{G}' .

Considérant l'ensemble des éclatements possibles de D (y compris infiniment proches), nous obtenons ainsi une famille de graphes métrisés dont nous pouvons prendre la limite inductive. Nous noterons $\overline{\mathcal{G}}$ l'espace limite. Cet espace métrique est muni de structures supplémentaires : si $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ désigne l'union des sommets des graphes finis \mathcal{G}' , alors $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ est une partie dénombrable dense de $\overline{\mathcal{G}}$ telle que

- (i) $\overline{\mathcal{G}}$ a localement une structure d'arbre réel dont l'union des points de branchement coïncide avec $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$;
- (ii) la structure de \mathbf{R} -arbre locale de $\overline{\mathcal{G}}$ induit une structure locale de \mathbf{Q} -arbre sur $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$.

Le lecteur pourra consulter les chapitres 3 et 6 de [32] pour une démonstration de ces résultats, l'article de revue [55] pour les actions de groupes sur les Λ -arbres, et [39] pour une situation proche de celle que nous étudions.

6.5.4. *Démonstration de la proposition 6.12.* Reprenons donc maintenant les hypothèses de la proposition 6.12 en supposant de surcroît que Γ ne contient que des éléments elliptiques. La proposition 3.10 permet de supposer que l est un élément de $Z(\mathbb{P}^2(\mathbf{C})) \otimes \mathbf{R}$. Nous pouvons donc conjuguer Γ à un sous-groupe de $\text{Bir}(S)$ où S est une surface rationnelle, l appartient à $\text{NS}(S) \otimes \mathbf{R}$ et $\langle l|l \rangle \geq 0$. Les courbes E_i de S contractées par un élément de Γ sont donc orthogonales à l (voir la proposition 3.8 et la remarque qui l'accompagne) : $\langle l|E_i \rangle = 0$. Ainsi, ou bien l est proportionnel à la classe du fibré en droites associé à une fibration rationnelle, ou bien les E_i sont en nombre fini. Dans le premier cas, la fibration rationnelle est Γ -invariante, Γ vérifie donc l'alternative de Tits et la proposition 6.12 est démontrée. Nous pouvons donc supposer que les courbes contractées E_1, \dots, E_k sont en nombre fini et d'auto-intersection négative ou nulle. Soit Δ l'union des courbes E_i ; le groupe Γ agit biholomorphiquement sur $S \setminus \Delta$.

Soit W le sous- \mathbf{Z} -module de $\text{NS}(S)$ engendré par les classes des courbes contractées E_i ; W est contenu dans l'orthogonal de l . Si la forme d'intersection est définie négative en restriction à W , le critère de contraction de Mumford-Grauert permet de conjuguer Γ à un groupe d'automorphismes (voir la démonstration de la proposition 3.10), et l'on conclut à l'aide du théorème 6.3. Si la forme d'intersection n'est pas définie négative en restriction à W , c'est que $l^2 = 0$ et que W intersecte la droite $\mathbf{R}l$ sur un diviseur effectif D , unique à

multiplication près par un entier positif. Nous noterons

$$D = \sum_{i=1}^m a_i E_i, \quad E_i \subset \Delta, \quad a_i \geq 0,$$

la décomposition de D en composantes irréductibles ; quitte à diviser a_i par leur plus grand diviseur commun et à contracter les courbes E_j pour lesquelles $a_j = 0$, nous pouvons supposer que les a_j sont strictement positifs et premiers entre eux dans leur ensemble.

Nous adaptons maintenant un argument issu de [39]. Pour cela nous noterons \mathcal{G} le graphe associé au diviseur D .

Notons $\overline{\mathcal{G}}$ la limite inductive des graphes \mathcal{G}' ainsi construits lorsqu'on considère toutes les surfaces S' dominant S qui sont obtenues en éclatant les points d'indétermination d'éléments de Γ . Cet espace métrique est localement un arbre réel, de valence infinie *a priori*, dont l'ensemble des points de branchement forme localement un \mathbf{Q} -arbre $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$. Cet espace est plus petit que l'ensemble $\overline{\mathcal{G}}$ défini au paragraphe précédent car nous n'éclatons que des points d'indétermination d'éléments de Γ . Puisque l est une classe Γ -invariante, le groupe Γ agit sur cet arbre par isométries.

Notons qu'avec les hypothèses en cours Γ ne peut avoir de point fixe global dans $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$. Par construction, en effet, chaque élément e de $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ correspond à une courbe E (dans une surface S' dominant S) qui est contractée sur un point q par au moins un élément g de Γ . Le point e n'est donc pas fixé par g : son image correspond à une courbe irréductible obtenue après éclatements de S' au-dessus du point q .

Si g est un élément de Γ , g est elliptique, donc g est birationnellement conjugué à un automorphisme g_0 d'une surface S_0 , et un des itérés $g_0^{k(g)}$ de g_0 est isotope à l'identité. Vue dans S_0 , la transformée totale de Δ est une union de courbes rationnelles qui sont fixées par $g_0^{k(g)}$. Ceci montre que chaque élément g de Γ possède au moins une orbite finie, de longueur divisant $k(g)$, dans $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$.

Supposons maintenant que \mathcal{G} est un arbre. Dans ce cas, $\overline{\mathcal{G}}$ est un arbre réel et $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$ est un \mathbf{Q} -arbre. Puisque chaque élément g de Γ a une orbite périodique dans $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$, chaque élément de Γ y a un point fixe. Comme Γ est de type fini, le corollaire 2 de [60, §6.5, p. 90] montre que Γ fixe un point de $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{Q}}$. Ceci contredit les affirmations précédentes.

Supposons maintenant que le groupe fondamental du graphe fini \mathcal{G} est isomorphe à \mathbf{Z} . En ce cas, il existe un unique lacet fermé sans aller retour dans \mathcal{G} engendrant $\pi_1(\mathcal{G})$, appelé cœur de \mathcal{G} et noté $C(\mathcal{G})$, sur lequel \mathcal{G} se rétracte par déformation. Utilisant à nouveau que tout élément g de Γ provient d'un automorphisme virtuellement isotope à l'identité, nous en déduisons que le cœur est Γ -invariant. Le groupe Γ agit donc par isométries sur la limite des

graphes finis $C(\mathcal{G}')$, c'est-à-dire sur un cercle \mathbb{S}^1 contenu dans $\overline{\mathcal{G}}$. Nous obtenons ainsi une action du groupe de type fini Γ par isométries du cercle, dont tous les éléments ont une orbite finie. Ceci montre qu'un sous-groupe d'indice fini dans Γ agit identiquement sur ce cercle. Ce sous-groupe fixe chaque courbe du cœur $C(\mathcal{G})$, et vérifie donc la propriété (b) de la [proposition 6.12](#).

Lorsque le groupe fondamental de \mathcal{G} est un groupe libre non abélien, un sous groupe d'indice fini de Γ agit trivialement sur $\pi_1(\mathcal{G})$. L'argument précédent s'applique à ce sous-groupe, ce qui permet de conclure.

Ceci termine la démonstration de la [proposition 6.12](#), et donc celle de l'alternative de Tits lorsque Γ ne contient pas d'élément hyperbolique.

6.5.5. *Situation hyperbolique.* Supposons enfin que Γ ne contient pas de groupe libre non abélien, qu'il contient une isométrie hyperbolique f et que l'un des points fixes $\alpha \in \partial\mathbb{H}^\infty$ de f est fixé par Γ . Soit l un élément de $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ qui détermine le point α de $\partial\mathbb{H}^\infty$. Soit D la droite $\mathbf{R}l$. Puisque cette droite est invariante sous l'action de Γ , nous obtenons un morphisme de Γ vers le groupe abélien $\mathrm{GL}(D) = \mathbf{R}^*$. Le noyau Γ_0 de ce morphisme ne contient aucune isométrie hyperbolique. *A priori*, Γ_0 n'est pas de type fini. Cependant, par les étapes précédentes et le [paragraphe 6.4](#), il existe une constante M telle que tout sous-groupe de type fini dans Γ_0 contient un sous-groupe résoluble d'indice inférieur à M dont la longueur de résolubilité est inférieure à M . Ceci montre que Γ_0 et Γ sont résolubles.

7. Applications

7.1. *Groupes de torsion.* Dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, tout groupe de torsion G est relativement compact, donc contenu dans un conjugué du groupe unitaire (voir les théorèmes de Schur, [20]). Le théorème suivant montre à la fois que cet énoncé n'a pas d'analogue au sein du groupe de Cremona, que la [proposition 3.10](#) ne peut être étendue à des groupes G qui ne sont pas de type fini, et que l'hypothèse « Γ est de type fini » est cruciale dans [6.5.4](#).

THÉORÈME 7.1 (Wright, [61]). *Il existe un sous-groupe G de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ — donc de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ — isomorphe au groupe abélien \mathbf{Q}/\mathbf{Z} tel que la fonction degré $g \mapsto \mathrm{deg}(g)$, ne soit pas bornée sur G .*

Dans le cas des groupes de type fini, nous disposons du résultat suivant.

THÉORÈME 7.2. *Soit S une surface complexe compacte kählérienne. Tout sous-groupe de torsion de $\mathrm{Bir}(S)$ de type fini est fini.*

Démonstration. Soit G un tel groupe. Par l'alternative de Tits, G est virtuellement résoluble. Comme tout groupe de torsion résoluble et de type fini est fini, le groupe G est fini. □

7.2. *Groupes résolubles.* L'alternative de Tits et la [partie 5](#) permettent aussi de décrire les sous-groupes résolubles de $\text{Bir}(S)$ qui ne sont pas virtuellement abéliens (voir [\[12\]](#) pour une preuve et des compléments).

THÉORÈME 7.3. *Soit S une surface complexe compacte kählérienne. Si G est un sous-groupe de type fini de $\text{Bir}(S)$ qui est résoluble et sans torsion, il existe un sous-groupe d'indice fini de G qui est abélien ou qui préserve un feuilletage.*

Par exemple, la transformation f_A de [l'exemple 2.1](#) et les translations du tore $E \times E$ engendrent un groupe résoluble non nilpotent préservant le feuilletage stable et le feuilletage instable de f . Des exemples analogues peuvent être construits à l'aide de transformations monomiales à la place de f_A .

8. Annexe : dynamique et centralisateur

8.1. *Le cas des difféomorphismes.* Soit S une surface complexe et f une transformation holomorphe de S . Soit q un point périodique de période k pour f . Nous dirons que q est hyperbolique si une valeur propre de la différentielle Df_q^k a un module strictement plus grand que 1 et l'autre un module strictement plus petit que 1. Nous noterons $W_{\text{loc}}^s(q)$ et $W_{\text{loc}}^u(q)$ (resp. $W^s(q)$ et $W^u(q)$) les variétés stables et instables locales (resp. globales) de f en q .

Soit g un difféomorphisme holomorphe de S qui commute avec f . La transformation g permute les points périodiques hyperboliques de période k de f . Si cet ensemble de points périodiques est fini, de cardinal N_k strictement positif, alors le sous-groupe A_k de $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$ constitué des difféomorphismes de S qui fixent chacun de ces points est d'indice inférieur à $N_k!$ dans $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$. Les variétés stables et instables de chacun de ces points q sont également invariantes sous l'action de A_k .

Fixons maintenant l'un des N_k points q . La variété instable $W^u(q)$ (resp. stable $W^s(q)$) est paramétrée par une application holomorphe injective $\xi_q^+ : \mathbf{C} \rightarrow S$ (resp. ξ_q^-) satisfaisant $\xi_q^+(0) = q$ (resp. $\xi_q^-(0) = q$). On dispose donc d'un morphisme

$$\alpha : \begin{cases} A_k & \rightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \\ g & \mapsto \alpha(g) = (\alpha^-(g), \alpha^+(g)) \end{cases}$$

tel que $\xi_q^-(\alpha^-(g)z) = g(\xi_q^-(z))$ et $\xi_q^+(\alpha^+(g)z) = g(\xi_q^+(z))$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Lorsque l'union des variétés stables et instables de q est Zariski-dense dans S , la restriction de tout élément $g \in A_k$ aux germes $W_{\text{loc}}^s(q)$ et $W_{\text{loc}}^u(q)$ détermine entièrement la transformation $g : S \rightarrow S$, si bien que α est injectif. En particulier, A_k est abélien et $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$ contient un sous-groupe abélien d'indice inférieur à $(N_k!)$.

Considérons le sous-ensemble Λ de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ constitué des couples (x, y) pour lesquels $\xi_q^-(x)$ est égal à $\xi_q^+(y)$ et montrons que Λ est un sous-ensemble discret de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Soit (x, y) un point de Λ et m le point de S défini par $m = \xi_q^-(x) = \xi_q^+(y)$. Dans un voisinage suffisamment petit de m , les composantes connexes de $W^s(q)$ et $W^u(q)$ contenant m sont deux sous-variétés complexes distinctes. Elles ne peuvent donc s'intersecter qu'un nombre fini de fois. Il existe ainsi un voisinage \mathcal{U} de x et un voisinage \mathcal{V} de y tels que $\xi_q^-(\mathcal{U})$ et $\xi_q^+(\mathcal{V})$ ne s'intersectent qu'au point m . Le point (x, y) est donc l'unique point de Λ dans l'ouvert $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, ce qui montre que Λ est discret. Par ailleurs, l'ensemble Λ ne coupe les axes $\{0\} \times \mathbf{C}$ et $\mathbf{C} \times \{0\}$ qu'au point $(0, 0)$ car ξ_q^+ et ξ_q^- sont injectives.

PROPOSITION 8.1. *Soit f un difféomorphisme holomorphe d'une surface complexe connexe S . Supposons qu'il existe un entier k tel que*

- (i) *l'ensemble des points périodiques hyperboliques de f de période k est fini et non vide;*
- (ii) *pour l'un de ces points périodiques q , les variétés stables et instables s'intersectent en au moins un point distinct de q .*

Le groupe cyclique engendré par f est alors d'indice fini dans le groupe des difféomorphismes holomorphes de S qui commutent avec f .

Démonstration. Conservons les notations employées jusqu'à présent et notons A l'image du groupe A_k par le morphisme α . Puisque $W^-(q)$ et $W^+(q)$ se coupent ailleurs qu'en q , ces deux « variétés » se coupent infiniment et forment un ensemble Zariski-dense, au sens où il existe un voisinage \mathcal{U} de q tel que toute fonction holomorphe sur \mathcal{U} qui est nulle sur $W^+(q) \cap \mathcal{U}$ est identiquement nulle. Nous pouvons donc affirmer que le morphisme α est injectif et que l'ensemble Λ est une partie discrète et infinie de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ qui est invariante sous l'action diagonale de A . Soit \bar{A} l'adhérence de A dans $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$. Si A n'était pas discret, \bar{A} contiendrait un sous-groupe à un paramètre non trivial de la forme $t \mapsto (e^{tu}, e^{tv})$. Puisque Λ est discret, Λ est \bar{A} -invariant et l'une des trois propriétés suivantes devrait alors être satisfaite : (i) $\Lambda = \{(0, 0)\}$, (ii) $u = 0$ et $\Lambda \subset \mathbf{C} \times \{0\}$, ou (iii) $v = 0$ et $\Lambda \subset \{0\} \times \mathbf{C}$. Ceci est impossible car Λ est infini et ne coupe pas les axes de coordonnées. Cette contradiction montre que A est discret ; en particulier, A contient un sous-groupe abélien libre A' d'indice fini de rang au plus 2. L'automorphisme f^k engendre un sous-groupe cyclique infini de A_k . Le rang de A' est donc minoré par 1 et, s'il vaut 1, f engendre un sous-groupe d'indice fini de $\text{Cent}(f, \text{Aut}(S))$. Il suffit donc de montrer que le rang de A' ne peut être égal à 2. Si c'était le cas, A' serait un sous-groupe discret et cocompact de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$; le point $(0, 0)$ serait donc une valeur d'adhérence de Λ . Ceci contredit la discrétude de Λ et termine la preuve. □

COROLLAIRE 8.2 (Théorème de Lamy renforcé, voir [48]). *Soit h un automorphisme de type Hénon du plan \mathbf{C}^2 . Le groupe cyclique engendré par h est d'indice fini dans le groupe des biholomorphismes de \mathbf{C}^2 qui commutent à h .*

Démonstration. Si k est suffisamment grand, h possède un nombre fini strictement positif de points périodiques hyperboliques de période k dont les variétés stables et instables se recoupent (voir [4]). \square

THÉORÈME 8.3. *Soit f un difféomorphisme analytique d'une surface réelle, compacte et connexe Σ . Si l'entropie topologique de f est positive, le centralisateur de f dans le groupe des difféomorphismes analytiques de Σ est virtuellement cyclique.*

Démonstration. D'après [47], f possède des points périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables se recoupent et sont donc Zariski-denses, au sens où toute fonction analytique nulle le long de ces variétés est identiquement nulle. Soit q un tel point périodique, soit k sa période, et soit $\xi : \mathbf{R} \rightarrow \Sigma$ une paramétrisation de $W^u(q)$ qui linéarise f^k . Si g commute à f et préserve q , alors g préserve $W^u(q)$ et est également linéaire le long de $\xi(t)$. Le paragraphe précédent s'applique maintenant mot à mot. \square

Cette stratégie s'applique en dimension plus grande, et fournit une explication dynamique heuristique au théorème principal de [25] (voir [12]); voir aussi [14] pour une application.

8.2. *Dynamique des transformations rationnelles et centralisateur.* Soit f une transformation birationnelle d'une surface projective complexe S pour laquelle $\lambda(f) > 1$. D'après le paragraphe 2.2, nous pouvons supposer que f est algébriquement stable, ce qui signifie que les orbites positives $f^n(x)$, $n \geq 0$, des éléments x de $\text{Ind}(f^{-1})$ n'intersectent pas $\text{Ind}(f)$. Nous dirons que f satisfait la « condition de Bedford et Diller » si la somme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda(f)^n} \log(\text{dist}(f^n(x), \text{Ind}(f)))$$

est une somme finie pour tout point x de $\text{Ind}(f^{-1})$. On remarquera que cette condition est vérifiée de manière triviale si f est un automorphisme ou si les points d'indétermination de f^{-1} ont une orbite positive finie. Cette condition « générique » n'est pas toujours satisfaite (voir [3, prop. 4.5] et [31]).

Nous dirons qu'un point q de S est un point périodique de f de période k si f et ses itérés f^2, \dots, f^k sont holomorphes sur un voisinage de q , si $f^k(q) = q$ et si $f^l(q)$ est distinct de q lorsque l est compris entre 1 et $k - 1$. Les notions de point périodique hyperbolique et de variété stable ou instable locale s'étendent de manière similaire. Les variétés stables et instables globales sont définies par

$$W^\pm(q) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^n(W_{\text{loc}}^\pm(q))$$

où l'on prend ici l'union des transformées strictes de $W_{\text{loc}}^{\pm}(q)$ par f^n ; $W^-(q)$ et $W^+(q)$ sont les prolongements analytiques des germes $W_{\text{loc}}^-(q)$ et $W_{\text{loc}}^+(q)$. Ils sont paramétrés par des applications holomorphes $\xi_q^{\pm} : \mathbf{C} \rightarrow S$ envoyant l'origine sur q et réalisant un biholomorphisme local d'un voisinage de l'origine sur la variété $W_{\text{loc}}^{\pm}(q)$. Ces applications peuvent ne pas être injectives : si une courbe E est contractée par f sur un point p et si $W^+(q)$ coupe l fois E , alors $W^+(q)$ passe l fois par le point p (voir les figures de [54]).

Le théorème suivant permet d'étendre la stratégie du paragraphe précédent aux transformations birationnelles.

THÉORÈME 8.4 ([5], [10] [3], [28]). *Si f est une transformation birationnelle d'une surface projective complexe qui est entropique et satisfait la condition de Bedford et Diller, alors f possède une infinité de points périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables se recoupent. Ces points périodiques s'équidistribuent vers une mesure de probabilité f -invariante dont l'entropie vaut $\log(\lambda(f))$.*

LEMME 8.5. *Soit q un point périodique hyperbolique et ξ_q^- et ξ_q^+ les paramétrisations de ses variétés stable et instable. L'ensemble Λ des couples (x, y) tels que $\xi_q^+(x) = \xi_q^-(y)$ est un sous-ensemble discret de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ qui ne rencontre les axes de coordonnées qu'en l'origine.*

Démonstration. Soient (x, y) un point de Λ et m le point $\xi_q^+(x) = \xi_q^-(y)$. Les variétés stables et instables peuvent *a priori* passer une infinité de fois par le point m . Cependant, puisque chacune de ces variétés est l'union croissante des $f^{\pm n}(W_{\text{loc}}^{\pm}(q))$, il existe deux ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} de \mathbf{C} contenant respectivement x et y et un ouvert \mathcal{W} de S contenant m tels que $\xi_q^+(\mathcal{U}) \cap \mathcal{W}$ et $\xi_q^-(\mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$ sont deux courbes analytiques distinctes de \mathcal{W} . Quitte à restreindre ces ouverts, nous pouvons supposer que $\xi_q^+(\mathcal{U})$ et $\xi_q^-(\mathcal{V})$ ne se coupent qu'une fois, c'est-à-dire que (x, y) est le seul point de Λ dans l'ouvert $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. L'ensemble Λ est donc discret. Il ne coupe les axes de coordonnées qu'à l'origine car ξ_q^+ (resp. ξ_q^-) ne repasse pas par q : en effet, q étant un point périodique hyperbolique, aucune courbe n'est contractée sur q par un itéré de f . □

PROPOSITION 8.6. *Soit f une transformation birationnelle d'une surface projective complexe S . Si $\lambda(f) > 1$, et si f vérifie la condition de Bedford et Diller, le groupe engendré par f est d'indice fini dans $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$.*

Démonstration. L'ensemble des points périodiques hyperboliques de f de période k est un ensemble fini. Le [théorème 8.4](#) permet de choisir un entier k pour lequel existe un tel point périodique q dont les variétés stables et instables se recoupent une infinité de fois et forment chacune un ensemble Zariski-dense de S .

Soit g une transformation birationnelle de S qui commute avec f . Si $W^+(p)$ est une variété instable Zariski-dense de f en un point périodique p , g est homomorphe au point générique de $W^+(p)$; ceci permet de définir g par prolongement analytique le long de toute la variété $W^+(p)$, même si celle-ci passe par les points d'indétermination de g (en d'autres termes, on considère la transformée stricte de cette variété par g). Avec cette convention, g permute les variétés stables et instables des points périodiques hyperboliques de f . Puisque f a un nombre fini N_k de points périodiques hyperboliques de période k , il existe un sous-groupe B_k dans $\text{Cent}(f, \text{Bir}(S))$ d'indice majoré par $(N_k!)$ dont tous les éléments fixent les variétés stables et instables $W^-(q)$ et $W^+(q)$. Le reste de la démonstration de la [proposition 8.1](#) s'applique mot à mot. \square

Lorsque f ne vérifie pas la condition de Bedford et Diller, on peut encore démontrer le [théorème B](#) par un argument dynamique (voir [\[12\]](#)).

Références

- [1] H. BASS and A. LUBOTZKY, Automorphisms of groups and of schemes of finite type, *Israel J. Math.* **44** (1983), 1–22. [MR 0693651](#). [Zbl 0517.14015](#). doi: [10.1007/BF02763168](#).
- [2] A. BEAUVILLE, p -elementary subgroups of the Cremona group, *J. Algebra* **314** (2007), 553–564. [MR 2344578](#). [Zbl 1126.14017](#). doi: [10.1016/j.jalgebra.2005.07.040](#).
- [3] E. BEDFORD and J. DILLER, Energy and invariant measures for birational surface maps, *Duke Math. J.* **128** (2005), 331–368. [MR 2140266](#). [Zbl 1076.37031](#). doi: [10.1215/S0012-7094-04-12824-6](#).
- [4] E. BEDFORD, M. LYUBICH, and J. SMILLIE, Polynomial diffeomorphisms of \mathbf{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112** (1993), 77–125. [MR 1207478](#). doi: [10.1007/BF01232426](#).
- [5] ———, Polynomial diffeomorphisms of \mathbf{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112** (1993), 77–125. [MR 1207478](#). doi: [10.1007/BF01232426](#).
- [6] M. BESTVINA, M. FEIGN, and M. HANDEL, The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$. II. A Kolchin type theorem, *Ann. of Math.* **161** (2005), 1–59. [MR 2150382](#). doi: [10.4007/annals.2005.161.1](#).
- [7] S. BOUCKSOM, C. FAVRE, and M. JONSSON, Degree growth of meromorphic surface maps, *Duke Math. J.* **141** (2008), 519–538. [MR 2387430](#). [Zbl 1185.32009](#). doi: [10.1215/00127094-2007-004](#).
- [8] M. R. BRIDSON and A. HAEFLIGER, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, *Grundle. Math. Wissen.* **319**, Springer-Verlag, New York, 1999. [MR 1744486](#). [Zbl 0988.53001](#).

- [9] M. BRUNELLA, *Birational Geometry of Foliations*, *Publicações Matemáticas do IMPA*. [IMPA Math. Publ.], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004. MR 2114696. Zbl 1082.32022.
- [10] S. CANTAT, Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$, *Acta Math.* **187** (2001), 1–57. MR 1864630. Zbl 1045.37007. doi: 10.1007/BF02392831.
- [11] ———, Version kählérienne d’une conjecture de Robert J. Zimmer, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), 759–768. MR 2103473. doi: 10.1016/j.ansens.2004.04.003.
- [12] ———, Sur les groupes de transformations birationnelles du plan (version longue), 2006, preprint. Available at <http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/publications.html>.
- [13] ———, Transformations rationnelles : existence, exemples et rigidité, 2006, *Panorama et Synthèse* **30**, to appear.
- [14] S. CANTAT and D. CERVEAU, Analytic actions of mapping class groups on surfaces, *J. Topol.* **1** (2008), 910–922. MR 2461860. Zbl 05488499. doi: 10.1112/jtopol/jtn028.
- [15] S. CANTAT and C. FAVRE, Symétries birationnelles des surfaces feuilletées, *J. Reine Angew. Math.* **561** (2003), 199–235. MR 1998612. Zbl 1070.32022. doi: 10.1515/crll.2003.066.
- [16] S. CANTAT and S. LAMY, Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan, *Geom. Dedicata* **123** (2006), 201–221. MR 2299735. Zbl 1115.14055. doi: 10.1007/s10711-007-9126-z.
- [17] P.-A. CHERIX, M. COWLING, P. JOLISSAINT, P. JULG, and A. VALETTE, *Groups with the Haagerup Property*, *Progr. Math.* **197**, Birkhäuser, Basel, 2001, Gromov’s a -T-menability. MR 1852148. Zbl 1030.43002.
- [18] J. L. COOLIDGE, *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, Dover Publications, New York, 1959. MR 0120551. Zbl 0085.36403.
- [19] K. CORLETTE, Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry, *Ann. of Math.* **135** (1992), 165–182. MR 1147961. Zbl 0768.53025. doi: 10.2307/2946567.
- [20] C. W. CURTIS and I. REINER, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons, New York, 1988, reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication. MR 1013113. Zbl 0634.20001.
- [21] M. DEMAZURE, Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), 507–588. MR 0284446. Zbl 0223.14009. Available at http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_4_507_0.
- [22] J. DÉSERTE, Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), Art. ID 71701, 27. MR 2233717. doi: 10.1155/IMRN/2006/71701.

- [23] J. DÉSERTI, Sur les automorphismes du groupe de Cremona, *Compos. Math.* **142** (2006), 1459–1478. MR 2278755. Zbl 1109.14015. doi: 10.1112/S0010437X06002478.
- [24] J. DILLER and C. FAVRE, Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 1135–1169. MR 1867314. Zbl 1112.37308. Available at http://muse.jhu.edu/journals/american_journal_of_mathematics/v123/123.6diller.pdf.
- [25] T.-C. DINH and N. SIBONY, Groupes commutatifs d’automorphismes d’une variété kählérienne compacte, *Duke Math. J.* **123** (2004), 311–328. MR 2066940. doi: 10.1215/S0012-7094-04-12323-1.
- [26] I. V. DOLGACHEV, Rational surfaces with a pencil of elliptic curves, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **30** (1966), 1073–1100. MR 0218356.
- [27] I. V. DOLGACHEV and D.-Q. ZHANG, Coble rational surfaces, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 79–114. MR 1827278. Zbl 1056.14054.
- [28] R. DUJARDIN, Laminar currents and birational dynamics, *Duke Math. J.* **131** (2006), 219–247. MR 2219241. Zbl 1099.37037. doi: 10.1215/S0012-7094-06-13122-8.
- [29] J. FARAUT and K. HARZALLAH, Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **24** (1974), xiv, 171–217. MR 0365042. Available at http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_171_0.
- [30] B. FARB and P. SHALEN, Real-analytic actions of lattices, *Invent. Math.* **135** (1999), 273–296. MR 1666834. Zbl 0954.22007. doi: 10.1007/s002220050286.
- [31] C. FAVRE, Points périodiques d’applications birationnelles de \mathbf{P}^2 , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), 999–1023. MR 1656005. Zbl 0924.58083. Available at http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_999_0.
- [32] C. FAVRE and M. JONSSON, *The Valutive Tree, Lecture Notes in Math.* **1853**, Springer-Verlag, New York, 2004. MR 2097722. Zbl 1064.14024.
- [33] ———, Eigenvaluations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), 309–349. MR 2339287. Zbl 1135.37018. doi: 10.1016/j.ansens.2007.01.002.
- [34] E. FORMANEK and C. PROCESI, The automorphism group of a free group is not linear, *J. Algebra* **149** (1992), 494–499. MR 1172442. Zbl 0780.20023. doi: 10.1016/0021-8693(92)90029-L.
- [35] É. GHYS, Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l’identité, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **24** (1993), 137–178. MR 1254981. Zbl 0809.58004. doi: 10.1007/BF01237675.
- [36] ———, Groups acting on the circle, *Enseign. Math.* **47** (2001), 329–407. MR 1876932. Zbl 1044.37033.
- [37] É. GHYS and P. D. L. H. HARPE, *Sur les Groupes Hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, *Progr. Math.* **83**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [38] M. H. GIZATULLIN, Rational G -surfaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), 110–144, 239. MR 0563788. Zbl 0428.14022.

- [39] M. H. GIZATULLIN and V. I. DANILOV, Automorphisms of affine surfaces. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **39** (1975), 523–565, 703. MR 0376701.
- [40] M. GROMOV, Asymptotic invariants of infinite groups, in *Geometric Group Theory, Vol. 2* (Sussex, 1991), *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295. MR 1253544.
- [41] P. DE LA HARPE and A. VALETTE, La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger), *Astérisque* **175** (1989), 158, with an appendix by M. Burger. MR 1023471.
- [42] J. HUBBARD and P. PAPADOPOULOS, Newton’s method applied to two quadratic equations in \mathbb{C}^2 viewed as a global dynamical system, *Mem. Amer. Math. Soc.* **191** (2008), vi+146. MR 2376103.
- [43] J. HUBBARD, P. PAPADOPOULOS, and V. VESELOV, A compactification of Hénon mappings in \mathbb{C}^2 as dynamical systems, *Acta Math.* **184** (2000), 203–270. MR 1768111. Zbl 0987.37035. doi: 10.1007/BF02392629.
- [44] V. A. ISKOVSKIKH and I. R. SHAFAREVICH, Algebraic surfaces, in *Algebraic Geometry, II, Encycl. Math. Sci.* **35**, Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 127–262. MR 1392959.
- [45] N. V. IVANOV, Mapping class groups, in *Handbook of Geometric Topology*, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 523–633. MR 1886678. Zbl 1002.57001.
- [46] G. A. JONES and D. SINGERMAN, *Complex Functions. An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987. MR 0890746. Zbl 0608.30001.
- [47] A. KATOK, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), 137–173. MR 0573822. Zbl 0445.58015. Available at http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1980__51__137_0.
- [48] S. LAMY, L’alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, *J. Algebra* **239** (2001), 413–437. MR 1832900. Zbl 1040.37031. doi: 10.1006/jabr.2000.8701.
- [49] R. LAZARUSFELD, *Positivity in Algebraic Geometry. I*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **48**, Springer-Verlag, New York, 2004, Classical setting : line bundles and linear series. MR 2095471. Zbl 1093.14501.
- [50] D. I. LIEBERMAN, Compactness of the Chow scheme : Applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds, in *Fonctions de plusieurs variables complexes, III* (Sém. François Norguet, 1975–1977), *Lecture Notes in Math.* **670**, Springer-Verlag, New York, 1978, pp. 140–186. MR 0521918.
- [51] W. MAGNUS, Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups, *Math. Z.* **170** (1980), 91–103. MR 0558891. Zbl 0433.20033. doi: 10.1007/BF01214715.
- [52] Y. I. MANIN, *Cubic Forms*, second ed., *North-Holland Math. Library* **4**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986, Algebra, geometry, arithmetic, translated from the Russian by M. Hazewinkel. MR 0833513. Zbl 0582.14010.

- [53] G. A. MARGULIS, *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **17**, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1090825. Zbl 0732.22008.
- [54] C. T. MCMULLEN, Gallery : Dynamics on blowups of \mathbb{P}^2 , 2005. Available at <http://www.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>.
- [55] J. W. MORGAN, Λ -trees and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.* **26** (1992), 87–112. MR 1100579. Zbl 0767.05054. doi: 10.1090/S0273-0979-1992-00237-9.
- [56] D. R. MORRISON, On $K3$ surfaces with large Picard number, *Invent. Math.* **75** (1984), 105–121. MR 0728142. Zbl 0509.14034. doi: 10.1007/BF01403093.
- [57] K. OGUIISO, Tits alternative in hyperkähler manifolds, *Math. Res. Lett.* **13** (2006), 307–316. MR 2231119.
- [58] I. PAYS and A. VALETTE, Sous-groupes libres dans les groupes d’automorphismes d’arbres, *Enseign. Math.* **37** (1991), 151–174. MR 1115748. Zbl 0744.20024.
- [59] F. RONGA and T. VUST, Birational diffeomorphisms of the real projective plane, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), 517–540. MR 2165201. Zbl 1080.14020.
- [60] J.-P. SERRE, *Arbres, Amalgames, SL_2* , *Astérisque* **46**, Société Mathématique de France, Paris, 1977, avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. MR 0476875. Zbl 0369.20013.
- [61] D. WRIGHT, Abelian subgroups of $\text{Aut}_k(k[X, Y])$ and applications to actions on the affine plane, *Illinois J. Math.* **23** (1979), 579–634. MR 0540400. Zbl 0461.20011. Available at <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.ijm/1256047936>.

(Received: April 8, 2008)

UNIVERSITÉ DE RENNES I, RENNES, FRANCE

E-mail: cantat@univ-rennes1.fr