

## NON SIMPLICITÉ DU GROUPE DE CREMONA SUR TOUT CORPS

ANNE LONJOU

RÉSUMÉ. Using a theorem of Dahmani, Guirardel and Osin we prove that the Cremona group in 2 dimension is not simple, over any field. More precisely, we show that some elements of this group satisfy a weakened WPD property which is equivalent in our particular context to the Bestvina and Fujiwara's one.

## INTRODUCTION

Une question importante lors de l'étude d'un groupe est de savoir s'il est simple ou non, et dans ce dernier cas de construire des sous-groupes distingués. Ces questions se sont posées dès la fin du 19<sup>ème</sup> siècle pour le groupe de Cremona  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$ , le groupe des transformations birationnelles du plan projectif sur un corps  $K$ . Cependant il a fallu attendre 2010 pour que S. Lamy et S. Cantat [CL13] y répondent dans le cas où  $K$  est un corps algébriquement clos. Ils font agir ce groupe par isométries sur un sous-espace  $\mathbb{H}^\infty$  de l'espace de Picard-Manin, analogue à l'espace hyperbolique mais en dimension infinie, et obtiennent de nombreux sous-groupes distingués. L'espace de Picard-Manin est défini comme la limite inductive des groupes de Picard des surfaces obtenues en éclatant toutes suites finies de points, infiniment proches ou non, de  $\mathbb{P}_K^2$  (voir [Man86], [Can11] et le paragraphe §2.1). Leur article est constitué de deux parties. Dans la première, ils donnent un critère pour qu'un élément vérifie une variante de la propriété de la petite simplification, qu'ils appellent tendu (« tight element » dans leur terminologie). Un tel élément  $g$  doit être hyperbolique et vérifier les deux conditions suivantes :

- (1) Son axe est rigide : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C \geq 0$  tel que si  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  satisfait  $\text{Diam}(\text{Tube}_\varepsilon(\text{Axe}(g)) \cap \text{Tube}_\varepsilon(f \text{Axe}(g))) \geq C$  alors  $f \text{Axe}(g) = \text{Axe}(g)$ .
- (2) Pour tout élément  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$ , si  $f \text{Axe}(g) = \text{Axe}(g)$  alors  $fgf^{-1} = g^\pm$ .

Leur critère s'énonce comme suit :

**Théorème 1.** [CL13] *Soit  $K$  un corps algébriquement clos. Si  $g \in \text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  est tendu alors il existe un entier  $n$  tel que pour tout élément  $h$  non trivial appartenant au sous-groupe normal engendré par  $g^n$ ,  $\deg(h) \geq \deg(g^n)$ . En particulier, le sous-groupe normal  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  est propre.*

La seconde partie consiste à montrer qu'il existe des éléments tendus dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$ . Nous y reviendrons par la suite.

Au même moment F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin [DGO] généralisent également la théorie de la petite simplification pour des groupes agissant par isométries sur des espaces  $\delta$ -hyperboliques. Rappelons qu'un espace métrique géodésique  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique si pour chaque triangle de  $X$ , tout côté est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de la réunion de ses deux autres côtés. Une de leur motivation est d'étudier le mapping class group d'une surface de Riemann hyperbolique. Ce groupe agit sur le complexe des courbes qui est un espace  $\delta$ -hyperbolique non localement

compact (tout comme l'espace  $\mathbb{H}^\infty$  mentionné plus haut). Dans ce contexte, ils construisent des sous-groupes distingués propres qui sont de plus libres et purement pseudo-Anosov, c'est-à-dire que tous leurs éléments non triviaux sont pseudo-Anosov. Ils répondent ainsi à deux questions restées longtemps ouvertes. Une manière de produire des familles à petite simplification est de se ramener à la propriété WPD (« weakly properly discontinuous »), proposée par M. Bestvina et K. Fujiwara [BF02] en 2002 dans le contexte du mapping class group. D. Osin [Osi] englobe cette notion ainsi que d'autres sous le terme d'action acylindrique [Osi]. Il unifie ainsi plusieurs travaux concernant des groupes différents. Suivant la terminologie introduite par R. Coulon dans son exposé au séminaire Bourbaki [Cou14], nous dirons de manière équivalente que le groupe  $G$  agit discrètement le long de l'axe de  $g$  ou qu'un élément  $g$  satisfait la propriété WPD si pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe deux points suffisamment éloignés sur l'axe de  $g$  tels qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments du groupe  $G$  déplaçant ces deux points d'au plus  $\varepsilon$ . L'avantage de la formulation de R. Coulon est d'explicitier le rôle du groupe  $G$ .

Le lien entre la théorie de la petite simplification et la propriété WPD se fait au travers de deux énoncés de [Gui14, Theorem 1.3 et Corollary 2.9]. Le premier nous dit que dans le groupe normal engendré par une famille vérifiant la propriété de petite simplification, les éléments ont une grande longueur de translation, et le second nous dit que lorsqu'un élément  $g$  satisfait la propriété WPD, les conjugués de  $\langle g^n \rangle$  forment une famille satisfaisant la propriété de petite simplification. En réunissant ces deux énoncés (voir également [DGO, Theorem 5.3, Proposition 6.34]), nous obtenons le théorème :

**Théorème 2.** [DGO] *Soient  $C > 0$ ,  $G$  un groupe agissant par isométrie sur un espace  $X$   $\delta$ -hyperbolique et  $g$  un élément hyperbolique de  $G$ . Si  $G$  agit discrètement le long de l'axe de  $g$  alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout élément  $h$  non trivial et appartenant au sous-groupe normal engendré par  $g^n$ ,  $L(h) > C$  où  $L$  est la longueur de translation. En particulier, pour  $n$  assez grand, le sous-groupe normal  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$  de  $G$  est propre.*

L'objectif de cet article est d'obtenir une preuve de la non simplicité du groupe de Cremona en utilisant le théorème 2. Il s'agit donc d'exhiber des éléments satisfaisant la propriété WPD. Nous trouvons de tels éléments dans  $\text{Aut}(\mathbb{A}_K^2)$  qui est un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  via l'application qui envoie  $(x, y) \in \mathbb{A}_K^2$  sur  $[x : y : 1] \in \mathbb{P}_K^2$ . Notre résultat principal est alors :

**Proposition 3.** *Soient  $n \geq 2$  et  $K$  un corps de caractéristique ne divisant pas  $n$ . Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  agit discrètement le long de l'axe de l'application :*

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_K^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_K^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, y^n - x) \end{array} .$$

En utilisant le théorème 2 nous obtenons le théorème suivant comme corollaire immédiat de la proposition 3.

**Théorème 4.** *Pour tout corps  $K$ , le groupe de Cremona  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  n'est pas simple.*

Dans leur article, [CL13] exhibent de deux manières différentes des éléments tendus, selon si le corps est  $\mathbb{C}$  ou un corps algébriquement clos quelconque. Dans le cas où  $K$  est un corps algébriquement clos, ils éclatent des points particuliers de  $\mathbb{P}_K^2$  pour obtenir une surface  $S$  ayant des automorphismes de grand degré dynamique. Par exemple, éclater les 10 points doubles d'une sextique rationnelle donne une telle surface, dite de Coble. Si le corps n'est pas algébriquement clos, les automorphismes sont à coefficients dans la clôture algébrique mais pas dans le corps  $K$  initial. Dans le cas où le corps est  $\mathbb{C}$ , ils considèrent un élément « général » du groupe de Cremona de la forme  $g = a \circ J$  où  $a \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $J$  est une transformation de Jonquières, et ils montrent qu'il est tendu. Le qualificatif général signifie que n'importe quel élément  $a \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  convient, quitte à enlever un nombre dénombrable de fermés de Zariski dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Ainsi

si le corps de base est dénombrable, il se peut qu'il n'y ait pas d'application générale. C'est pourtant cette méthode que nous généralisons. En effet, dans leur preuve, il est nécessaire que  $g$  satisfasse deux conditions. La première impose aux points base de  $g$  et de  $g^{-1}$  d'être dans  $\mathbb{P}_K^2$ . La seconde impose aux points base des itérés de  $g$  d'être disjoints de ceux des itérés de  $g^{-1}$ . Les applications  $h_n$  que nous considérons se décomposent comme la composée d'une involution de Jonquières et de l'involution linéaire qui échange les coordonnées,  $h_n = (y, x) \circ (y^n - x, y)$ . La première condition n'est pas vérifiée car  $h_n$  et  $h_n^{-1}$  n'ont qu'un seul point base dans  $\mathbb{P}_K^2$  mais nous verrons que ce n'est pas un problème. Concernant la seconde condition, composer par l'élément  $(y, x) \in \mathrm{PGL}_3(K)$  permet de séparer les points base des itérés de  $h_n$  de ceux des itérés de  $h_n^{-1}$ . Ainsi cet élément particulier joue le même rôle que l'élément général  $a$  ci-dessus.

Remarquons que si  $K$  est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ , pour tout entier  $k \geq 1$ , le sous-groupe normal engendré par  $h_p^k$  est le groupe de Cremona  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$ . En effet,  $h_p$  normalise les translations :

$$(x^p - y, x) \circ (x + a, y + b) \circ (y, y^p - x) = (x + a^p - b, y + a).$$

On obtient que  $\langle\langle h_p^k \rangle\rangle$  contient une translation non triviale. Le théorème de Noether permet alors de montrer l'égalité  $\langle\langle h_p^k \rangle\rangle = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$ , voir par exemple [CD13, Proposition 5.12]. Plus généralement, sur un corps infini de caractéristique divisant  $n$ , l'application  $h_n$  ne satisfait pas la propriété WPD, ce qui justifie l'énoncé de la proposition 3.

Récemment, N.I. Shepherd-Barron [SB, Corollary 7.10] prouve que tout élément hyperbolique du groupe de Cremona sur un corps  $K$  fini engendre un sous-groupe normal propre. En particulier,  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  n'est pas simple pour tout corps  $K$  fini. Il semble que sa stratégie de preuve puisse s'adapter à tout corps. À noter cependant que certains éléments posent problème. Nous venons de voir que pour un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , le sous-groupe normal engendré par  $h_p$  est le groupe entier. L'élément  $h_p$  n'est donc pas tendu. Or il ne normalise pas un tore de dimension 2 ce qui contredit l'énoncé [SB, Theorem 7.2]. Quitte à faire une hypothèse sur la caractéristique du corps, il est probable que les énoncés deviennent corrects et donnent une preuve alternative de la non simplicité de  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  sur tout corps. Cependant, une telle preuve reste peu élémentaire car elle repose lourdement sur les articles [CL13] et [BC]. Dans ce dernier article, J. Blanc et S. Cantat s'intéressent aux degrés dynamiques de toutes les applications birationnelles de surface projective. Ils prouvent notamment qu'il n'y a pas de degré dynamique dans l'intervalle  $]1, \lambda_L[$  où  $\lambda_L$  est le nombre de Lehmer (« gap property »). Ils obtiennent comme corollaire que pour tout élément hyperbolique  $g$  du groupe de Cremona, l'indice de  $\langle g \rangle$  dans son centralisateur est fini. Comme remarqué par R. Coulon [Cou14], ceci implique que si un élément est tendu alors  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  agit discrètement le long de l'axe de cet élément.

La preuve présentée dans cet article ne repose pas sur [BC, CL13] à l'exception du lemme 16 qui est une adaptation directe de [CL13, Proposition 5.7]. Dans la première section, nous rappelons la construction formelle d'un espace hyperbolique de dimension infini  $\mathbb{H}^\infty$  puis nous introduisons un outil technique, celui de « tube géodésique », qui nous permet notamment de court-circuiter [CL13, Lemma 3.1]. Nous montrons ensuite comment, dans  $\mathbb{H}^\infty$ , nous pouvons affaiblir les hypothèses assurant à un groupe d'agir discrètement le long de l'axe d'un de ses éléments. Dans la seconde section, nous rappelons la définition de l'espace de Picard-Manin ainsi que la construction de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  associé. Nous utilisons l'action du groupe de Cremona sur  $\mathbb{H}^\infty$  afin d'exhiber des éléments satisfaisant la propriété WPD que nous venons d'affaiblir. Ceci nous permet de prouver la proposition 3 et par conséquent de montrer que le groupe de Cremona n'est pas simple pour tout corps.

## REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Stéphane Lamy, mon directeur de thèse, qui m'a proposé ce sujet. Je le remercie également pour ses nombreuses relectures.

1. PROPRIÉTÉ WPD DANS  $\mathbb{H}^\infty$ 

**1.1. Espace hyperbolique de dimension infinie.** Soit  $H$  un espace de Hilbert réel de dimension infinie muni d'une forme quadratique  $\mathcal{Q}$  de signature  $(1, \infty)$ . Soit  $u \in H$  un élément tel que  $\mathcal{Q}(u, u) = 1$ . Notons  $\mathbb{H}^\infty$  la nappe d'hyperboloïde définie par :

$$\mathbb{H}^\infty := \{x \in H \mid \mathcal{Q}(x, x) = 1 \text{ et } \mathcal{Q}(u, x) > 0\}.$$

L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  muni de la distance  $d$  définie par  $\cosh d(x, y) := \langle x \mid y \rangle$  est un espace métrique complet et de dimension infinie. Remarquons que l'intersection de  $\mathbb{H}^\infty$  avec un sous-espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de  $H$  est une copie de l'espace hyperbolique usuel  $\mathbb{H}^n$ . En particulier, il existe une unique géodésique reliant deux points de  $\mathbb{H}^\infty$ , obtenue comme l'intersection de  $\mathbb{H}^\infty$  avec le plan vectoriel contenant ces deux points. Dans la pratique, nous nous ramenons souvent à  $\mathbb{H}^2$  en considérant un plan hyperbolique de  $\mathbb{H}^\infty$ . De ce fait, tout triangle de  $\mathbb{H}^\infty$  est isométrique à un triangle de  $\mathbb{H}^2$ . Ceci implique que  $\mathbb{H}^\infty$  est CAT(-1) et  $\delta$ -hyperbolique pour la même constante  $\delta = \log(1 + \sqrt{2})$  que  $\mathbb{H}^2$ . Dans la suite lorsque nous parlerons d'un espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$ , il sera toujours de cette forme.

Introduisons à présent quelques définitions et notations. Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{H}^\infty$ , sa longueur de translation est définie par  $L(f) = \inf_{x \in \mathbb{H}^\infty} d(x, f(x))$ . Si la longueur de translation de  $f$  est strictement positive,  $f$  est dite hyperbolique. Dans ce cas, elle possède un unique axe invariant déterminé par les points réalisant l'infimum :

$$\text{Axe}(f) := \{x \in \mathbb{H}^\infty \mid d(x, f(x)) = L(f)\}.$$

De plus,  $f$  s'étend de manière unique au bord  $\partial\mathbb{H}^\infty$  et possède exactement deux points fixes sur  $\partial\mathbb{H}^\infty$  ; l'un répulsif noté  $b^-$ , et l'autre attractif noté  $b^+$ . Ce sont les bouts de l'axe de  $f$  que l'on oriente de  $b^-$  vers  $b^+$ . Nous définissons ainsi une relation d'ordre sur les points de  $\text{Axe}(f)$ . Le point  $x$  est dit plus petit que  $y$ , noté  $x < y$  si  $x \in ]b^-, y]$  (et par symétrie  $y \in [x, b^+]$ ). Lorsqu'un point  $x$  est sur l'axe de  $f$  nous notons respectivement  $x - \varepsilon$  et  $x + \varepsilon$  les deux points sur  $\text{Axe}(f)$  situés à distance  $\varepsilon$  de  $x$  tels que  $x - \varepsilon < x + \varepsilon$ . Remarquons que pour tout point  $x \in \mathbb{H}^\infty$ , la suite  $(f^{\pm n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b^\pm$ .

**1.2. Propriété WPD.** Soit  $G$  un groupe qui agit par isométrie sur un espace métrique géodésique  $(X, d)$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$  et pour toute constante  $\varepsilon \geq 0$ , nous notons

$$\text{Fix}_\varepsilon A := \{g \in G \mid d(a, ga) \leq \varepsilon \quad \forall a \in A\},$$

le fixateur à  $\varepsilon$  près de  $A$  par  $G$ . Dans la suite nous ne préciserons plus que les actions considérées sont isométriques. Le lemme suivant est bien connu.

**Lemme 5.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur un espace métrique  $X$  et  $g$  un élément de  $G$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe  $x \in X$  tel que pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Fix}_\varepsilon\{x, g^N(x)\}$  soit fini.*
- (2) *Pour tout  $y \in X$ , pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $\text{Fix}_\varepsilon\{y, g^N(y)\}$  soit fini.*

*Démonstration.* Soient  $x$  vérifiant le point (1),  $y$  un point quelconque de  $X$  et  $\varepsilon \geq 0$ . Posons  $\varepsilon' = 2d(x, y) + \varepsilon$ . Par l'inégalité triangulaire, nous avons l'inclusion :

$$\text{Fix}_\varepsilon\{y, g^N(y)\} \subset \text{Fix}_{\varepsilon'}\{x, g^N(x)\}.$$

Ainsi, pour  $N$  suffisamment grand le cardinal de  $\text{Fix}_\varepsilon\{y, g^N(y)\}$  est fini. □

Dans la situation du lemme on dit que  $g$  *satisfait la propriété WPD* (« weakly properly discontinuous »). Cette définition a été introduite par M. Bestvina et K. Fujiwara [BF02] dans le contexte du mapping class group d'une surface de Riemann hyperbolique. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous utiliserons plutôt la terminologie de Coulon [Cou14]. Il dit dans ce cas que le groupe  $G$  *agit discrètement le long de l'axe de  $g$* .

Dans les prochains paragraphes nous rappelons des relations dans les quadrilatères hyperboliques, puis nous introduisons la notion de « tubes géodésiques ». Ceci nous permet d'affaiblir les hypothèses de la propriété WPD dans le contexte d'un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$ .

**1.3. Quadrilatères hyperboliques.** Nous prouvons ici un lemme donnant des relations trigonométriques pour des quadrilatères hyperboliques ayant trois angles droits. Nous rappelons d'abord les relations hyperboliques dans un triangle rectangle, voir par exemple [Bea95, p.147, Theorem 7.11.2].

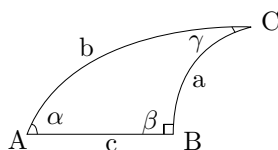


FIGURE 1. Triangle  $ABC$ .

**Lemme 6.** *Soit  $ABC$  un triangle hyperbolique rectangle en  $B$ . Notons respectivement  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les angles en  $A$ ,  $B$  et  $C$  et  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs respectives des côtés opposés (voir figure 1). Nous avons les deux relations suivantes :*

$$(1) \quad \cos \gamma = \frac{\tanh a}{\tanh b}$$

$$(2) \quad \tan \gamma = \frac{\tanh c}{\sinh a}.$$

**Lemme 7.** *Soit  $ADCB$  un quadrilatère de  $\mathbb{H}^2$  dont les angles en  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont droits. Nous avons la relation suivante :*

$$\tanh d(A, B) = \tanh d(D, C) \cosh d(C, B).$$

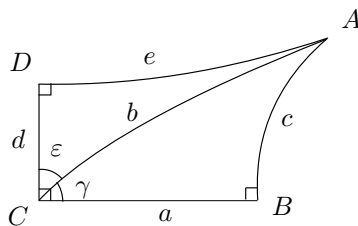


FIGURE 2. Quadrilatère  $ADCB$ .

*Démonstration.* Dans le triangle rectangle  $ABC$ , notons  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les longueurs opposées aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $\gamma$  l'angle en  $C$ , et dans le triangle  $ACD$ ,  $d$ ,  $b$  et  $e$ , les longueurs opposées aux sommets  $A$ ,  $D$  et  $C$ , et  $\varepsilon$  l'angle en  $C$  (voir figure 2). La relation (1) du lemme 6 appliquée aux triangles rectangles  $ABC$  et  $ACD$  nous donne :

$$\cos \gamma = \frac{\tanh a}{\tanh b} \quad \text{et} \quad \cos \varepsilon = \frac{\tanh d}{\tanh b}.$$

De plus, nous avons  $\cos \varepsilon = \sin \gamma$  car  $\varepsilon + \gamma = \frac{\pi}{2}$ . D'autre part, la relation (2) du lemme 6 appliquée au triangle  $ABC$  implique que  $\tan \gamma = \frac{\tanh c}{\sinh a}$ . Finalement, nous obtenons l'égalité cherchée :

$$\tanh c = \tanh d \cosh a. \quad \square$$

**1.4. Tubes géodésiques.** Considérons un groupe  $G$  agissant sur l'espace  $(\mathbb{H}^\infty, d)$ , et  $\Gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous introduisons à présent la notion de *tube géodésique* autour de  $\Gamma$ . Le mot géodésique est employé ici pour signifier que lorsque l'on considère l'intersection de ce tube avec un plan hyperbolique  $\mathcal{P}$  contenant  $\Gamma$ , le quadrilatère obtenu est constitué de segments géodésiques. Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $\mathbb{H}^\infty$  et  $\Gamma$  la géodésique passant par ces deux points. Nous notons  $\text{pr}_\Gamma$  la projection qui envoie un point  $x \in \mathbb{H}^\infty$  sur le point de  $\Gamma$  le plus proche de  $x$  et

$$\Gamma_x^\perp := \{z \in \mathbb{H}^\infty \mid \text{pr}_\Gamma z = x\}$$

l'hyperplan orthogonal à  $\Gamma$  en  $x$ . Nous définissons le *tube*  $\mathbb{T}_{x,x'}^\varepsilon$  comme l'enveloppe convexe de

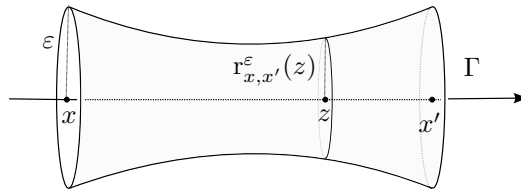


FIGURE 3. Tube  $\mathbb{T}_{x,x'}^\varepsilon$ .

l'union des deux boules fermées  $\bar{B}(x, \varepsilon) \cap \Gamma_x^\perp$  et  $\bar{B}(x', \varepsilon) \cap \Gamma_{x'}^\perp$  (voir figure 3). Le *rayon* de ce tube en  $z$ , noté  $r_{x,x'}^\varepsilon(z)$ , est

$$r_{x,x'}^\varepsilon(z) := \sup\{d(z, u) \mid u \in \Gamma_z^\perp \cap \mathbb{T}_{x,x'}^\varepsilon\}.$$

Soient  $\mathbb{T}_{x,x'}^{\varepsilon_1}$  et  $\mathbb{T}_{y,y'}^{\varepsilon_2}$  deux tubes centrés autour d'une même géodésique  $\Gamma$ , le tube  $\mathbb{T}_{x,x'}^{\varepsilon_1}$  *traverse*  $\mathbb{T}_{y,y'}^{\varepsilon_2}$  si pour tout  $z \in [x, x'] \cap [y, y']$ ,  $r_{x,x'}^{\varepsilon_1}(z) \leq r_{y,y'}^{\varepsilon_2}(z)$  (voir figure 4). Remarquons qu'il suffit

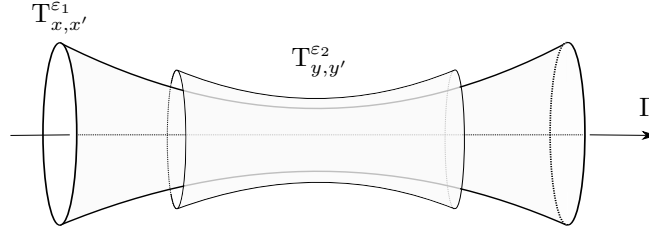


FIGURE 4. Tube  $\mathbb{T}_{x,x'}^{\varepsilon_1}$  traversant le tube  $\mathbb{T}_{y,y'}^{\varepsilon_2}$ .

de le vérifier pour les deux points  $b_1$  et  $b_2$  du bord de  $[x, x'] \cap [y, y']$ . En effet supposons que  $r_{x,x'}^{\varepsilon_1}(b_1) \leq r_{y,y'}^{\varepsilon_2}(b_1)$  et  $r_{x,x'}^{\varepsilon_1}(b_2) \leq r_{y,y'}^{\varepsilon_2}(b_2)$ . Plaçons-nous dans un plan  $\mathcal{P}$  contenant la géodésique  $\Gamma$ , et notons  $\Gamma_{x,x'}$  et  $\Gamma_{y,y'}$  les segments géodésiques des traces des tubes  $\mathbb{T}_{x,x'}^{\varepsilon_1}$  et  $\mathbb{T}_{y,y'}^{\varepsilon_2}$  contenus dans un même demi-plan délimité par  $\Gamma$  (deux choix sont possibles). Si les géodésiques  $\Gamma_{x,x'}$  et  $\Gamma_{y,y'}$  se coupaient une fois alors elles auraient au moins deux points d'intersection ce qui est impossible par unicité de la géodésique reliant deux points donnés. Par conséquent, la géodésique  $\Gamma_{y,y'}$  reste au-dessus de la géodésique  $\Gamma_{x,x'}$ .

L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  étant  $\text{CAT}(-1)$  et donc à fortiori  $\text{CAT}(0)$ , la distance est convexe. Cela revient à dire (voir [BH99, p.176]) que pour tous segments géodésiques  $[a, b]$  et  $[c, d]$  et pour tous points

$z \in [a, b]$  et  $z' \in [c, d]$  ayant les mêmes coordonnées barycentriques, c'est-à-dire  $d(a, z) = t d(a, b)$  et  $d(c, z') = t d(c, d)$  avec  $t \in [0, 1]$ , nous avons  $d(z, z') \leq (1 - t) d(a, c) + t d(b, d)$ . Nous utilisons la convexité de la distance de la façon suivante.

**Lemme 8.** *Soit  $h$  un élément hyperbolique de  $G$  agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$ . Soient  $x, x', y, y' \in \text{Axe}(h)$  vérifiant  $x \leq y < y' \leq x'$ . Pour tout  $\varepsilon \geq 0$  nous avons :*

- (1)  $\text{Fix}_\varepsilon\{x, x'\} \subset \text{Fix}_\varepsilon\{y, y'\}$ .
- (2) le tube  $T_{x, x'}^\varepsilon$  traverse le tube  $T_{y, y'}^\varepsilon$ .

*Démonstration.* Posons  $t := \frac{d(x, y)}{d(x, x')}$ . Les deux points se prouvent avec le même argument.

- (1) Soit  $g \in \text{Fix}_\varepsilon\{x, x'\}$ . Nous avons alors par convexité de la distance et par isométrie de  $g$  :

$$d(y, g \cdot y) \leq t d(x', g \cdot x') + (1 - t) d(x, g \cdot x) \leq \varepsilon.$$

En faisant de même pour le point  $y'$  nous obtenons le résultat.

- (2) En utilisant la remarque faite après la définition du rayon d'un tube, il suffit de montrer que  $r_{x, x'}^\varepsilon(y) \leq r_{y, y'}^\varepsilon(y) = \varepsilon$  et  $r_{x, x'}^\varepsilon(y') \leq r_{y, y'}^\varepsilon(y') = \varepsilon$ . Montrons la première inégalité, la seconde se prouve de la même manière. Par le même argument qu'au point (1) en se plaçant dans un plan contenant le segment  $[x, x']$ , nous avons :

$$r_{x, x'}^\varepsilon(y) \leq t r_{x, x'}^\varepsilon(x') + (1 - t) r_{x, x'}^\varepsilon(x) \leq \varepsilon. \quad \square$$

**1.5. Affaiblissement de la propriété WPD.** Nous pouvons maintenant affaiblir les hypothèses de la propriété WPD.

**Proposition 9.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  et  $h$  un élément hyperbolique de  $G$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe  $x \in \text{Axe}(h)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  et  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que le cardinal de  $\text{Fix}_{\varepsilon_0}\{h^{-k}(x), h^n(x)\}$  soit fini.*
- (2) *Il existe  $w \in \text{Axe}(h)$  tel que pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que le cardinal de  $\text{Fix}_\varepsilon\{w, h^M(w)\}$  soit fini.*

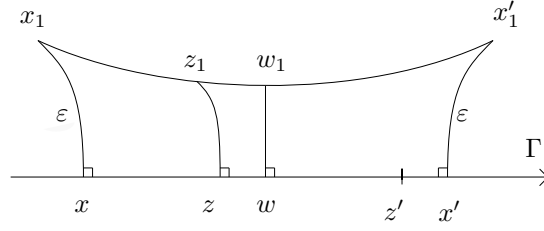
Le point (2) correspond à la définition donnée dans le lemme 5.(1), et le point (1) est la version affaiblie qui nous sera utile dans la section 2. La preuve découle immédiatement des deux lemmes suivants.

**Lemme 10.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$  et  $\Gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^\infty$ . Pour toutes constantes fixées  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\eta > 0$  et pour tous points  $z, z' \in \Gamma$  avec  $z < z'$ , il existe  $x, x' \in \Gamma$  avec  $x \leq z < z' \leq x'$  tels que pour tous  $y, y' \in \Gamma$  avec  $y \leq x$  et  $y' \geq x'$ , le tube  $T_{y, y'}^\varepsilon$  traverse le tube  $T_{z, z'}^\eta$ .*

*Démonstration.* Si  $\eta \geq \varepsilon$ , il suffit de prendre  $x = z$  et  $x' = z'$  (voir lemme 8.(2)).

Si maintenant  $\eta < \varepsilon$ , nous voulons trouver deux points  $x$  et  $x'$  sur  $\Gamma$  avec  $x \leq z$  et  $x' \geq z'$  de sorte que  $r_{x, x'}^\varepsilon(z) \leq \eta$  et  $r_{x, x'}^\varepsilon(z') \leq \eta$ . Pour tout point  $w \in [z, z']$ , nous considérons deux points  $x, x' \in \Gamma$  avec  $x \leq z$  et  $x' \geq z'$  et tels que  $w$  soit le milieu du segment  $[x, x']$ . Par symétrie, nous pouvons nous placer dans un plan  $\mathcal{P}$  contenant la géodésique  $\Gamma$ . Dans ce plan, la trace du tube  $T_{x, x'}^\varepsilon$  est un quadrilatère. Notons  $x_1$  et  $x'_1$  deux sommets de ce quadrilatère situés dans un même demi-plan délimité par  $\Gamma$  (voir figure 5). Nous avons alors  $d(x_1, x) = d(x'_1, x') = \varepsilon$ .

Soit  $w_1$  le milieu du segment géodésique  $[x_1, x'_1]$ . Par symétrie, la géodésique passant par les points  $w$  et  $w_1$  est la géodésique orthogonale aux géodésiques  $[x_1, x'_1]$  et  $\Gamma$ . Appelons  $z_1$  le point

FIGURE 5. Trace du tube  $T_{x,x'}^\epsilon$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .

sur le segment géodésique  $[x_1, w_1]$  vérifiant  $\text{pr}_\Gamma z_1 = z$ . Les quadrilatères  $z_1 w_1 w z$  et  $x_1 w_1 w x$  possèdent trois angles droits respectivement en  $w_1, w, z$  et en  $w_1, w, x$ . Le lemme 7 donne :

$$\begin{cases} \tanh d(w, w_1) \cosh d(w, z) = \tanh d(z_1, z) \\ \tanh d(w, w_1) \cosh d(w, x) = \tanh d(x_1, x) = \tanh \varepsilon. \end{cases}$$

En combinant les égalités et en faisant de même pour  $x'$ , nous obtenons :

$$\frac{\tanh \varepsilon \cosh d(w, z)}{\cosh d(w, x)} = \tanh d(z, z_1) \quad \text{et} \quad \frac{\tanh \varepsilon \cosh d(w, z')}{\cosh d(w, x')} = \tanh d(z', z'_1).$$

Nous voulons choisir  $x$  et  $x'$  pour obtenir les majorations  $d(z, z_1) \leq \eta$  et  $d(z', z'_1) \leq \eta$ . Pour  $K > 0$ , l'application  $t \mapsto \frac{K}{\cosh t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . En prenant

$$K = \max(\tanh \varepsilon \cosh d(w, z), \tanh \varepsilon \cosh d(w, z')),$$

il existe  $t_0$  tel que  $\frac{K}{\cosh t_0} \leq \tanh \eta$ . Nous choisissons  $x$  et  $x'$  tels que  $d(w, x) = d(w, x') \geq t_0$ . Nous obtenons :

$$\frac{\tanh \varepsilon \cosh d(w, z)}{\cosh d(w, x)} \leq \tanh \eta \quad \text{et} \quad \frac{\tanh \varepsilon \cosh d(w, z')}{\cosh d(w, x')} \leq \tanh \eta,$$

qui donnent les majorations attendues.  $\square$

**Lemme 11.** Soient  $G$  un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$  et  $h$  une isométrie hyperbolique de  $G$ . Pour toutes constantes fixées  $\varepsilon \geq 0, \eta > 0$ , pour tous points  $z, z' \in \text{Axe}(h)$  avec  $z < z'$ , pour tout point  $w \in [z, z']$ , il existe  $m, k \in \mathbb{N}$  tels que si le cardinal de  $\text{Fix}_\eta\{z, z'\}$  est fini alors celui de  $\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-k}(w), h^m(w)\}$  l'est aussi.

*Démonstration.* Soient  $\varepsilon \geq 0, z$  et  $z'$  deux points de l'axe de  $h$  et  $w$  un point du segment  $[z, z']$ . D'après le lemme 10, il existe deux points  $x$  et  $x'$  sur  $\text{Axe}(h)$  avec  $x \leq z < z' \leq x'$  tels que pour tous  $y, y' \in \text{Axe}(h)$  vérifiant  $y \leq x$  et  $y' \geq x'$  le tube  $T_{y,y'}^\varepsilon$  traverse le tube  $T_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$ . En choisissant deux entiers  $m$  et  $k$  suffisamment grands de sorte que  $h^{-k}(w) + \varepsilon \leq x$  et  $h^m(w) - \varepsilon \geq x'$ , nous obtenons que le tube  $T_{h^{-k}(w)+\varepsilon, h^m(w)-\varepsilon}^\varepsilon$  traverse  $T_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$  (voir figure 6).

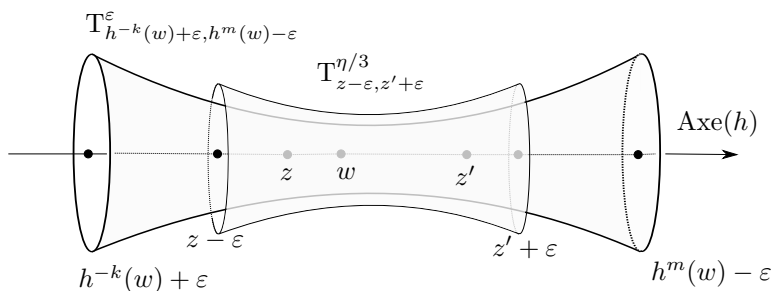
Supposons que le cardinal de  $\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-k}(w), h^m(w)\}$  soit infini. Il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments deux à deux distincts de  $\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-k}(w), h^m(w)\}$ , ce qui implique que pour tout  $n$ , nous avons :

$$[f_n(h^{-k}(w)), f_n(h^m(w))] \subset T_{\text{pr}_h f_n(h^{-k}(w)), \text{pr}_h f_n(h^m(w))}^\varepsilon.$$

En appliquant le lemme 8.(2) aux quatre points de l'axe de  $h$  :  $\text{pr}_h f_n(h^{-k}(w)) \leq h^{-k}(w) + \varepsilon$  et  $\text{pr}_h f_n(h^m(w)) \geq h^m(w) - \varepsilon$ , nous obtenons que le tube  $T_{\text{pr}_h f_n(h^{-k}(w)), \text{pr}_h f_n(h^m(w))}^\varepsilon$  traverse le tube  $T_{h^{-k}(w)+\varepsilon, h^m(w)-\varepsilon}^\varepsilon$  qui, par construction, traverse le tube  $T_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$ . De plus, d'après le point (1) du lemme 8 pour les points  $h^{-k}(w) < z < z' < h^m(w)$ , nous avons l'inclusion :

$$\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-k}(w), h^m(w)\} \subset \text{Fix}_\varepsilon\{z, z'\}.$$



FIGURE 6. Tube  $T_{h^{-k}(w)+\varepsilon, h^m(w)-\varepsilon}^\varepsilon$  traversant le tube  $T_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$ .

Par conséquent, pour tout entier  $n$ , les points  $f_n(z)$  et  $f_n(z')$  appartiennent respectivement aux boules fermées  $\bar{B}(z, \varepsilon)$  et  $\bar{B}(z', \varepsilon)$ . Notons  $z_n := \text{pr}_h f_n(z)$  et  $z'_n := \text{pr}_h f_n(z')$ , les projections respectives sur  $\text{Axe}(h)$  des points  $f_n(z)$  et  $f_n(z')$ . En particulier,  $z_n, z'_n \in [z - \varepsilon, z' + \varepsilon]$  d'où :

$$d(z_n, f_n(z)) \leq \frac{\eta}{3} \text{ et } d(z'_n, f_n(z')) \leq \frac{\eta}{3}.$$

D'autre part, les suites  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartiennent au compact  $[z - \varepsilon, z' + \varepsilon]$  donc quitte à prendre une sous-suite nous pouvons supposer que les deux suites convergent et sont de Cauchy. Il existe donc un rang  $N_0$  tel que pour tout  $k \geq 0$ ,  $d(z_{N_0}, z_{N_0+k}) \leq \frac{\eta}{3}$  et  $d(z'_{N_0}, z'_{N_0+k}) \leq \frac{\eta}{3}$ . Par conséquent, nous avons pour tout  $n \geq N_0$  :

$$\begin{cases} d(f_{N_0}(z), f_n(z)) \leq d(f_{N_0}(z), z_{N_0}) + d(z_{N_0}, z_n) + d(z_n, f_n(z)) \leq \eta \\ d(f_{N_0}(z'), f_n(z')) \leq d(f_{N_0}(z'), z'_{N_0}) + d(z'_{N_0}, z'_n) + d(z'_n, f_n(z')) \leq \eta \end{cases}.$$

Finalement, la suite  $(f_{N_0}^{-1} f_n)_{n \geq N_0}$  est contenue dans  $\text{Fix}_\eta\{z, z'\}$ , ce qui nous permet de conclure que le cardinal de  $\text{Fix}_\eta\{z, z'\}$  est infini.  $\square$

## 2. APPLICATION AU GROUPE DE CREMONA

**2.1. Action du groupe de Cremona sur l'espace de Picard-Manin.** Rappelons rapidement la construction de l'espace de Picard-Manin et comment le groupe de Cremona agit dessus. Plus de précisions se trouvent dans [CL13] et [Can11]. Soit  $S$  une surface projective lisse. Le groupe de Néron-Severi  $N^1(S)$  associé à  $S$  est le groupe des diviseurs à coefficients réels sur  $S$  à équivalence numérique près. Considérons la limite inductive des groupes de Néron-Severi des surfaces  $S'$  obtenues comme éclatement de  $S$  :

$$\mathcal{Z}_C(S) = \lim_{S' \rightarrow S} N^1(S'),$$

appelée parfois l'espace des  $b$ -diviseurs de Cartier. Si l'on considère la limite projective plutôt qu'inductive, on obtient l'espace des  $b$ -diviseurs de Weil. Nous ne nous servons pas de ce point de vue.

Notons  $L \in N^1(\mathbb{P}^2)$  la classe d'une droite de  $\mathbb{P}^2$ ,  $S_p$  la surface obtenue comme éclatement d'une autre surface  $S$  au point  $p$  et  $E_p \in N^1(S_p)$  le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Par abus de notation,  $L$  et  $E_p$  désignent aussi leur transformée stricte respective dans toute surface dominant respectivement  $\mathbb{P}^2$  et  $S_p$ . Les transformées totales correspondent à des classes de  $\mathcal{Z}_C$ , nous les notons avec des lettres minuscules. Ainsi,  $\ell$  et  $e_p$  désignent respectivement la classe de  $L$  et de  $E_p$ . Par exemple, sur  $S_p$ ,  $e_p = E_p$  mais sur  $(S_p)_q$  où  $q \in E_p$ ,  $e_p = E_p + E_q$ . De manière générale, l'inclusion  $N^1(S) \hookrightarrow \mathcal{Z}_C(S)$  fait correspondre à un diviseur  $D$  sa classe de Picard-Manin  $d$ . Par la suite, nous nous intéressons au complété  $L^2$  de  $\mathcal{Z}_C(S)$ , noté  $\mathcal{Z}(S)$ , que nous appelons l'espace de Picard-Manin. Remarquons que le nombre d'intersection est compatible avec les classes de

l'espace de Picard-Manin puisqu'il est stable par tiré en arrière. Il induit une forme quadratique de signature  $(1, \infty)$  sur cet espace. Nous avons la décomposition orthogonale :

$$\mathcal{Z}(S) = N^1(S) \oplus E(S),$$

où  $E(S) = \bigoplus_{p \in \mathcal{S}} \text{Vect}(e_p)$  est appelé la partie exceptionnelle et  $\mathcal{S}$  est l'ensemble de tous les points appartenant à  $S$  et à tous ses éclatés. Ceci nous permet d'explicitier les éléments de  $\mathcal{Z}(S)$  dans cette base :

$$\mathcal{Z}(S) = \{c = d_0 + \sum_p \lambda_p e_p \mid \sum_p \lambda_p^2 < \infty \text{ et } D_0 \in N^1(S)\}.$$

Si  $\pi : S' \rightarrow S$  est un morphisme birationnel alors l'application  $\pi_{\#}$  induite par  $\pi$  sur les espaces de Picard-Manin, qui à  $c \in \mathcal{Z}(S')$  associe  $c \in \mathcal{Z}(S)$ , est un isomorphisme. Cette application modifie la base de la décomposition orthogonale en déplaçant des éléments de la base de  $N^1(S')$  dans la partie exceptionnelle. Nous introduisons cette nouvelle notation pour distinguer cet isomorphisme de l'application induite par  $\pi$  sur les groupes de Néron-Severi,  $\pi^* : N^1(S) \hookrightarrow N^1(S')$  qui n'est qu'une injection.

À présent, considérons la nappe d'hyperboloïde associée à la forme d'intersection induite par le nombre d'intersection :

$$\mathbb{H}^\infty(S) = \{c \in \mathcal{Z}(S) \mid c \cdot c = 1 \text{ et } c \cdot d_0 > 0\}.$$

Nous pouvons la munir d'une distance définie par  $d(c, c') = \cosh^{-1}(c \cdot c')$  pour tout  $c, c' \in \mathbb{H}^\infty(S)$ . Cet espace est isométrique à l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  introduit dans la section 1. Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  agit sur  $\mathbb{H}^\infty$  via l'application  $f \mapsto f_{\#}$  définie comme suit. Considérons une résolution de  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \pi \swarrow & & \searrow \sigma \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

alors  $f_{\#} = \sigma_{\#} \circ (\pi_{\#})^{-1}$ . Remarquons que  $(\pi_{\#})^{-1} = (\pi^{-1})_{\#}$ .

*Remarque 12.* Si  $f$  est un isomorphisme d'un voisinage  $U$  de  $x$  sur un voisinage  $V$  de  $f(x)$  alors nous avons  $f_{\#}(e_x) = e_{f(x)}$ .

Regardons sur un exemple l'action de  $f$  sur  $\ell$ .

*Exemple 13.* Soient  $f$  une application quadratique de point bases  $p_1, p_2, p_3$  (infiniment proches ou pas) et  $f^{-1}$  son application inverse ayant  $q_1, q_2$  et  $q_3$  comme points base. Notons  $C$  la classe de la conique image de  $L$  par  $f$ . Calculons  $f_{\#}(\ell)$ . Regardons d'abord ce qu'il se passe pour les groupes de Néron-Severi. La conique  $C$  passe par les points  $q_1, q_2$  et  $q_3$  donc  $\sigma^*(C) = \bar{C} + E_{q_1} + E_{q_2} + E_{q_3}$  où  $\bar{C}$  est la transformée stricte de  $C$ . Or  $\bar{C} = \bar{L} = \pi^*(L)$  puisque  $L$  est générale et ne passe pas par les points base de  $f$ . Une base de  $N^1(S)$  est donnée par  $\sigma^*(L), E_{q_1}, E_{q_2}$  et  $E_{q_3}$ . Écrivons  $\pi^*(L)$  dans cette base :

$$\begin{aligned} \pi^*(L) &= \sigma^*(C) - E_{q_1} - E_{q_2} - E_{q_3} \\ &= 2\sigma^*(L) - E_{q_1} - E_{q_2} - E_{q_3} \end{aligned}$$

Maintenant regardons ce qu'il se passe dans les espaces de Picard-Manin. En considérant la base précédente induite sur  $\mathcal{Z}(S)$ , nous avons  $\pi_{\#}^{-1}(\ell) = 2\sigma_{\#}^{-1}(\ell) - e_{q_1} - e_{q_2} - e_{q_3}$ . De plus, comme  $\sigma$  est le morphisme birationnel qui contracte les diviseurs exceptionnels  $E_{q_1}, E_{q_2}$  et  $E_{q_3}$ ,  $\sigma_{\#}(e_{q_i}) = e_{q_i}$ . Nous obtenons finalement :

$$f_{\#}(\ell) = 2\ell - e_{q_1} - e_{q_2} - e_{q_3}.$$

De manière générale, pour tout  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ,  $f_{\#}(\ell) \cdot \ell = \deg(f)$ .

**2.2. Action des applications  $h_n$  sur  $\mathbb{H}^\infty$ .** Par la suite nous allons nous intéresser aux applications  $h_n : (x, y) \mapsto (y, y^n - x)$  où  $n \geq 2$ . Ces applications sont des transformations de Jonquières. Elles ont par conséquent un point base  $p_0$  de multiplicité  $n - 1$  et  $2n - 2$  points base de multiplicité 1 notés  $p_k$  avec  $1 \leq k \leq 2n - 2$ . En homogénéisant, le point  $p_0$  a pour coordonnées  $[1 : 0 : 0]$ . C'est le seul point base des applications  $h_n$  qui appartient à  $\mathbb{P}_K^2$ . De plus, pour  $0 \leq k \leq 2n - 3$ ,  $p_{k+1}$  est infiniment proche de  $p_k$ . Les points base de  $h_n^{-1}$ , notés  $(q_k)_{0 \leq k \leq 2n-2}$ , ont les mêmes propriétés que ceux de  $h_n$ . Ils forment une tour au-dessus de  $q_0 = [0 : 1 : 0]$ . Pour alléger l'écriture nous notons  $e_n^+$  (respectivement  $e_n^-$ ) les sommes avec multiplicités des classes des diviseurs exceptionnels issus de la résolution de  $h_n$  (respectivement de  $h_n^{-1}$ ) :

$$\begin{cases} e_n^+ = (n-1)e_{p_0} + e_{p_1} + \cdots + e_{p_{2n-2}} \\ e_n^- = (n-1)e_{q_0} + e_{q_1} + \cdots + e_{q_{2n-2}} \end{cases}$$

L'action sur  $\ell$  de  $h_{n\#}$  et de ses itérés est donnée par :

$$h_{n\#}(\ell) = n\ell - e_n^-, \quad h_{n\#}^2(\ell) = n^2\ell - ne_n^- - h_{n\#}(e_n^-), \quad \text{etc.}$$

La suite  $(\frac{1}{n^k} h_{n\#}^k(\ell))_{k \in \mathbb{N}}$  converge dans l'espace de Picard-Manin vers un élément  $b_n^+$  d'auto-intersection 0 qui s'identifie à un point du bord  $\partial\mathbb{H}^\infty$ . Cet élément correspond à un bout de Axe( $h_{n\#}$ ). De même, la suite  $(\frac{1}{n^k} h_{n\#}^{-k}(\ell))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers un élément  $b_n^-$ . Ces deux classes se réécivent :

$$b_n^+ = \ell - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{n\#}^i(e_n^-)}{n^{i+1}} \quad \text{et} \quad b_n^- = \ell - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{n\#}^{-i}(e_n^+)}{n^{i+1}}.$$

Considérons à présent pour chaque  $n \geq 2$ , le point  $w_n$  qui est le projeté de  $\ell$  sur Axe( $h_{n\#}$ ) (voir figure 7).

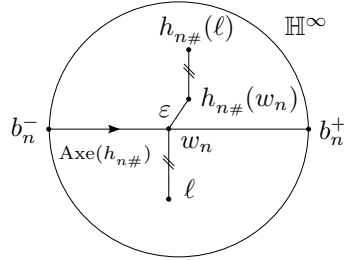
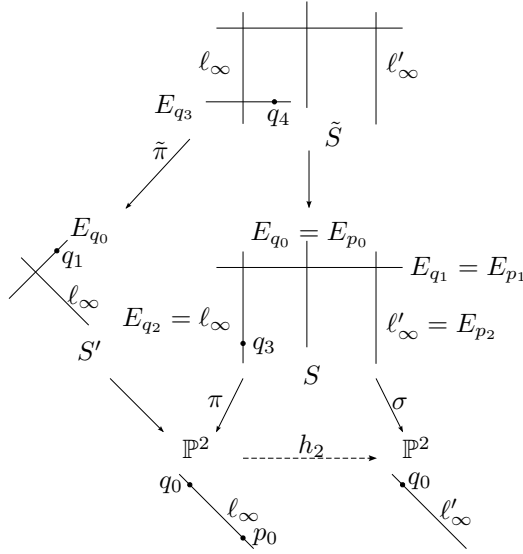


FIGURE 7. Projection de  $\ell$  sur l'axe de  $h_{n\#}$ .

L'axe de  $h_{n\#}$  étant uniquement déterminé par  $b_n^+$  et  $b_n^-$ ,  $w_n$  est une combinaison linéaire de ces deux classes ;  $w_n = \alpha b_n^+ + \beta b_n^-$ . Nous avons  $1 = w_n^2 = 2\alpha\beta$  car  $(b_n^+)^2 = 0 = (b_n^-)^2$  et  $b_n^+ \cdot b_n^- = 1$ . De plus,  $w_n \cdot \ell = \alpha + \beta$  doit être minimal car  $w_n$  est le projeté de  $\ell$ . Nous obtenons finalement :

$$w_n = \sqrt{2}\ell - \frac{1}{\sqrt{2}}r_n \quad \text{où} \quad r_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{n\#}^i(e_n^-) + h_{n\#}^{-i}(e_n^+)}{n^{i+1}}.$$

**Lemme 14.** *Considérons l'ensemble des éléments des  $4n - 2$  suites  $(h_{n\#}^k(e_{q_i}))_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(h_{n\#}^{-k}(e_{p_i}))_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $0 \leq i \leq 2n - 2$ . Ces éléments sont tous deux à deux orthogonaux.*

FIGURE 8. Résolution de  $h_2$ .

*Démonstration.* Prolongeons par récurrence la suite de points  $(q_i)_{i \geq 2n-1}$  tels que  $q_i \in E_{q_{i-1}}$  et  $e_{q_i} = h_{n\#}(e_{q_{i-(2n-1)}})$ .

Considérons une résolution de  $h_n$  (voir figure 8 avec  $n = 2$ ). Il existe un point  $q_{2n-1}$  sur le diviseur exceptionnel  $E_{q_{2n-2}}$  tel que l'application birationnelle  $\pi^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow S$  soit un isomorphisme local entre un voisinage de  $q_0$  et de  $q_{2n-1}$ . D'après la remarque 12,  $\pi_{\#}^{-1}(e_{q_0}) = e_{q_{2n-1}}$ , ce qui entraîne :

$$h_{n\#}(e_{q_0}) = \sigma_{\#}^{-1}(e_{q_{2n-1}}) = e_{q_{2n-1}}.$$

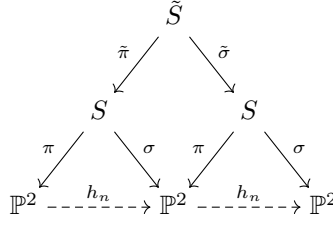
Le premier point  $q_{2n-1}$  est construit. Supposons maintenant que les points  $q_i$  soient construits pour  $2n-1 \leq i \leq m$ , et construisons le point  $q_{m+1}$  de la même façon. Éclatons les points  $q_j$  pour  $0 \leq j \leq m - (2n-2)$  afin de faire apparaître le point  $q_{m+1-(2n-1)} \in E_{q_{m+1-(2n)}}$ . L'application birationnelle  $\pi^{-1}$  étant un isomorphisme local, son application induite  $\tilde{\pi}^{-1}$  sur les éclatés de  $q_0 \in \mathbb{P}^2$  et de  $q_{2n-1} \in E_{q_{2n-2}}$  est aussi un isomorphisme local. Ainsi, il existe un point  $q_{m+1} \in E_{q_m}$  tel que  $\tilde{\pi}^{-1}$  soit un isomorphisme local entre  $q_{m+1-(2n-1)}$  et  $q_{m+1}$ . Par le même argument que précédemment nous avons  $\tilde{\pi}_{\#}^{-1}(e_{q_{m+1-(2n-1)}}) = e_{q_{m+1}}$  et finalement nous obtenons  $h_{n\#}(e_{q_{m+1-(2n-1)}}) = e_{q_{m+1}}$ . De la même manière, nous pouvons construire une suite de points  $(p_i)_{i \geq 2n-1}$  tels que  $p_i \in E_{p_{i-1}}$  et  $e_{p_i} = h_{n\#}^{-1}(e_{p_{i-(2n-1)}})$ .  $\square$

*Remarque 15.* Écrivons tous les termes de  $r_n$  :

$$r_n = (n-1) \frac{e_{q_0}}{n} + \frac{e_{q_1}}{n} + \dots + \frac{e_{q_{2n-2}}}{n} + (n-1) \frac{e_{p_0}}{n} + \dots + \frac{e_{p_{2n-2}}}{n} + (n-1) \frac{h_{n\#}(e_{q_0})}{n^2} + \dots$$

Le lemme 14 implique que tous les termes de  $r_n$  sont orthogonaux deux à deux. Ainsi, la classe de tout diviseur exceptionnel  $e_i$  à un nombre d'intersection non nul avec au plus un seul des termes de  $r_n$ .

Remarquons également, même si nous n'utiliserons pas ce fait, que les points  $p_i$  (respectivement  $q_i$ ), construits dans le lemme 14, sont les point base des itérés de  $h_n$  (respectivement de  $h_n^{-1}$ ). Le diagramme suivant donne une idée de preuve dans le cas de  $h_n^2$ .



**2.3. Preuve du résultat principal.** Soient  $K$  un corps et  $n \geq 2$  un entier tels que la caractéristique de  $K$  ne divise pas  $n$ . Considérons les applications :

$$h_n : \quad \mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2 \\
(x, y) \longmapsto (y, y^n - x)$$

appartenant au groupe de Cremona. Nous montrons dans ce paragraphe la proposition 3, c'est-à-dire que le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  agit discrètement le long de l'axe de  $h_{n\#}$ . Nous avons besoin du lemme tiré de [CL13, proposition 5.7]. Nous reproduisons la preuve car nous devons vérifier que nous pouvons l'appliquer aux transformations  $h_n$  qui ne sont pas des Jonquières générales. Avant d'énoncer le lemme, rappelons que  $w_n$  est le projeté sur l'axe de  $h_{n\#}$  de la classe de  $\ell$ .

**Lemme 16.** *Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que tout élément de  $\text{Fix}_\varepsilon\{w_n\} \subset \text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  soit un automorphisme de  $\mathbb{P}_K^2$ .*

*Démonstration.* Choisissons  $\varepsilon \in ]0, \cosh^{-1} \frac{5}{2\sqrt{2}} - \cosh^{-1} \sqrt{2}]$ , cette constante vérifie alors :

$$(*) \quad \begin{cases} \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon < \cosh^{-1} \frac{5}{2\sqrt{2}} < \cosh^{-1} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2 \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon < \cosh^{-1} 4 \end{cases}$$

Soit  $f \in \text{Fix}_\varepsilon\{w_n\}$ . Nous voulons montrer que  $f$  est de degré 1. D'après l'inégalité triangulaire (voir figure 7) et le fait que  $d(f_{\#}(w_n), w_n) \leq \varepsilon$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
d(f_{\#}(\ell), \ell) &\leq d(f_{\#}(\ell), f_{\#}(w_n)) + d(f_{\#}(w_n), w_n) + d(w_n, \ell) \\
&\leq 2d(w_n, \ell) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Rappelons que  $\cosh d(f_{\#}(\ell), \ell) = f_{\#}(\ell) \cdot \ell = \deg f$ , donc  $\deg f \leq \cosh(2d(w_n, \ell) + \varepsilon)$ . Calculons la valeur de  $d(w_n, \ell) = \cosh^{-1}(w_n \cdot \ell) = \cosh^{-1} \sqrt{2}$ . Finalement, d'après le choix (\*) de  $\varepsilon$ , nous majorons le degré de  $f$  par 4 :

$$\deg f \leq \cosh(2 \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon) < 4.$$

Il nous reste à montrer que  $f$  ne peut pas être de degré 2 ou 3. Dans chacun des deux cas nous raisonnons par l'absurde et arrivons à l'inégalité  $d(f_{\#}(\ell), w_n) > \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon$ . Or, par l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
d(f_{\#}(\ell), w_n) &\leq d(f_{\#}(\ell), f_{\#}(w_n)) + d(f_{\#}(w_n), w_n) \\
&\leq d(w_n, \ell) + \varepsilon = \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous mène à une contradiction.

Supposons que  $\deg(f) = 3$ , alors l'action de  $f_{\#}$  sur la classe  $\ell$  de Picard-Manin est définie par  $f_{\#}(\ell) = 3\ell - 2e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4$  avec  $e_i$  les classes des diviseurs exceptionnels au-dessus de  $\mathbb{P}^2$ . D'après la remarque 15, nous obtenons :

$$(2e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \cdot r_n \geq \frac{1}{n}(-2(n-1) - 1 - 1 - 1 - 1) = -2 - \frac{2}{n} \geq -3,$$

ce qui nous donne  $-f_{\#}(\ell) \cdot r_n \geq -3$ . De plus, par hypothèse nous avons  $f_{\#}(\ell) \cdot \ell = 3$ , ce qui nous donne l'inégalité :

$$f_{\#}(\ell) \cdot w_n = \sqrt{2}f_{\#}(\ell) \cdot \ell - \frac{1}{\sqrt{2}}f_{\#}(\ell) \cdot r_n \geq 3\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

En prenant le cosinus hyperbolique réciproque et en utilisant (\*), nous arrivons à la contradiction attendue :

$$d(f_{\#}(\ell), w_n) \geq \cosh^{-1} \frac{3}{\sqrt{2}} > \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon.$$

Supposons maintenant que  $\deg f = 2$ . De même que dans le cas précédent, nous considérons l'action de  $f_{\#}$  sur  $\ell$ ;  $f_{\#}(\ell) = 2\ell - e_0 - e_1 - e_2$  avec  $e_i$  les classes des diviseurs exceptionnels au-dessus de  $\mathbb{P}^2$ . D'après la remarque 15, nous avons :

$$-f_{\#}(\ell) \cdot r_n = (e_0 + e_1 + e_2) \cdot r_n \geq -\frac{1}{n}(n - 1 + 1 + 1) = -1 - \frac{1}{n} \geq -\frac{3}{2}.$$

De plus,  $f_{\#}(\ell) \cdot \ell = 2$ , ce qui implique :

$$f_{\#}(\ell) \cdot w_n = \sqrt{2}f_{\#}(\ell) \cdot \ell - \frac{1}{\sqrt{2}}f_{\#}(\ell) \cdot r_n \geq 2\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}.$$

De même que précédemment, en prenant l'inverse du cosinus hyperbolique et en utilisant (\*), nous obtenons la contradiction :

$$d(f_{\#}(\ell), w_n) \geq \cosh^{-1} \frac{5}{2\sqrt{2}} > \cosh^{-1}(\sqrt{2}) + \varepsilon.$$

La transformation  $f$  est de degré 1, par conséquent c'est un automorphisme de  $\mathbb{P}_K^2$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.* Nous voulons montrer que  $\text{Bir}(\mathbb{P}_K^2)$  agit discrètement le long de l'axe de  $h_{n\#}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le cardinal de  $\text{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\}$  soit fini. Choisissons un  $\varepsilon > 0$  vérifiant (\*), comme dans le lemme 16. Soit  $f$  une application birationnelle de  $\mathbb{P}_K^2$  appartenant à  $\text{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\}$ . Par le lemme 8.(1), nous avons l'inclusion :

$$\text{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\} \subset \text{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}(w_n), h_{n\#}^{-1}(w_n)\} \subset \text{Fix}_{\varepsilon}\{w_n\}.$$

De ce fait,  $f$  appartient à  $\text{Fix}_{\varepsilon}\{w_n\}$  et en utilisant le lemme 16, nous obtenons que  $f$  est de degré 1 :

$$f: [x : y : z] \mapsto [ax + ky + bz : lx + cy + dz : hx + my + z].$$

Le but est maintenant de trouver des contraintes sur les coefficients de  $f$  pour montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour une telle application. L'application  $f$  appartient aussi à  $\text{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}(w_n), h_{n\#}^{-1}(w_n)\}$  d'où  $d(f_{\#}h_{n\#}^{-1}(w_n), h_{n\#}^{-1}(w_n)) \leq \varepsilon$ . L'application  $h_{n\#}^{-1}$  étant une isométrie nous avons :

$$d(h_{n\#}f_{\#}h_{n\#}^{-1}(w_n), w_n) \leq \varepsilon.$$

De plus,  $h_{n\#}f_{\#}h_{n\#}^{-1} = (h_nfh_n^{-1})_{\#}$  donc d'après le lemme 16 l'application  $h_nfh_n^{-1}$  est un automorphisme. En considérant la courbe  $C$  contractée sur  $p_0$  par  $h_n^{-1}$  et le fait que  $f$  est un automorphisme, nous avons  $f(p_0) = p_0$ , ce qui implique que  $l = h = 0$ . En utilisant le même argument et le fait que  $d(f_{\#}h_{n\#}(w_n), h_{n\#}(w_n)) \leq \varepsilon$  nous obtenons  $f(q_0) = q_0$  qui implique  $k = m = 0$ . Ainsi,  $f$  est un automorphisme affine :

$$f: (x, y) \mapsto (ax + b, cy + d).$$

Calculons  $h_n \circ f \circ h_n^{-1}$  et  $h_n^{-1} \circ f \circ h_n$  et regardons à quelles conditions ce sont des automorphismes de degré 1 de  $\mathbb{A}_K^2$ .

$$\begin{aligned} h_n \circ f \circ h_n^{-1} &= (y, y^n - x) \circ (ax + b, cy + d) \circ (x^n - y, x) \\ &= (cx + d, (cx + d)^n + ay - ax^n - b) \\ &= (cx + d, x^n(c^n - a) + nc^{n-1}dx^{n-1} + \dots + ncd^{n-1}x + ay + d^n - b). \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$h_n^{-1} \circ f \circ h_n = (y^n(a^n - c) + na^{n-1}by^{n-1} + \dots + nab^{n-1}y + cx + b^n - d, ay + b).$$

Comme les applications  $h_n \circ f \circ h_n^{-1}$  et  $h_n^{-1} \circ f \circ h_n$  sont des automorphismes affines de  $\mathbb{A}_K^2$ , les coefficients  $a$  et  $c$  de  $f$  vérifient les relations :

$$c^n = a \text{ et } c = a^n$$

Cela signifie que  $a$  et  $c$  sont des racines  $(n^2 - 1)$ -ème de l'unité car ni  $a$  ni  $c$  ne peuvent être nuls sinon  $f$  ne serait pas un automorphisme.

Supposons dans un premier temps que  $n \geq 3$ . En considérant les coefficients de  $x^{n-1}$  et  $y^{n-1}$  nous avons :  $nc^{n-1}d = na^{n-1}b = 0$  d'où  $d = b = 0$ . Pour  $n \geq 3$ ,  $f$  est donc de la forme  $(x, y) \mapsto (ax, cy)$  avec  $a, c \in \mathbb{U}_{n^2-1}$  et  $a^n = c$ , ainsi le cardinal de  $\text{Fix}_\varepsilon\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\}$  est fini.

Si maintenant  $n = 2$ , nous ne pouvons pas conclure directement. Par hypothèse,  $f$  appartient à  $\text{Fix}_\varepsilon\{h_{2\#}^2(w_2), h_{2\#}^{-2}(w_2)\}$  cela signifie que

$$d(f_{\#}h_{2\#}^{-2}(w_2), h_{2\#}^{-2}(w_2)) \leq \varepsilon \text{ et } d(f_{\#}h_{2\#}^2(w_2), h_{2\#}^2(w_2)) \leq \varepsilon.$$

Comme  $h_{2\#}^{-2}$  et  $h_{2\#}^2$  sont des isométries nous avons en fait :

$$d(h_{2\#}^2 f_{\#} h_{2\#}^{-2}(w_2), w_2) \leq \varepsilon \text{ et } d(h_{2\#}^{-2} f_{\#} h_{2\#}^2(w_2), w_2) \leq \varepsilon.$$

D'après le lemme 16, les applications  $h_2^2 \circ f \circ h_2^{-2}$  et  $h_2^{-2} \circ f \circ h_2^2$  sont de degré 1. De plus le point  $p_0$  (respectivement le point  $q_0$ ) est le seul point base de  $h_2^2$  (respectivement de  $h_2^{-2}$ ) appartenant à  $\mathbb{P}_K^2$ . Par le même argument que précédemment,  $h_2 \circ f \circ h_2^{-1}$  préserve  $p_0$  et  $h_2^{-1} \circ f \circ h_2$  préserve  $q_0$ . Nous obtenons que  $2cd = 0$  et  $2ab = 0$ . Comme nous sommes en caractéristique différente de 2 et que  $f$  est un automorphisme nous devons avoir  $a$  et  $c$  non nuls donc  $b = d = 0$ . Finalement, lorsque  $n = 2$ ,  $f$  est de la forme  $(x, y) \mapsto (ax, cy)$  avec  $(a, c) \in \{(1, 1), (j, j^2), (j^2, j)\}$  où  $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ . Le cardinal de  $\text{Fix}_\varepsilon\{h_{2\#}^2(w_2), h_{2\#}^{-2}(w_2)\}$  est fini comme attendu.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [BC] J. BLANC & S. CANTAT – « Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces », [arxiv :1307.0361v1](#).
- [Bea95] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [BF02] M. BESTVINA & K. FUJIWARA – « Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups », *Geometry and Topology* **6** (2002), p. 69–89 (electronic).
- [BH99] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Can11] S. CANTAT – « Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces », *Annals of Mathematics. Second Series* **174** (2011), p. 299–340.
- [CD13] D. CERVEAU & J. DÉSERTI – *Transformations birationnelles de petit degré*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 19, Société Mathématique de France, Paris, 2013.
- [CL13] S. CANTAT & S. LAMY – « Normal subgroups in the Cremona group », *Acta Math.* **210** (2013), p. 31–94.

- [Cou14] R. COULON – « Théorie de la petite simplification : une approche géométrique », *Séminaire Bourbaki* **1089** (2014).
- [DGO] F. DAHMANI, V. GUIARDEL & D. OSIN – « Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces », *arxiv :1111.7048v5*.
- [Gui14] V. GUIARDEL – « Geometric small cancellation », in *Geometric Group Theory* (M. Bestvina, M. Sageev & K. Vogtmann, eds.), vol. 21, IAS/Park City Mathematics Institute, 2014.
- [Man86] Y. I. MANIN – *Cubic forms*, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.
- [Osi] D. OSIN – « Acylindrically hyperbolic groups », *arxiv :1304.1246v3*.
- [SB] N. SHEPHERD-BARRON – « Some effectivity questions for plane Cremona transformations », *arxiv :1311.6608v3*.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, 31062  
TOULOUSE CEDEX 9, FRANCE  
*E-mail address:* `alonjou@math.univ-toulouse.fr`