C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 297–300, 2000
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Sur le multidegré des transformations de Cremona

Ivan PAN

Instituto de Matemática-UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre/RS, Brasil
Courriel : pan@mat.ufrgs.br

(Reçu le 27 octobre 1999, accepté le 17 décembre 1999)

Résumé. On définit une notion de multidegré pour les transformations de Cremona. On établit des inéquations diophantiennes pour celui-ci et, dans le cas de dimension trois, on construit des transformations de Cremona avec tous les multidegrés possibles. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On multidegree of Cremona transformations

Abstract. *We define a notion of multidegree for Cremona transformations. We show Diophantine inequalities for the multidegree and we construct, in dimension three, the Cremona transformations with all possible multidegrees.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction

Tout au long de cette Note, k désignera un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif de dimension n sur k et $\mathbb{G}(\ell, n)$ la Grassmannienne des ℓ-plans de $\mathbb{P}^n$, pour $\ell = 0, \ldots, n$. On reserve le terme « variété » aux schémas réduits et irréductibles.

En tant que $\mathbb{Z}$-module, l'anneau de Chow de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est engendré par les classes d'équivalence rationnelle $h_{i,j}$, avec $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, des sous-variétés $E_i \times E_j \in \mathbb{G}(i, n) \times \mathbb{G}(j, m)$. Par ailleurs, le graphe (fermé) d'une application rationnelle $F : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ avec $m \geqslant n$, est une sous-variété de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ de dimension n dont la classe d'équivalence rationnelle γ_F est une combinaison linéaire des $h_{i,j}$, pour $i + j = n$, de la forme

$$\gamma_F = \sum_{\ell=0}^{n} d_{n-\ell}(F) h_{\ell, n-\ell},$$

avec $d_0(F) = 1$. Dans [7] les nombres $d_i = d_i(F)$ sont appelés les *caractères* de F ; dans le cas où F est de Cremona on a $d_n(F) = 1$, ce qu'on suppose par la suite ; on a en particulier $m = n$. Dans cette Note on appellera le $(n-1)$-vecteur $\operatorname{mdeg}(F) := (d_1, \ldots, d_{n-1})$ le multidegré de F.

Dans le §1 on énonce des généralités sur le multidegré et on donne des conditions arithmétiques nécessaires pour celui-ci : plus précisément, on montre que pour $\ell = \ell_1 + \ell_2$ on a

$$d_\ell \leqslant d_{\ell_1} d_{\ell_2}, \qquad d_{n-\ell} \leqslant d_{n-\ell_1} d_{n-\ell_2} \ (\ell = 1, \ldots, n-1) \ ; \tag{1}$$

Note présentée par Bernard MALGRANGE.

S0764-4442(00)00142-7/FLA

dans le cas où $n=3$, les « bidegrés » possibles sont donc

$$(d,e),\dots,\big(d,d^2\big),\quad d\geqslant 1,\ e\geqslant \sqrt{d}. \tag{2}$$

Néanmoins (2) est bien connu (*voir* [4]) ; on n'a trouvé de traitement systématique de cet invariant que dans [7] où on suggère une manière de calculer ces caractères que nous raffinons dans la proposition 1.1 plus bas.

Dans le §2, on construit des transformations de Cremona $F:\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ pour tout bidegré possible : c'est notre résultat principal. Le problème de savoir si pour $d_1,\dots,d_{n-1}$, vérifiant les inéquations (1), ou encore d'autres plus restrictives, il existe une transformation de Cremona avec ces caractères reste ouvert.

1. Multidegré des applications rationnelles

1.1. *Généralités.* – Soit $F:\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ une application rationnelle avec $m\geqslant n$; il existe $f_0,\dots,f_m\in k[x_0,\dots,x_n]$ homogènes de même degré $\deg(T)$, appelé *degré* de F, et sans diviseurs communs tels que

$$F(P)=\big[f_0(P),\dots,f_m(P)\big],\qquad P\in\mathbb{P}^n\smallsetminus\{f_0=\cdots=f_m=0\}\ ;$$

le *schéma de base* de F est le sous-schéma $B:=B(F)\subset\mathbb{P}^n$ défini par les f_i. Si $Z\subset\mathbb{P}^n$ est une sous-variété non contenue dans B, la *transformée stricte* (directe) de Z est la sous-variété $\widetilde{F}(Z):=\overline{F(Z-B)}\subset\mathbb{P}^m$; on note $\deg(Z/\widetilde{F}(Z))$ le degré de l'extension de corps de fractions induite par $Z\overset{F|}{\dashrightarrow}\widetilde{F}(Z)$. On dira qu'une paire (X,σ), X étant une variété projective et $\sigma:X\to\mathbb{P}^n$ un morphisme birationnel, *résout l'indétermination* de F si $F\circ\sigma$ est un morphisme. Dans le cas où σ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de B, avec diviseur exceptionnel $E:=\sigma^{-1}(B)$, on note $s(B,\mathbb{P}^n):=\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\sigma_*(E^k)$ la *classe de Segre* de B dans $\mathbb{P}^n$ ([3], § 4.2) ; si h dénote la classe d'un hyperplan dans $\mathbb{P}^n$, on écrit

$$s\big(B,\mathbb{P}^n\big)=\sum_{i=1}^{n}s_{n-i}h^i,$$

pour certains nombres entiers s_{n-i}.

Notons h_1 et h_2 les classes d'un hyperplan dans $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^m$ respectivement.

PROPOSITION 1.1. – *Soit $F:\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ une application rationnelle. On a les assertions suivantes* :

1. *si (X,σ) résout l'indétermination de F, alors on a*

$$d_\ell(F)=\deg\big[\sigma_*\big(\phi^*(h_2)^\ell\big)\cdot(h_1)^{n-\ell}\big],$$

où $\phi:=F\circ\sigma$;

2. *si $E\in\mathbb{G}(\ell,n)$ est générique, alors $d_\ell(F)=\deg\big(\widetilde{F}(E)\big)\deg\big(E/\widetilde{F}(E)\big)$;*
3. *si $B=B(F)$ et $d=\deg(F)$, alors*

$$d_\ell(F)=d^\ell-\deg\left[\sum_{i=\operatorname{codim}(B,\mathbb{P}^n)}^{\ell}d^{\ell-i}\binom{\ell}{i}s_{n-i}\right].$$

Démonstration. – Sans perte de généralité on peut prendre pour X le graphe de F dans $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ et pour $\sigma,\ \phi$ les restrictions à X des projections $\mathrm{pr}_1,\ \mathrm{pr}_2$ sur $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^m$ respectivement ; il en résulte facilement 1. Pour démontrer 2, il suffit d'observer que $\mathrm{pr}_1^*(h_1)^{n-\ell}\gamma_F=\gamma_{F|_E}$, où $\gamma_{F|_E}$ est la classe du graphe de la restriction $E\overset{F|}{\dashrightarrow}\widetilde{F}(E)$ de F à E.

Finalement, si (X, σ) est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de B, on a $\phi^*(h_2) = d\sigma^*(h_1) - e$, avec e la classe du diviseur exceptionnel. De 1 il suit

$$d_\ell(F) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} d^{\ell-i} \deg\left[h_1^{n-i} \cdot \sigma_*(e^i)\right].$$

On sait que ([3], Cor. 4.2.2) $\deg\left[h_1^{n-i} \cdot \sigma_*(e^i)\right] = (-1)^{i-1} s_{n-i}$; en particulier, $s_{n-i} = 0$ pour $0 < i < \operatorname{codim}(B, \mathbb{P}^n)$. On en déduit l'assertion 3. $\square$

Supposons maintenant $n = m$ et F de Cremona. Dans ce cas $d_\ell(F) = \deg\big(\widetilde{F}(E)\big)$, d'où aussitôt $d_1(F) = \deg(F)$; de plus, puisque γ_F s'obtient de $\gamma_{F^{-1}}$ par l'involution qui transpose les facteurs de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, on a $d_\ell(F) = d_{n-\ell}\big(F^{-1}\big)$.

Par ailleurs, si $E = E_1 \cap E_2$ avec $E_1 \in \mathbb{G}(\ell_1, n)$ et $E_2 \in \mathbb{G}(\ell_2, n)$ génériques, $\widetilde{F}(E)$ est contenu dans $\widetilde{F}(E_1) \cap \widetilde{F}(E_2)$ d'où, par l'assertion 2 de la proposition 1.1, $d_\ell(F) \leqslant d_{\ell_1}(F) d_{\ell_2}(F)$ pour $\ell = \ell_1 + \ell_2 \geqslant 0$ ($n > 2$). On en déduit les inéquations (1).

Voici quelques exemples :

Exemple 1.1. – Si $d_1(F) = 1$, alors $F \in \mathrm{PGL}(n+1)$, donc les automorphismes sont les seules transformations F avec $\operatorname{mdeg}(F) = (1, \ldots, 1)$.

Si B est irréductible et lisse, $s(B, \mathbb{P}^n)$ est l'action sur la classe fondamentale de B de l'inverse de la classe de Chern totale du fibré normal à B dans $\mathbb{P}^n$ ([3], Cor. 4.2.1). Dans le cas où F est de Cremona et B irréductible est lisse, on parle de transformations de Cremona spéciales d'après [1] et [2] ; on prend dans ce dernier article la transformation de l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.2. – Considérons l'application rationnelle de $\mathbb{P}^n$ où $B(F)$ est l'image du plongement de Veronese $\nu : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$: on sait que, dans ce cas, l'idéal associé à $B = B(F)$ est engendré par six polynômes de degré 2. Or, on a ([3], Ex. 3.2.15)

$$s\big(B, \mathbb{P}^5\big) = \big(1 - 9\nu_*(t) + 51\nu_*(t^2)\big) \cap B = 4h^3 - 18h^4 + 51h^5,$$

où t désigne la classe d'une droite dans $\mathbb{P}^2$. On en déduit que $d_5(F) = 1$ et donc F est de Cremona, et que $\operatorname{mdeg}(F) = (2, 4, 4, 2)$.

Exemple 1.3. – Une transformation de de Jonquières est une transformation de Cremona $F : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, de degré d, qui, modulo des changements de coordonnées, peut s'écrire sous la forme :

$$F = [g, qx_1, \ldots, qx_n],$$

avec $g = x_0 g_{d-1}(x_1, \ldots, x_n) + g_d(x_1, \ldots, x_n)$ irréductible, $q = x_0 q_{d-2}(x_1, \ldots, x_n) + q_{d-1}(x_1, \ldots, x_n)$; ces transformations existent pour tout $d \geqslant 2$ (*voir* [5]). On a $\operatorname{mdeg}(F) = (d, \ldots, d)$: en effet, en dehors de $q = 0$, l'intersection de ℓ hypersurfaces génériques d'équations $g_j := g + q\big(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i\big) = 0$, coïncide avec l'intersection de $\{g_1 = 0\}$ avec le $(n - \ell + 1)$-plan générique d'équations $\sum_{i=1}^n (a_{ij} - a_{i1}) x_i = 0$, $j = 2, \ldots, \ell$; d'où $d_{n-\ell}(F) = d$.

2. Résultat principal

Soit $F : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ de Cremona avec $d := \deg(F) \geqslant 1$. Par la proposition 1.1 on sait que $\operatorname{mdeg}(F) = \big(d, \deg \widetilde{F}^{-1}(L)\big)$ où L désigne une droite générique. Si $L = H_1 \cap H_2$ avec H_i des plans génériques et $S_i := \widetilde{F}^{-1}(H_i)$, d'après le théorème de Bézout on a $\widetilde{F}^{-1}(L) = S_1 \cap S_2 - \sum_{i=1}^r m_i B_i$, où $B_1, \ldots, B_r$ sont les composantes irréductibles de dimension 1 de $B = B(F)$ et où m_i désigne la multiplicité d'intersection de S_1 et S_2 le long de B_i. En coupant avec un plan générique on en déduit $d_2(F) = d^2 - \sum m_i \deg(B_i)$; observer qu'alors les transformations avec $d_2 = d^2$ vérifient $\dim B = 0$.

Par ailleurs, une transformation *stellaire* est une transformation de Cremona $T_{g,q,t} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, de degré disons d, qui, modulo des changements de coordonnées, peut s'écrire $T_{g,q,t} = [g, qt_1, \dots, qt_n]$, avec $t_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ de degré r pour tout $i = 1, \dots, n$, $g = x_0 g_{d-1}(x_1, \dots, x_n) + g_d(x_1, \dots, x_n)$ irréductible, $q = x_0 q_{d-r-1}(x_1, \dots, x_n) + q_{d-r}(x_1, \dots, x_n)$ et de sorte que l'application $\overline{T} := [t_1, \dots, t_n]$ soit de Cremona de $\mathbb{P}^{n-1}$ de degré r (ces transformations sont étudiées dans [6]).

Exemple 2.1. – Pour d et r comme ci-dessus, mais avec $n = 3$, considérons une transformation stellaire $T_{g,q,t} = [g, qt_1, qt_2, qt_3]$. La partie de dimension 1 de l'ensemble de points-base est la réunion de la courbe $C_1 := \{g = q = 0\}$ et, éventuellement, du cône C_2 constitué des droites contenues dans $g = 0$ qui sont de la forme op avec $o = [1, 0, 0, 0]$ et p un point-base de $\overline{T}$. Si q est générique, $C_1 = B_1$ est une composante irréductible de dimension 1 de B et avec $m_1 = 1$; de même, si $q = h^{d-r}$ avec $h = 0$ l'équation d'un plan générique passant par o, alors $B_1 = \{g = h = 0\}$ et $m_1 = d - r$. Supposons que pour tout point-base p de $\overline{T}$ tel que la droite op soit contenue dans $g = 0$, deux transformées strictes de droites génériques par $\overline{T}^{-1}$ s'intersectent avec multiplicité 1 : un tel point-base sera appelé *ordinaire*. Alors, les composantes B_i de B pour $i > 1$ et les m_i correspondantes sont données par ces droites op et leurs multiplicités dans $g = 0$. On en déduit

$$d_2(T_{g,q,t}) = d^2 - d(d - r) - \sum_{i \geqslant 2} m_i = dr - \sum_{i \geqslant 2} m_i.$$

Cet exemple sera utilisé dans le résultat suivant :

LEMME 2.1. – *Soient $d \geqslant r \geqslant 2$. Alors, il existe des transformations stellaires de multidegré $(d, dr - \ell)$ avec $\ell = 0, 1, \dots, d - 1$.*

Démonstration. – Choisissons d'une part $\overline{T} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ de Cremona de degré r de sorte qu'il existe un point $p \in B(\overline{T})$ ordinaire. Considérons d'autre part, une surface $S \subset \mathbb{P}^3$ de degré d, irréductible et générique parmi celles qui contiennent le point o avec multiplicité $d - 1$ et la droite op avec multiplicité ℓ (ceci existe !) ; par généricité, S ne contient pas d'autres droites de la forme op' avec p' point-base de $\overline{T}$. Si $g = 0$ est une équation de S et $q = x_0 q_{d-r-1} + q_{d-r}$ est générique, la transformation stellaire $T_{g,q,t}$ correspondante convient. □

THÉORÈME 2.2. – *Pour tout entier positif d, il existe des transformations stellaires de $\mathbb{P}^3$ de multidegré (d, e) avec $\sqrt{d} \leqslant e \leqslant d^2$.*

Démonstration. – Puisque $\mathrm{mdeg}(F) = (d, e)$ équivaut à $\mathrm{mdeg}(F^{-1}) = (e, d)$ et $d = 1$ implique $e = 1$, on peut supposer $e \geqslant d \geqslant 2$; or, le cas $e = d$ résulte de l'exemple 1.3. Il suffit donc de construire, pour $d \geqslant 2$, des transformations stellaires de multidegré (d, e) pour $e = d + 1, \dots, d^2$, ce qui est une conséquence du lemme 2.1. □

Remerciements. J'aimerais remercier Thierry Vust pour ses précieuses suggestions.

Références bibliographiques

[1] Crauder B., Katz S., Cremona Transformations with smooth irreducible fundamental locus, Amer. J. Math. 111 (1989) 289–307.
[2] Ein L., Shepherd-Barron N., Some Special Cremona transformations, Amer. J. Math. 111 (1989) 783–800.
[3] Fulton W., Intersection Theory, Springer-Verlag, 1984.
[4] Hudson H.P., Cremona Transformation in Plane and Space, Cambridge at the University Press, 1927.
[5] Pan I., Une remarque sur la génération du groupe de Cremona, Bol. Soc. Bras. Mat. 30 (1) (1999) 95–98.
[6] Pan I., Les transformations de Cremona stellaires, Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
[7] Semple J.G., Tyrrell J.A., Specialization of Cremona Transformations, Mathematika 15 (1968) 171–177.