

Sui diagrammi reciproci del Cremona.

Memoria di TULLIO VIOLA (a Bologna).

Sunto. - *Esistenza di un diagramma reciproco per ogni travatura triangolare semplice soggetta ad un sistema di forze esterne in equilibrio, applicate ai nodi. Esistenza di travature che ammettono diagramma reciproco o no, a seconda delle sollecitazioni esterne. Proprietà notevole di due superficie poliedriche a facce triangolari, reciproche in una qualunque reciprocità.*

1. Nella 2^a ediz. delle *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, di T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI (Zanichelli, 1930, pag. 633 e segg.) è dimostrata l'esistenza di un diagramma reciproco per ogni travatura triangolare semplice soggetta ad un sistema di forze esterne in equilibrio, applicate ai nodi. La dimostrazione consiste nella effettiva costruzione di due superficie poliedriche S ed S' semplicemente connesse, reciproche rispetto al sistema nullo e nelle condizioni descritte dal CREMONA nella classica Memoria *Le figure reciproche nella statica grafica* (ediz. 1872, n.¹ 23, 24).

In questa nota mi propongo di svolgere un'altra dimostrazione di questa proprietà, aggiungendo inoltre un esempio per mostrare l'esistenza di travature che ammettono diagramma reciproco o no, a seconda delle sollecitazioni esterne alle quali sono sottoposte. Completerò poi il risultato con un'osservazione sulle figure reciproche nello spazio.

2. Per una travatura triangolare semplice, in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze esterne applicate ai nodi, è possibile disegnare un diagramma degli sforzi nelle singole aste, il quale soddisfa alle seguenti condizioni:

1^a) le forze esterne sono disposte in un poligono chiuso nel quale esse si susseguono nell'ordine in cui s'incontrano percorrendo il contorno della travatura (girando in un senso oppure nel senso opposto);

2^a) ad ogni nodo della travatura corrisponde nel diagramma un poligono chiuso i cui lati sono ordinatamente paralleli alle aste e all'eventuale forza esterna che concorrono in quel nodo, ed hanno lunghezze proporzionali alle intensità degli sforzi che si trasmettono nelle singole aste e dell'eventuale forza esterna;

3^a) per ogni asta della travatura vi è nel diagramma un solo segmento che ne rappresenta lo sforzo (LEVI-CIVITA e AMALDI, loc. cit., pag. 623).

Si tratta di dimostrare che un tale diagramma è reciproco dello schema della travatura.

Fissiamo all'uopo l'attenzione su un esempio che riporto dalle citate *Lezioni di Meccanica razionale*, ma conduciamo la dimostrazione per via del tutto generale.

La fig. 1 rappresenti da una parte una travatura reticolare triangolare semplice in equilibrio, dall'altra il corrispondente diagramma degli sforzi che supponiamo costruito in base alle leggi del presente numero. Innalziamo in tutti i vertici del diagramma degli sforzi (cioè nei punti $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$, T, T', T'', T''') le perpendicolari indefinite al piano del foglio, cioè le proiettanti

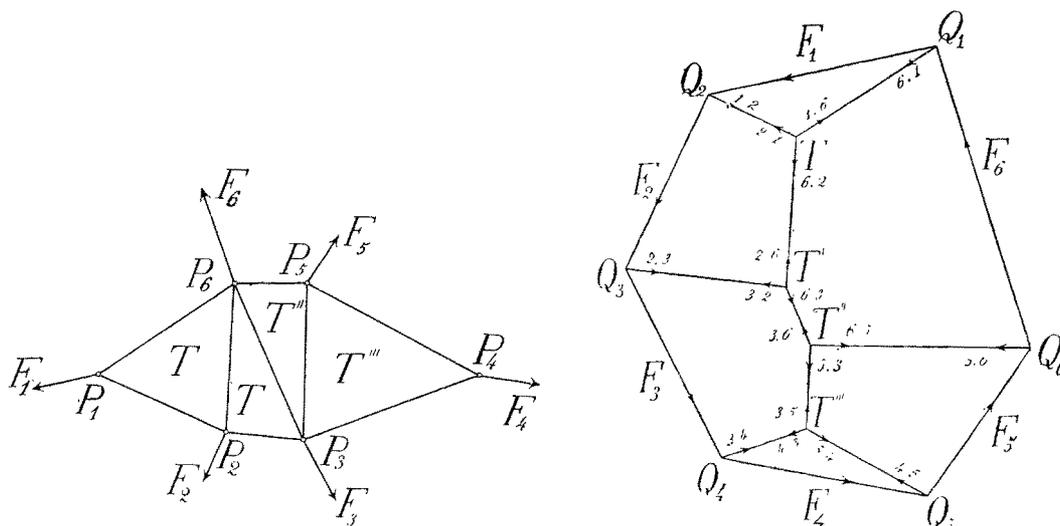


Fig. 1.

sul piano ortografico. Ci proponiamo di costruire una superficie poliedrica S semplicemente connessa, avente i vertici sulle proiettanti ora innalzate sul piano ortografico e le cui facce abbiano per proiezioni i poligoni del diagramma degli sforzi: tale quindi che il poligono delle forze sia la proiezione del suo orlo e che gli altri segmenti del diagramma siano le proiezioni degli spigoli. La superficie S dovrà essere costruita in modo che la sua reciproca S' si proietti nello schema della travatura; alle facce di S dovranno, per la reciprocità, corrispondere i vertici di S' , agli spigoli di S gli spigoli di S' , all'orlo di S l'orlo di S' ; e quindi, per la proiezione ortografica, ai singoli poligoni, al poligono delle forze, ai singoli lati « interni » del diagramma, do-

vranno corrispondere nello schema della travatura rispettivamente i singoli nodi, il sistema delle forze esterne e le aste.

Come primo spigolo della superficie poliedrica S , costruiamo quello cui deve corrispondere l'asta di parete P_1P_2 del primo triangolo T , cioè l'asta congiungente il nodo P_1 in cui concorrono due sole aste col nodo P_2 in cui concorrono tre sole aste. Tale primo spigolo dovrà essere un segmento avente gli estremi \bar{Q}_2, \bar{T} sulle proiettanti innalzate nei punti Q_2, T . Scegliamo ad arbitrio \bar{Q}_2 sulla proiettante in Q_2 e lasciamo indeterminato il punto \bar{T} sulla proiettante in T : abbiamo un fascio di rette (i sostegni dei segmenti $\bar{Q}_2\bar{T}$) con centro in \bar{Q}_2 e giacente in un piano proiettante; ad esso corrisponderà, per la reciprocità, un fascio improprio di rette che si proietterà, sul piano ortografico, ancora in un fascio improprio, anzi nel fascio improprio il cui centro è il punto improprio della retta Q_2T . Potremo dunque scegliere \bar{T} sulla proiettante in T in modo che il corrispondente spigolo di S' si proietti nella retta P_1P_2 . Però la posizione dei nodi P_1P_2 non sarà fissata che quando si sarà fissata la posizione delle facce di S che hanno in comune lo spigolo $\bar{Q}_2\bar{T}$. Volendo che la posizione dei nodi P_1P_2 sia proprio quella dello schema della travatura, consideriamo in modo analogo gli altri due fasci di centro \bar{Q}_2 , quello che si appoggia alla proiettante in Q_1 e quello che si appoggia alla proiettante in Q_3 : al primo corrisponde, sul piano ortografico, il fascio improprio il cui centro è il punto improprio della retta d'azione della forza F_1 , al secondo il fascio improprio il cui centro è il punto improprio della retta d'azione della forza F_2 . Scegliamo i punti \bar{Q}_1 e \bar{Q}_3 rispettivamente sulle proiettanti in Q_1 e in Q_3 in modo che alle rette $\bar{Q}_2\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\bar{Q}_3$ corrispondano, sul piano ortografico, rette passanti, rispettivamente per P_1, P_2 . Con ciò si saranno fissate le posizioni delle prime due faccie della superficie poliedrica S , la faccia triangolare $\bar{Q}_2\bar{Q}_1\bar{T}$ e la faccia quadrangolare $\bar{Q}_2\bar{T}\bar{Q}_3\bar{T}$, in modo che ad esse corrispondono, sul piano ortografico, rispettivamente i punti P_1P_2 precisamente nella posizione dello schema della travatura.

Nel completare la costruzione della superficie poliedrica S , rimarrà arbitraria la sola scelta del punto \bar{Q}_2 sulla proiettante in Q_2 e ciò come accade con la soluzione data nelle citate *Lezioni*, nella quale veniva anzitutto costruita la superficie poliedrica S' permettendole un grado di libertà (cioè la traslazione in direzione normale al piano ortografico, come nella costruzione presente).

Avendo fissata la posizione delle prime due faccie, nel modo che si è indicato, risultano fissati con esse anche gli spigoli $\bar{Q}_1\bar{T}$ e $\bar{T}\bar{T}$ ai quali cor-

rispondono, sul piano ortografico, le aste P_1P_6 , P_2P_6 , cioè quelle che, insieme all'asta già considerata P_1P_2 completano la prima maglia triangolare (infatti gli spigoli $\bar{Q}_2\bar{T}$, $\bar{Q}_1\bar{T}$, $\bar{T}'\bar{T}$ hanno in comune il vertice \bar{T} cui corrisponde, nella proiezione ortografica, la detta maglia triangolare). Con gli spigoli $\bar{Q}_1\bar{T}$ e $\bar{T}'\bar{T}$ risulta ulteriormente fissata la posizione della faccia di S cui corrisponde il nodo P_6 e questo non potrà evidentemente venire a cadere che nella posizione dello schema della travatura.

Avendo fissata la posizione delle facce di S alle quali corrispondono i nodi P_2 e P_6 , risultano fissati con esse anche gli spigoli $\bar{Q}_3\bar{T}'$ e $\bar{T}''\bar{T}''$ ai quali corrispondono, sul piano ortografico, le aste P_2P_3 , P_3P_6 , cioè quelle che, insieme all'asta già considerata P_2P_6 completano la seconda maglia triangolare (infatti gli spigoli $\bar{Q}_3\bar{T}'$, $\bar{T}'\bar{T}'$, $\bar{T}''\bar{T}''$ hanno in comune il vertice \bar{T}' cui corrisponde, nella proiezione ortografica, la detta maglia triangolare). Con gli spigoli $\bar{Q}_3\bar{T}'$ e $\bar{T}''\bar{T}''$ risulta ulteriormente fissata la posizione della faccia di S cui corrisponde il nodo P_3 e questo non potrà evidentemente venire a cadere che nella posizione dello schema della travatura.

Così si passerà successivamente al triangolo T'' e al nodo P_5 , al triangolo T''' e al nodo P_4 . È chiaro che se il numero dei triangoli costituenti la travatura fosse > 4 , non si avrebbe difficoltà a proseguire il procedimento fino ad aver esauriti tutti i triangoli.

Con ciò si è eseguita la costruzione della superficie poliedrica S e si è dimostrato che la proiezione della superficie poliedrica S' (reciproca di S) è proprio lo schema della travatura, com'era richiesto dal problema.

3. Si pone ora la questione di sapere se la dimostrazione può essere estesa ad altri tipi di travature e se la costruzione dei diagrammi reciproci per una data travatura sia possibile per tutte le condizioni di carico. La ricerca di una condizione necessaria e sufficiente sarebbe lunga ed inutile; qui mi propongo soltanto di mostrare con un esempio come si possono avere travature triangolari che non ammettono in generale un diagramma reciproco e come tale diagramma possa esistere per certe condizioni di carico, mancare per altre.

La fig. 2 rappresenta lo schema di una travatura triangolare non semplice di 5 nodi e di $2 \cdot 5 - 3 = 7$ aste, sottoposta ad una generica qualunque ipotesi di carico: accanto ad essa sono disegnati i poligoni di equilibrio relativi a ciascun nodo, riuniti fra loro in modo da formare un diagramma che non è più reciproco perchè in esso sono tracciati due volte i segmenti

proporzionali agli sforzi nelle aste 1·2 e 3·5. Si vede per tentativi che non è possibile riunire questi poligoni in modo che non si presentino simili ripe-

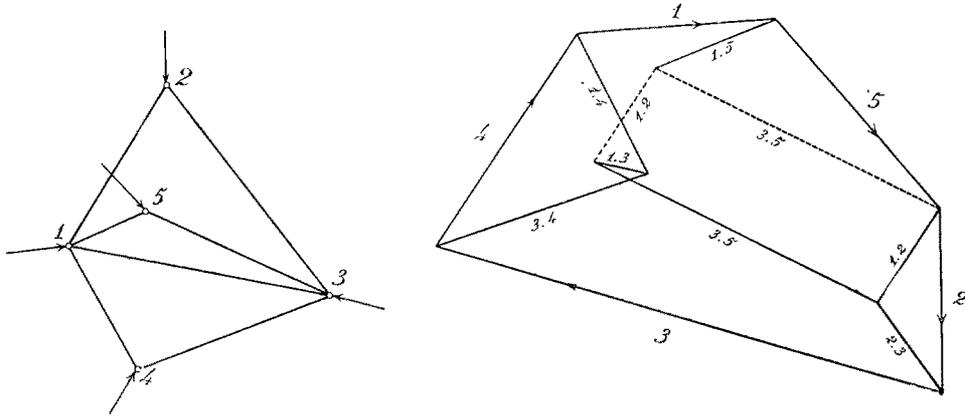


Fig. 2.

tizioni. Se la stessa travatura è invece sottoposta a un carico conveniente, come ad es. nella fig. 3, in cui le forze 4, 5 sono uguali, di segno contrario ed hanno la stessa linea d'azione, allora è possibile disegnare un diagramma

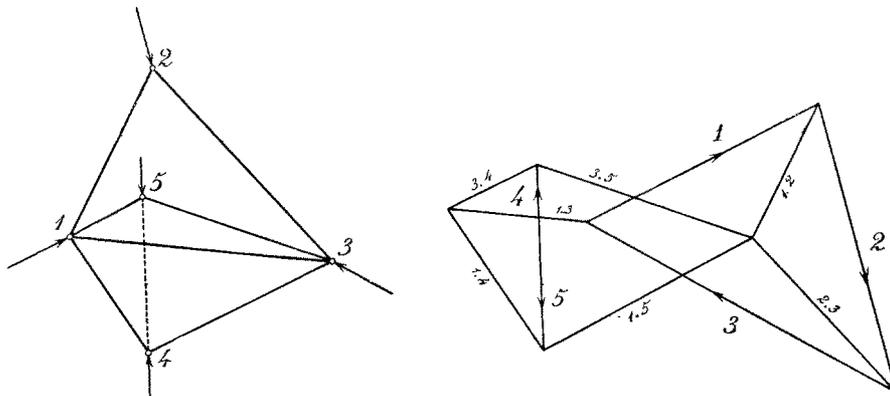


Fig. 3.

degli sforzi che soddisfa alle condizioni enunciate al n.º 2, tal quale l'abbiamo disegnato. Ripetendo su questo diagramma i ragionamenti del n.º 2 si vede che anche questo diagramma è reciproco.

4. Consideriamo ora una reciprocità qualunque e vediamo come si estendono ad essa le proprietà geometriche dimostrate al n.º 2 per il *sistema nullo*. Per una reciprocità qualunque è assai facile dimostrare la proposizione

seguinte, da considerarsi come una generalizzazione di quella del n.º 23 della citata Memoria del CREMONA:

Se S è una superficie poliedrica a facce triangolari, S' la superficie reciproca di S in una qualunque reciprocità Θ , se σ , σ' sono le loro proiezioni su un qualunque piano π da un punto P , qualunque purchè unito nella reciprocità Θ :

allora le due figure σ , σ' risultano riferite in modo che ad ogni triangolo di σ corrisponde un punto di σ' , ad ogni lato comune a due triangoli di σ corrisponde la congiungente i punti corrispondenti ad essi e queste due rette incontrano la retta che è intersezione di π col piano reciproco di P in punti che si corrispondono in una proiettività.

Orbene, il procedimento descritto al n.º 2, ripetuto per il caso generale, permette d'invertire la proposizione ora enunciata nella forma seguente:

Dato in un piano un sistema finito od infinito di triangoli ed una corrispondenza biunivoca che faccia corrispondere a ciascun triangolo del sistema un punto del piano e ad ogni lato comune a due triangoli la congiungente i punti corrispondenti a questi; se avviene che le coppie di rette corrispondenti incontrino tutte una retta fissa r in punti corrispondenti in una proiettività:

allora si può far corrispondere ad ogni retta del sistema piano una retta dello spazio di cui essa sia proiezione da un punto fisso arbitrario P , per modo che le coppie di rette che corrispondono a coppie di rette corrispondenti nel piano siano reciproche rispetto ad una reciprocità spaziale assegnata arbitrariamente, purchè tale che in essa il punto P sia punto unito ed abbia per reciproco il piano P' , e che la proiettività che essa subordina tra i fasci di rette sovrapposti con centro in P e sostegno il piano P' proietti la detta proiettività sulla r .