

Développements limités

TD 2

Exercice 1 (D.L. d'un produit de fonctions)

1) Donner le D.L. à l'ordre 3 en 0 de la fonction $e^x \cos(x)$:

À partir de

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

on obtient

$$e^x \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x) \right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + x \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{Asi: } e^x_{\text{aprox}}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\text{y.e. } e^x_{\text{aprox}}(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

Dominio de D.L. es donde $x \neq 0$ de $e^x \sin(x)$:

A punto de

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{en } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \text{en } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Mas entonces

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x)\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_2(x)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{en } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

Donnons le d.l. à l'ordre 3 en 0 de $\cos(x)\sqrt{1+x}$:

A partir du

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_3(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Produit de termes

$$\begin{aligned} \cos(x)\sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_3(x)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_2(x)\right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} - \frac{3x^3}{16} + x^3 \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

Donnons le D.L. à l'ordre 3 en 0 de la fonction $(x^3+1) \sqrt{1-x}$:

$$\text{A partir de } \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{on } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} (x^3+1) \sqrt{1-x} &= (x^3+1) \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_1(x) \right) \\ &= x^3 + 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + x^3 \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

2) Donnons le D.L. à l'ordre 4 en 0 de la fonction $\ln(1+x) \cos(x)$:

A partir de

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x) \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x)\cos(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_2(x)\right) \\
 &= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x) \quad \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\
 &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

3) Donnons le D.L. à l'ordre 9 en 0 de la fonction $(\sin(x) - 1 + \frac{x^2}{2}) (\sin(x) - 1 + \frac{x^2}{2})$:

$$\begin{aligned}
 \text{A priori de } \sin(x) - 1 + \frac{x^2}{2} &= \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + x^9 \varepsilon_1(x) \quad \text{ou } \lim \varepsilon_1(x) = 0 \\
 \sin(x) - x &= -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9 \varepsilon_2(x) \quad \text{ou } \lim \varepsilon_2(x) = 0
 \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
 \left(\sin(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right) (\sin(x) - x) &= \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + x^9 \varepsilon_1(x)\right) \left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9 \varepsilon_2(x)\right) \\
 &= -\frac{x^7}{3!4!} + \frac{x^9}{4!5!} + \frac{x^9}{6!3!} + x^9 \varepsilon(x) \quad \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{soit } \left(\ln(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right) (\sin(x) - x) = -\frac{x^7}{3!5!} + \left(\frac{1}{4!5!} + \frac{1}{6!3!}\right)x^9 + x^9 \varepsilon(x)$$

$$= -\frac{x^7}{144} + \frac{x^9}{288} + x^9 \varepsilon(x)$$

Exercice 2 (D.L. d'un quotient)

Rappel Soient a, b deux réels non nuls tels que $0 < a < b$. Posons $I =]a, b[$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ et soit $g: I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions telles que g ne s'annule pas sur I .
Considérons le quotient

$$\frac{f}{g}: I \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Proposition Soit f et g sur des D.L. de 0 à droite α de parties négatives F et G , alors $\frac{f}{g}$ est un D.L. de 0 à droite α de partie négative

- La partie négative du D.L. de $\frac{F}{G}$ de 0 à droite α est

de l'autre

• Le quotient Q de la division du puissance voisante d'ordre m de F par G : α quotient Q est caractérisé par

$$F = QG + x^{m+1}M$$

$$\text{avec } \deg Q \leq m \text{ et } Q = 0$$

- a) $x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $x^2 - x - 1$ ont des D.L. en 0 à l'ordre 3 de parties significatives $F = x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $G = x^2 - x - 1$ [on effet $x^3 - 2x^2 + x - 2 \neq x^2 \cdot x - 1$ pour des polynômes]. De plus $x^2 - x - 1$ ne s'annule pas au voisinage de 0. Par suite de ces D.L. en 0 à l'ordre 3 de partie significative le quotient Q de la division euclidienne du puissance voisante d'ordre 3 de F par G . Effectuons donc la division euclidienne du puissance voisante de F par G :

$$\begin{array}{r}
 -2 + x - 2x^2 + x^3 \\
 + 2 + 2x - 2x^2 \\
 \hline
 3x - 4x^2 + x^3 \\
 - 3x - 3x^2 + 3x^3 \\
 \hline
 -7x^2 + 4x^3 \\
 + 7x^2 + 7x^3 - 7x^4 \\
 \hline
 11x^3 - 7x^4 \\
 - 11x^3 - 11x^4 + 11x^5 \\
 \hline
 -18x^4 + 11x^5
 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q = 2 - 3x + 7x^2 - 11x^3$$

ausklammern gilt - da führt Klammer aus der 2. L. die f. à Produkte 3 an 0 zu $2 - 3x + 7x^2 - 11x^3$.

2) La division se fait avec croissants de x à l'ordre 2 de $-\frac{1}{6}x^3 + x - 1$ par

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ sur:}$$

$$\begin{array}{r} -1+x \quad -\frac{1}{6}x^3 \\ +1 \quad -\frac{x^2}{4} \\ \hline x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6}x^3 \\ -x \quad +\frac{x^3}{4} \\ \hline -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \\ +\frac{x^2}{4} \quad -\frac{x^4}{16} \\ \hline \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{16} \end{array}$$

La partie régulière du D.L. de $\sin(x) - 1$ à l'ordre 2 est 0 car $-1 + x - \frac{x^2}{6}$
 $\frac{1}{2}(x+1) -$

Comme $\cos(x) + 1$ ne s'annule pas au voisinage de 0 la partie régulière du D.L.

$$\text{en } 0 \text{ à l'ordre 2 de } \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} \text{ est } -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}. \text{ Autrement dit le D.L. en 0}$$

$$\text{à l'ordre 2 de } \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} \text{ est } -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3) Considérons $\sin(x) = \frac{e^ix - e^{-ix}}{2i}$. La partie régulière du D.L. en 0 à l'ordre 3 de e^{ix}

$$\text{est } 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \text{ La partie régulière du D.L. en 0 à l'ordre 3 de } e^{-ix} \text{ est}$$

$$1 - \frac{x^2}{2}. \text{ Puisque } \sin(x) \text{ ne s'annule pas au voisinage de 0 la partie régulière}$$

du D.L. en 0 à l'ordre 3 de $\sin(x)$ est le quotient de la division du puissants voisins de

$$de 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \text{ par } 1 - \frac{x^2}{2}. \text{ Effectuons donc la division des puissants croissants}$$

$$de 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \text{ par } 1 - \frac{x^2}{2}:$$

$$\begin{array}{r}
 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\
 - 1 \qquad \qquad + \frac{x^2}{2} \\
 \hline
 x + x^2 + \frac{x^3}{6} \\
 - x \qquad \qquad + \frac{x^3}{2} \\
 \hline
 x^2 + \frac{x^3}{6} \\
 - x^2 \qquad \qquad + \frac{x^4}{2} \\
 \hline
 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} \\
 - \frac{x^3}{3} \qquad \qquad + \frac{x^5}{6} \\
 \hline
 \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6}
 \end{array}$$

Quotient de la division des puissances croissantes de $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

"

Faute négligée du D.L. en 0 à l'ordre 3 de $\frac{e^x}{\cos(x)}$

Ainsi le D.L. en 0 à l'ordre 3 de $\frac{e^x}{\cos(x)}$ est $1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$

On $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Démontrer le D.L. en 0 à l'ordre 3 de $\mu(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$

→ $\sin(x)$ s'annule en 0 !!! on ne peut donc pas appliquer l'énoncé rappelé
facilement.

$$\text{On a } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \text{on } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon_2(x) \quad \text{on } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\text{donc } \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_2(x)} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)}$$

Remarquons que $1 - \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)$ ne s'anule pas au voisinage de 0 (car $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) \neq 0$)

Par conséquent la partie supérieure du D.L. en 0 à l'ordre 3 de μ est
le quotient de la division des puissances croissantes de $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$ par

$$1 - \frac{x^2}{6} \cdot \text{ Effectuons cette division :}$$

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \\ \underline{- 1 \quad \quad \quad + \frac{x^2}{6}} \\ -1 \quad \quad \quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} \\ + \frac{x^2}{2} \quad \quad \quad - \frac{x^3}{12} \\ \hline \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ - \frac{x^2}{2} \quad \quad \quad + \frac{x^4}{12} \\ \hline - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{12} \\ + \frac{x^3}{3} \quad \quad \quad - \frac{x^5}{18} \\ \hline \frac{x^6}{12} - \frac{x^5}{18} \end{array}$$

Il se résulte que le D.L. de π

en 0 est d'ordre 3 soit

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exercice 3

1) Donner le D.L. de $\sin(x)$ à l'ordre 6 de $\cos(2x)$:

$$\text{D'une part } \cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \varepsilon_1(u) \quad \text{ où } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) = 0$$

d'autre part $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

$$\text{Or } \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \varepsilon_2(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\text{i.e. } \cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + \varepsilon_2(x)$$

$$\text{Or } 1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + \varepsilon_2(x)$$

$$\text{Par ailleurs } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon_3(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

Il s'ensuit que

$$\sin(x)(1 - \cos(2x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon_3(x) \right) \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + x^7 \varepsilon_2(x) \right)$$

$$= 2x^3 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{2x^5}{3!} + x^6 \varepsilon_4(x)$$

$$= 2x^3 - x^5 + x^6 \varepsilon_4(x)$$

Finalement la D.L. de $\sin(x)(1 - \cos(2x))$ en 0 à l'ordre 6 est $2x^3 - x^5 + x^6 \varepsilon_4(x)$.

2) Donnons le D.L. de $\sqrt{2+3x}$ en 0 à l'ordre 3.

$$\text{Nous avons } \sqrt{2+3x} = \sqrt{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{3}{2}x}$$

$$\text{Or } \sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3 \varepsilon_1(u) \quad \text{et } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}x = 0$$

$$\text{donc } \sqrt{1+\frac{3}{2}x} = 1 + \frac{\frac{3}{2}x}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^3}{16} + x^3 \varepsilon_2(x)$$

$$\text{i.e. } \sqrt{2+\frac{3}{2}x} = 1 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{32}x^2 + \frac{27}{128}x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$

Pour suite $\sqrt{2+3x} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{32}x^2 + \frac{27}{128}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \right)$

Finalement le D.L. de $\sqrt{2+3x}$ en 0 à l'ordre 3 est

$$\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}x - \frac{9\sqrt{2}}{32}x^2 + \frac{27\sqrt{2}}{128}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

3) Donnons le D.L. de e^{x^2} en 0 à l'ordre 4.

$$\begin{aligned} \text{D'une part } e^{\lambda} &= 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \lambda^4 \varepsilon(\lambda) \quad \text{ où } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon(\lambda) = 0 \\ &= 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24} + \lambda^4 \varepsilon_1(\lambda) \end{aligned}$$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + x^4 \varepsilon(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Finalement le D.L. de e^{x^2} à l'ordre 4 en 0 est: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4 \varepsilon(x)$

Donnons le D.L. de 5^{3x^2} en 0 à l'ordre 4:

$$\text{Nous avons } 5^{3x^2} = e^{3x^2 \ln 2}$$

$$\text{Or } e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_1(u) \text{ où } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) = 0 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 \ln 2 = 0$$

$$\text{donc } 5^{3x^2} = e^{3x^2 \ln 2} = 1 + 3x^2 \ln 2 + \frac{(3x^2 \ln 2)^2}{2} + x^4 \varepsilon(x) \quad \text{or } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Ainsi le D.L. de 5^{3x^2} en 0 à l'ordre 4 est :

$$5^{3x^2} = 1 + 3 \ln 2 x^2 + \frac{9(\ln 2)^2}{2} x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

4) Donnons le D.L. de $\ln(1+3x)$ en 1 à l'ordre 3.

Pour $x=1+h$; lorsque x est proche de 1, h est proche de 0.

$$\begin{aligned} \ln(1+3x) &= \ln(1+3(1+h)) = \ln(4+3h) = \ln\left(4\left(1+\frac{3h}{4}\right)\right) \\ &= \ln 4 + \ln\left(1+\frac{3h}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \varepsilon(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 0$$

$$\text{donc } \ln\left(1+\frac{3h}{h}\right) = \frac{3h}{h} - \frac{\left(\frac{3h}{h}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{3h}{h}\right)^3}{3} + h^3 \varepsilon(h) \quad \text{ où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

$$= \frac{3h}{h} - \frac{9}{32} h^2 + \frac{9h^3}{64} + h^3 \varepsilon(h)$$

$$\text{et } \ln(1+3x) = \ln 4 + \frac{3x}{4} - \frac{9}{32} x^2 + \frac{9x^3}{64} + x^3 \varepsilon(x)$$

Finallement la D.L. de $\ln(1+3x)$ en 1 est d'ordre 3 est

$$\ln(1+3x) = \ln 4 + \frac{3}{4} (x-1) - \frac{9}{32} (x-1)^2 + \frac{9}{64} (x-1)^3 + (x-1)^3 \varepsilon(x)$$

5) Donnons la D.L. de $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{2+x^2}$ en 0 à l'ordre 2

$$\cdot \frac{\text{lim méthode}}{\frac{e^{2x+1}}{2+x^2}} = \frac{e^{2x} e^1}{2+x^2} = \frac{e^{2x} e}{2\left[1+\frac{x^2}{2}\right]} = \frac{e^{2x}}{2} \frac{e}{1+\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{Or } e^{\mu} = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \mu^2 \varepsilon_1(\mu) \quad \text{ où } \lim_{\mu \rightarrow 0} \varepsilon_1(\mu) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

$$\text{donc } e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\text{Par ailleurs } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2 \varepsilon_3(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_4(x)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}}{1+\frac{x^2}{2}} &= \left(1 + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_4(x) \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon_5(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_5(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5(x) = 0 \end{aligned}$$

Finlement le D.L. à l'ordre 2 de la fonction f par

$$\frac{e}{2} \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_5(x) \right) = \frac{e}{2} + ex + \frac{3ex^2}{4} + x^2 \varepsilon_5(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5(x) = 0$$

• 2^{ème} méthode

D'une part la D.L. en 0 à l'ordre 2 de e^{2x+1} sur (d'après ce qui précéde)

$$e(1 + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\text{i.e. } e + 2ex + 2ex^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

D'autre part $\left\{ \begin{array}{l} \text{le D.L. en 0 à l'ordre 2 de } 2+x^2 \text{ sur } 2+x^2 \\ 2+x^2 \text{ ne s'anule pas au voisinage de 0} \end{array} \right.$

Pour conséquer la partie régulière du D.L. de f en 0 à l'ordre 2 sur le quotient de la division des puissances croissantes d'ordre 2 de $e + 2ex + 2ex^2$ par $2+x^2$.

Effectuons donc la division des puissances croissantes de $e + 2ex + 2ex^2$ par $2+x^2$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{e + 2ex + 2ex^2}{-e} = \frac{-\frac{e}{2}x^2}{2ex + \frac{3}{2}ex^2} \\
 \hline
 -2ex - \frac{e}{2}x^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{3}{2}ex^2 - ex^3}{-\frac{3}{2}ex^2 - \frac{3}{2}ex^4} \\
 \hline
 -ex^3 - \frac{3}{2}ex^4
 \end{array}$$

Ainsi le D.L. de f en 0 à l'ordre 2 est

$$\frac{e}{2} + ex + \frac{3}{4}ex^2 + x^2e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} E(x) = 0.$$

Une autre façon de déterminer la D.L. de e^{2x+1} en 0 à l'ordre 2 est la suivante :

$$\text{forme } \varphi(x) = e^{2x+1} \quad \text{alors} \quad \varphi'(x) = 2e^{2x+1} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = 4e^{2x+1}$$

$$\text{de plus} \quad \varphi(0) = e, \quad \varphi'(0) = 2e \quad \& \quad \varphi''(0) = 4e$$

La formule de Taylor Young donne que la D.L. de φ en 0 à l'ordre 2 est

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{2x+1} = e + 2ex + 2ex^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Exercice 4

1) Donner l'expression du D.L. de $f(x) = e^{\sin(x)}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\text{D'une part } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\text{D'autre part } e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3\varepsilon_2(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon_2(u) \quad \text{ où } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_2(u) = 0$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ alors nous

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x) \right)^3 \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

Donc le D.L. de $g(x) = \min(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\text{D'une part } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\text{D'autre part } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_2(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } \min(\ln(1+x)) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x) \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x) \right)^3 + x^3 \varepsilon_2(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{or } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

Finallement le D.L. de $\sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$