Cours de Fondements mathématiques 2

Sous-espaces vectoriels

Cours II

Exercice 1

Considérons l'équation linéaire homogène (*) $x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$

1) Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé par les solutions de (*). Donnons une base de H :

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 3x_2 + x_3 - 2x_4\}$$

$$H = \{(3x_2 + x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \{(3x_2, x_2, 0, 0) + (x_3, 0, x_3, 0) + (-2x_4, 0, 0, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \{x_2(3, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-2, 0, 0, 1) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \mathrm{Vect}((3, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1))$$

Ainsi $((3,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est une famille qui engendre H. C'est aussi une base de H ; en effet

<u>1ère méthode</u> H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ décrit par une équation non triviale donc $\dim H = 4-1 = \underline{3}$; puisque $((3,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est une famille de $\underline{3}$ vecteurs qui engendre H c'est une base de H.

<u>2ème méthode</u> La famille $((3,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est libre ; en effet soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(3,1,0,0)+\lambda_2(1,0,1,0)+\lambda_3(-2,0,0,1)=0$.

Nous avons $\lambda_1(3,1,0,0)+\lambda_2(1,0,1,0)+\lambda_3(-2,0,0,1)=0$

$$\Rightarrow (3\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Ainsi $((3,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est une famille libre qui engendre H, c'est donc une base de H.

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Supposons que L soit le sous-espace vectoriel de E d'équation $(*)$ relativement à $\mathcal{B}$. D'après ce qui précède une base de L est $((1,3,1,0,0), (1,0,1,0), (-2,0,0,1))$.

Exercice 2

1) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé par les solutions de

$$(**)\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Donnons une base de F. Remarquons que

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7x_2 - 5x_3 \\ x_4 = -2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

par suite $F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 = 7x_2 - 5x_3 \\ x_4 = -2x_2 + 3x_3 \end{cases} \right\} = \{ (7x_2 - 5x_3, x_2, x_3, -2x_2 + 3x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

i.e. $F = \{ (7x_2, x_2, 0, -2x_2) + (-5x_3, 0, x_3, 3x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

soit $F = \{ x_2(7,1,0,-1) + x_3(-5,0,1,3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

ou encore $F = \mathrm{Vect}((7,1,0,-1),(-5,0,1,3))$. Autrement dit la famille $((7,1,0,-1),(-5,0,1,3))$ engendre F. Puisque $((7,1,0,-1),(-5,0,1,3))$ forme une famille libre (les vecteurs $(7,1,0,-1)$ et $(-5,0,1,3)$ ne sont pas multiples l'un de l'autre) nous obtenons que $((7,1,0,-1),(-5,0,1,3))$ est une base de F.

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Supposons que G soit le sous-espace vectoriel de E d'équations

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

relativement à $\mathcal{B}$. D'après ce qui précède $((7,1,0,-1),(-5,0,1,3))$ est une base de G.

Exercice 3

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = (2, 2, -2) \qquad v_2 = (-6, 10, -2) \qquad v_3 = (-4, 4, 0)$$

Posons $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1) Donnons une base $\mathcal{B}'$ de F échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Ecrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs v_i & appliquons lui l'algorithme du cours

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 8 \\ -2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}\big((2,2,-2), (0,16,-8)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1), (0,2,-1)\big)$

i.e. $\big((1,1,-1), (0,2,-1)\big)$ engendre F. Par ailleurs $\big((1,1,-1), (0,2,-1)\big)$ est une famille

libre.

Il en résulte que $((1,1,-1),(0,2,-1))$ est une base de F.

Puisque $((1,1,-1),(0,2,-1))$ est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est une base de F

nous avons : $\dim F = 2$.

2) Donnons un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de l'algorithme vu en cours :

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & x_1 \\ 2 & 10 & 4 & x_2 \\ -2 & -2 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 8 & x_2 - x_1 \\ -2 & -8 & -4 & x_3 + x_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & \frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

Puisque $2 + 0 + 2(-1) = 0$, $(2,0,-1) \in F$; comme $-1 + 1 + 2 \cdot 0 = 0$, $(-1,1,0) \in F$.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient u & v définis dans la base $\mathcal{B}$ par $u = (1, 2, 3)$ & $v = (-2, 1, 1)$

1) Montrons que $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E de base (u, v).

Par définition P est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u & v ; ainsi P est en particulier un sous-espace vectoriel de E. La famille (u, v) engendre P par définition ainsi pour montrer que (u, v) est une base de P il suffit de montrer que c'est une famille libre : soient α, β dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v = 0$. Or

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= \alpha(1, 2, 3) + \beta(-2, 1, 1) \\ &= (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (-2\beta, \beta, \beta) \\ &= (\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta) \end{aligned}$$

donc $\alpha u + \beta v = 0$ se réécrit $(\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta) = (0, 0, 0)$ ou encore $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$

Or $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \\ 7\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ donc la famille (u, v) est libre.

Finalement (u, v) est une base de P & $\dim P = 2$.

2) On cherche une base de P échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Ecrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u & v et appliquons lui l'algorithme du cours :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ainsi $((1,2,3), (0,5,7))$ est une base de P échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

3) Donnons un système d'équations de P :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & x_2 - 2x_1 \\ 3 & 7 & x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & \frac{-x_1 - 7x_2 + 5x_3}{5} \end{pmatrix}$$

Ainsi $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid -x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0\}$

4) Considérons $w = -e_1 + 8e_2 + 11e_3 \in \mathbb{R}^3$.

Puisque $-(-1) - 7 \times 8 + 11 \times 5 = 1 - 56 + 55 = 0$ le vecteur w appartient à P.

Déterminons les coordonnées de w dans la base (u, v) ; on cherche α, β dans $\mathbb{R}$ tels que $w = \alpha u + \beta v$. Or $\alpha u + \beta v = (\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta)$ donc $w = \alpha u + \beta v$ se réécrit

$$(\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta) = (-1, 8, 11)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = -1 \\ 2\alpha + \beta = 8 \\ 3\alpha + \beta = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = -1 \\ 5\beta = 10 \\ 7\beta = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Par conséquent les coordonnées de w dans la base (u, v) sont $(3, 2)$.

5) Montrons que $w' = -e_1 + 8e_2 + 10e_3$ n'appartient pas à P:

Rappelons que $P = \{ (x_1, x_2, x_3) \in E \mid -x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \}$. Comme $-(-1) - 7(8) + 5(10) = -5 \neq 0$

donc $w' \notin P$.

Montrons que (u, v, w') est une base de E: nous venons de montrer que $w' \notin P = \mathrm{Vect}(u, v)$

d'où $\mathrm{Vect}(u, v) \subsetneq \mathrm{Vect}(u, v, w')$. Par ailleurs $\mathrm{Vect}(u, v) = P$ & $\mathrm{Vect}(u, v, w') \subset E$

Ainsi

$$P = \mathrm{Vect}(u, v) \subsetneq \mathrm{Vect}(u, v, w') \subseteq E$$

d'où $$2 = \dim P < \dim \mathrm{Vect}(u, v, w') \leq \dim E = 3$$

et $\dim \mathrm{Vect}(u, v, w') = 3$. A partir de $\dim \mathrm{Vect}(u, v, w') = \dim E$ &

$\mathrm{Vect}(u, v, w') \subset E$ nous obtenons $\mathrm{Vect}(u, v, w') = E$ & (u, v, w') est

une base de E.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soient v_1, v_2, v_3 & v_4 tels que

$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v_1) = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v_2) = (3, 1, 0, 1)$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v_3) = (2, 1, 1, 1)$.

Posons $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1) Donnons une base de G échelonnée relativement à la base $\mathcal{B}$ de E : considérons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3 & appliquons lui l'algorithme du cours

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}((-1,0,1,0), (0,1,3,1))$

et $((-1,0,1,0), (0,1,3,1))$ est une base de G échelonnée relativement à la base $\mathcal{B}$.

En particulier $\dim G = 2$.

2) Donnons un système d'équations de G relativement à $\mathcal{B}$. Appliquons l'algorithme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & 3 & x_3+x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & x_3+x_1-3x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_4-x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & x_1-3x_2+x_3 \\ 0 & 1 & -x_2+x_4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $G = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

Exercice 6

Considérons P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+3z=0$ ainsi que

$$D = \mathrm{Vect}((1,1,2)) \quad \& \quad D' = \mathrm{Vect}((1,1,3))$$

1) Montrons que P & D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

D'une part $\dim D = 1$ (le vecteur $(1,1,2)$ est non nul donc engendre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1) et $\dim P = 2$ (l'ensemble P est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation non triviale $x+y+3z=0$) donc

$$\dim D + \dim P = \dim \mathbb{R}^3$$

D'autre part $P \cap D = \{0\}$. En effet soit $(x,y,z) \in P \cap D$; comme $(x,y,z) \in D$ il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,1,2)$; écrivons maintenant que $(x,y,z) \in P$:

$$x+y+3z=0 \iff \lambda+\lambda+2\lambda=0 \iff 4\lambda=0 \iff \lambda=0$$

et $P \cap D = \{0\}$.

2) Donnons des équations définissant D :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 2 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y-x \\ 2 & z-2x \end{pmatrix} \quad \text{d'où } D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} y-x=0 \\ z-2x=0 \end{cases} \right\}$$

Donnons des équations définissant D' :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 3 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y-x \\ 3 & z-3x \end{pmatrix} \quad \text{d'où } D' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} y-x=0 \\ z-3x=0 \end{cases} \right\}$$

Enfin donnons une base de P :

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+3z=0\} \iff P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y-3z\}$$

$$\iff P = \{(-y-3z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \iff P = \{(-y,y,0) + (-3z,0,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$\iff P = \{y(-1,1,0) + z(-3,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \iff P = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-3,0,1))$$

Ainsi $((-1,1,0),(-3,0,1))$ est une famille de $\mathbb{R}^3$ qui engendre P.

De plus $((-1,1,0),(-3,0,1))$ est une famille libre. C'est donc une base de P.

3) Écrivons $(1,0,0)$ sous la forme $\underbrace{(x,y,z)}_{\in D} + \underbrace{(a,b,c)}_{\in P}$

Puisque $(x,y,z) \in D$ il s'écrit $\lambda(1,1,2)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $(a,b,c) \in P$ nous avons $a+b+3c=0$ i.e. $a=-b-3c$

Ainsi on cherche λ, b, c tels que $(1,0,0) = \lambda(1,1,2) + (-b-3c, b, c)$

$\Leftrightarrow \quad (1,0,0) = (\lambda - b - 3c, \lambda + b, 2\lambda + c)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - b - 3c = 1 \\ \lambda + b = 0 \\ 2\lambda + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \lambda + 6\lambda = 1 \\ b = -\lambda \\ c = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/8 \\ b = -1/8 \\ c = -1/4 \end{cases}$$

Finalement $\quad (1,0,0) = \underbrace{\frac{1}{8}(1,1,2)}_{\in D} + \underbrace{\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)}_{\in P}$

4) Écrivons (x,y,z) sous la forme $\underbrace{\lambda(1,1,2)}_{\in D} + \underbrace{(-b-3c,\, b,\, c)}_{\in P}$:

$$(x,y,z) = (\lambda, \lambda, 2\lambda) + (-b-3c, b, c)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (\lambda - b - 3c,\ \lambda + b,\ 2\lambda + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - b - 3c = x \\ \lambda + b = y \\ 2\lambda + c = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - b - 3c = x \\ 2b + 3c = y - x \\ 2b + 7c = z - 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - b - 3c = x \\ 2b + 3c = y - x \\ 4c = z - y - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{3z}{8} \\ b = -\frac{x}{8} + \frac{7y}{8} - \frac{3z}{8} \\ c = \frac{z}{4} - \frac{y}{4} - \frac{x}{4} \end{cases}$$

. Finalement (x,y,z) s'écrit

$$\underbrace{\left(\frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{3z}{8}\right)(1,1,2)}_{\in D} + \underbrace{\left(\frac{7x}{8} - \frac{y}{8} - \frac{3z}{8},\ -\frac{x}{8} + \frac{7y}{8} - \frac{3z}{8},\ -\frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{z}{4}\right)}_{\in P}$$

5) <u>Déterminons $D \cap D'$:</u>

Soit u appartenant à $D \cap D'$. D'une part $u \in D$ i.e. $u = \lambda(1,1,2)$, d'autre part $u \in D'$ i.e. $u = \alpha(1,1,3)$. Ainsi

$$u = \lambda(1,1,2) = \alpha(1,1,3)$$

qui se réécrit $(\lambda, \lambda, 2\lambda) = (\alpha, \alpha, 3\alpha)$ d'où $\lambda = \alpha$ & $2\lambda = 3\alpha$ soit $\lambda = \alpha = 0$.

Ainsi $D \cap D' = \{0\}$.

<u>Que peut-on dire de $D + D'$?</u>

$D + D' = \{ v + v' \mid v \in D, v' \in D' \}$

$D + D' = \{ \lambda(1,1,2) + \mu(1,1,3) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

$D + D' = \mathrm{Vect}((1,1,2), (1,1,3))$

Ainsi $D + D'$ est le sous-espace vectoriel engendré par $(1,1,2)$ et $(1,1,3)$. Puisque $(1,1,2)$ & $(1,1,3)$ forment une famille libre nous obtenons que $((1,1,2),(1,1,3))$

est une base de $D+D'$.

Déterminons des équations de $D+D'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y-x \\ 2 & 1 & z-2x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y-x \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

& $D+D' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y-x=0\}$

Il en résulte que

$$P \cap (D+D') = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+3z=0 \\ y-x=0 \end{cases} \right\}$$

ce qui conduit à

$$P \cap (D+D') = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} z=-\frac{2}{3}y \\ x=y \end{cases} \right\}$$

$$P \cap (D+D') = \left\{ \left(y, y, -\frac{2}{3}y\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y\left(1, 1, -\frac{2}{3}\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P \cap (D+D') = \mathrm{Vect}\left(1, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

Comme $\left(1, 1, -\frac{2}{3}\right)$ est non nul $\left(\left(1, 1, -\frac{2}{3}\right)\right)$ est une base de $P \cap (D+D')$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Considérons

$$H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+2z+2t=0\}$$

et

$$D=\mathrm{Vect}(1,1,1,1)$$

1) Déterminons une base de H :

$$H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=-y-2z-2t\}$$

$$H=\{(-y-2z-2t,\ y,z,t) \mid y,z,t\in\mathbb{R}\}$$

$$H=\{(-y,y,0,0)+(-2z,0,z,0)+(-2t,0,0,t) \mid y,z,t\in\mathbb{R}\}$$

$$H=\{y(-1,1,0,0)+z(-2,0,1,0)+t(-2,0,0,1) \mid y,z,t\in\mathbb{R}\}$$

$$H=\mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(-2,0,0,1))$$

Ainsi $((-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(-2,0,0,1))$ engendre H.

La famille $((-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est-elle libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(-2,0,1,0)+\lambda_3(-2,0,0,1)=0$ $(*)$

Or $\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(-2,0,1,0)+\lambda_3(-2,0,0,1)=(-\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

donc $(*) \iff (-\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(0,0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

La famille $((-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est donc libre ; comme de plus elle engendre H c'est une base de H.

2) Montrons que H & D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Comme $D=\mathrm{Vect}(1,1,1,1)$ & $(1,1,1,1)\neq 0$ nous avons $\dim D=1$.

Puisque la famille $((-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est une base de H nous avons $\dim H=3$.

Ainsi $\underbrace{\dim D}_{1}+\underbrace{\dim H}_{3}=\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4}$

Déterminons $H \cap D$. Soit $v = (x, y, z, t) \in H \cap D$

d'une part $v \in H$ i.e. $x + y + 2z + 2t = 0$

d'autre part $v \in D$ i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = (x, y, z, t) = \lambda(1, 1, 1, 1)$

ainsi $\begin{cases} x + y + 2z + 2t = 0 \\ x = y = z = t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 6x = 0 \\ x = y = z = t \end{cases}$ i.e. $x = y = z = t = 0$.

Autrement dit $H \cap D = \{0\}$.

Finalement $\begin{cases} H \cap D = \{0\} \\ \dim H + \dim D = \mathbb{R}^4 \end{cases}$: H & D sont donc deux sous-espaces supplémentaires

de $\mathbb{R}^4$.

3) Explicitons la décomposition de e_1 comme somme d'un vecteur u de D & d'un vecteur v de H

Puisque $u \in D$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1,1,1,1)$.

Comme $v = (x,y,z,t) \in H$ on a $x+y+2z+2t=0$ i.e. $x = -y-2z-2t$. Autrement dit

$v = (-y-2z-2t, y, z, t)$.

Ainsi on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ & $y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que

$$e_1 = (1,0,0,0) = \underbrace{\lambda(1,1,1,1) + (-y-2z-2t, y, z, t)}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda) + (-y-2z-2t, y, z, t)}_{\substack{\shortparallel \\ (\lambda-y-2z-2t,\ \lambda+y,\ \lambda+z,\ \lambda+t)}}}}$$

Nous sommes donc ramenés à résoudre le système

$$(S) \begin{cases} \lambda - y - 2z - 2t = 1 \\ \lambda + y = 0 \\ \lambda + z = 0 \\ \lambda + t = 0 \end{cases}$$

Or $(S) \iff \begin{cases} \lambda + \lambda + 2\lambda + 2\lambda = 1 \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \\ t = -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 6\lambda = 1 \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \\ t = -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1/6 \\ y = -1/6 \\ z = -1/6 \\ t = -1/6 \end{cases}$

Donc

$$e_1 = (1,0,0,0) = \underbrace{\frac{1}{6}(1,1,1,1)}_{\in D} + \underbrace{\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)}_{\in H}$$

4) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x,y,z,t) dans la base $\mathcal{B}$. Ecrivons u sous la forme $v+w$ avec $v \in D$ & $w \in H$.

Puisque $v \in D$ nous pouvons l'écrire $\lambda(1,1,1,1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Comme $w \in H$ nous pouvons l'écrire (a,b,c,d) avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ & $a+b+2c+2d=0$

soit $a=-b-2c-2d$; ainsi w est de la forme $(-b-2c-2d, b, c, d)$ avec $b,c,d \in \mathbb{R}$.

Ainsi $u=v+w$ se réécrit $(x,y,z,t) = \underbrace{\lambda(1,1,1,1)+(-b-2c-2d, b, c, d)}_{(\lambda-b-2c-2d,\ \lambda+b,\ \lambda+c,\ \lambda+d)}$.

Nous sommes donc ramenés à résoudre le système

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \lambda-b-2c-2d = x \\ \lambda+b = y \\ \lambda+c = z \\ \lambda+d = t \end{cases}$$

$$\left\{ \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}u, \; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}u, \; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}u, \; \frac{2}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}u \right) \right\} \in H$$

$$\left(\frac{1}{6}x, \frac{1}{6}x, \frac{1}{6}x, \frac{1}{6}x \right) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u, \; \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u, \; \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u, \; \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u \right) \in H$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u \\ b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}u \\ c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}u \\ d = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}u \end{array} \right.$$

$$a = -b - 2c - 2d$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \\ + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \\ + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \\ + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \\ + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u \\ b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}u \\ c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}u \\ d = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}u \end{array} \right.$$

$$x = (2-y)2 - (3-z)2 - (2-u) - 2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 - 2z - 5y \\ b = 3 - z \\ c = 2 - y \\ d = 1 - y \end{array} \right.$$

$$x = 4 - 2z - 5y$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 - 2z - 5y \\ b = 3 - z \\ c = 2 - y \\ d = 1 - y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}u \\ b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}u \\ c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}u \\ d = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}u \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 - 2z - 5y \\ b = 3 - z \\ c = 2 - y \\ d = 1 - y \end{array} \right.$$

$$x = 4 - 2z - 5y$$

5) Soit (a, b, c, d) les coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$. Donnons une condition nécessaire & suffisante pour que H & $\mathrm{Vect}(u)$ soient deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

<u>Rappel</u> H & $\mathrm{Vect}(u)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim H + \dim \mathrm{Vect}(u) = \dim \mathbb{R}^4 \\ H \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0\} \end{cases}$$

Remarquons que $\dim H = 3$ & $\dim \mathrm{Vect}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = 0 \\ 1 & \text{si } u \neq 0 \end{cases}$; puisque $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

nous avons $\dim H + \dim \mathrm{Vect}(u) = \dim \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow u \neq 0$.

Reste à considérer $H \cap \mathrm{Vect}(u)$. Soit $w = (x, y, z, t) \in H \cap \mathrm{Vect}(u)$; d'une part $w \in \mathrm{Vect}(u)$, i.e. $w = \lambda(a, b, c, d)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, d'autre part $w \in H$, i.e. $\lambda a + \lambda b + 2\lambda c + 2\lambda d = 0$ autrement dit $w = (-\lambda b - 2\lambda c - 2\lambda d, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$

Par suite $H \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0\} \Leftrightarrow \lambda(-b - c - 2d, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$

$\iff \lambda = 0$ ou $u = 0$.

Finalement $\mathrm{Vect}(u)$ & H sont supplémentaires si & seulement si $u \neq 0$.