Feuille 2

Applications linéaires

Exercice 1

Considérons l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 3x_2, 2x_1)$

1) La matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

et $g^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (7x_1 + 3x_2, 2x_1 + 6x_2)$

Notons que $A^2 - A - 6Id = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$

2) D'après 1) $A^2 - A - 6Id = 0$ autrement dit $A^2 - A = 6Id$ i.e. $\frac{1}{6}(A^2 - A) = Id$

soit $A\left(\frac{1}{6}(A - Id)\right) = \left(\frac{1}{6}(A - Id)\right)A = Id$. Par suite A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A - Id) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

La matrice de g^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

On a bien entendu $g^{-1} = \frac{1}{6}(g - id)$

3) Déterminons les applications linéaires f_1 & f_2 de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telles que

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = id \\ f_1 - 2f_2 = g - id \end{cases}$$

On a $\begin{cases} f_1 + f_2 = id \\ f_1 - 2f_2 = g - id \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = id \\ 3f_2 = 2id - g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1}{3} id + \frac{1}{3} g \\ f_2 = \frac{2}{3} id - \frac{1}{3} g \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{3} + x_2, \frac{2x_1}{3} + \frac{x_2}{3} \right) \\ f_2(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{3} - x_2, -\frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 \right) \end{cases}$$

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel & $f : E \to E$ une application linéaire.

1) Montrons que $(f - 2id_E) \circ (f - 3id_E) = f^2 - 5f + 6id_E$.

<u>Remarque</u> f & id_E sont linéaires $\Rightarrow$ $f - 2id_E$ & $f - 3id_E$ sont linéaires.

Pour tout u dans E nous avons

$$\begin{aligned}
((f - 2id_E) \circ (f - 3id_E))(u) &= (f - 2id_E)((f - 3id_E)(u)) \\
&= (f - 2id_E)(f(u) - 3u) \\
&= f(f(u) - 3u) - 2(f(u) - 3u) \\
&= f(f(u)) - 3f(u) - 2f(u) + 6u \\
&= f^2(u) - 5f(u) + 6u \\
&= (f \circ f - 5f + 6id_E)(u)
\end{aligned}$$

2) D'après ce qui précède $(f-2id_E)\circ(f-3id_E) = f^2-5f+6id_E$

De plus $((f-3id_E)\circ(f-2id_E))(u) = (f-3id_E)((f-2id_E)(u))$

$$= (f-3id_E)(f(u)-2u)$$

$$= f(f(u)-2u) - 3(f(u)-2u)$$

$$= f(f(u)) - 2f(u) - 3f(u) + 6u$$

$$= f^2(u) - 5f(u) + 6u$$

$$= (f^2-5f+6id_E)(u)$$

Ainsi $(f-2id_E)\circ(f-3id_E) = (f-3id_E)\circ(f-2id_E)$, i.e. $f-3id_E$ & $f-2id_E$ commutent.

Supposons désormais que $f^2-5f+6id_E = 0$.

3) Montrons que l'application f est inversible & précisons f^{-1} à l'aide de f :

D'après 2) $\quad f^2 - 5f + 6\,id_E = 0 \iff -\frac{1}{6} f^2 + \frac{5}{6} f = id_E$

D'une part $\quad \frac{1}{6} f^2 - \frac{5}{6} f = id_E \iff f \circ \left(-\frac{1}{6} f + \frac{5}{6} id_E\right) = id_E$

d'autre part $\quad \frac{1}{6} f^2 - \frac{5}{6} f = id_E \iff \left(-\frac{1}{6} f + \frac{5}{6} id_E\right) \circ f = id_E$

Par suite f est inversible d'inverse $f^{-1} = -\frac{1}{6} f + \frac{5}{6} id_E$.

4) Si $f^2 - 5f + 6\,id_E = 0$ & $f - 3id_E$ est inversible, i.e. si $(f - 2id_E) \circ (f - 3id_E) = 0$ & $f - 3id_E = 0$, alors $f = 2id_E$

Si $f^2 - 5f + 6\,id_E = 0$ & $f - 2id_E$ est inversible, i.e. si $(f - 2id_E) \circ (f - 3id_E) = 0$ & $f - 2id_E = 0$, alors $f = 3id_E$.

Exercice 3

1) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) \\ &= x(1,0,0) + y(0,-7,-12) + z(0,4,7) \\ &= (x, -7y+4z, -12y+7z) \end{aligned}$$

2) Considérons la matrice dont les colonnes sont les vecteurs u, v, w & appliquons lui l'algorithme vu en cours

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} & & \begin{array}{ccc} u & v & w+2v \end{array} \end{array}$$

La famille $(u, v, w+2v)$ est échelonnée donc libre ; elle compte trois vecteurs

et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v, w+2v)$ donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) La matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ donc l'inverse de P

est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Soient x, y, z trois réels. Si (X, Y, Z) sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de (x, y, z) alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

4) Puisque $f(x,y,z) = (x, -7y+4z, -12y+7z)$ nous avons

$$f(u) = f(1,0,0) = (1,0,0) = u$$

$$f(v) = f(0,1,2) = (0,1,2) = v$$

$$f(w) = f(0,-2,-3) = (0,2,3) = -w$$

La matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rappelons le lien entre les matrices B, A & P :

$$B = P^{-1}AP$$

(Vérifions : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B \ )$$

5) La matrice de $f - id$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f - id$ dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminons le noyau de $f - id$:

$$\ker(f - id) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(f - id) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} -8y + 4z = 0 \\ -12y + 6z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\ker(f - id) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2y + z = 0 \}$$

$$\ker(f-id) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y\}$$

$$\ker(f-id) = \{(x,y,2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$\ker(f-id) = \{x(1,0,0) + y(0,1,2) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$\ker(f-id) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,2))$$

6) Par définition $P = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,2))$ & $D = \mathrm{Vect}((0,-2,-3))$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Soit x un élément de $P \cap D$; d'une part $x \in D$, i.e. $x = \lambda(0,-2,-3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
D'autre part $x \in P$, i.e. $x = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,2)$ pour certains α, β dans $\mathbb{R}$.

Ainsi $\lambda(0,-2,-3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,2)$

i.e. $(0,-2\lambda,-3\lambda) = (\alpha, \beta, 2\beta)$ d'où $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2\lambda \\ 2\beta = -3\lambda \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2\lambda \\ 0 = \lambda \end{cases}$

c'est-à-dire $\alpha = \beta = \lambda = 0$ & $x = (0,0,0)$. Autrement dit $P \cap D = \{0\}$.

Par ailleurs

- $\dim \mathcal{D} = \dim \mathrm{Vect}((0,-2,-3)) = 1$ car $(0,-2,-3) \neq (0,0,0)$
- $\dim \mathcal{P} = \dim \mathrm{Vect}(u,v) = 2$ car la famille (u,v) est échelonnée

donc libre donc génératrice de $\mathcal{P}$ & libre.

Ainsi $\dim \mathcal{D} + \dim \mathcal{P} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Il en résulte que $\mathcal{P}$ & $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$:

Soit $x = (x,y,z)$; comme $\mathcal{P}$ & $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

x s'écrit de manière unique $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathcal{P}$ & $x_2 \in \mathcal{D}$. Puisque $x_2 \in \mathcal{D}$ il

s'écrit $\lambda(0,-2,-3) = (0,-2\lambda,-3\lambda)$. Comme $x_1 \in \mathcal{P}$ il est de la forme $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,2)$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i.e. $x_1 = (\alpha, \beta, 2\beta)$. Ainsi $(x,y,z) = (\alpha,\beta,2\beta) + (0,-2\lambda,-3\lambda)$

$$= (\alpha, \beta - 2\lambda, 2\beta - 3\lambda)$$

ce qui se réécrit $(S)\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta-2\lambda \\ z=2\beta-3\lambda \end{cases}$

Or $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=x \\ \beta-2\lambda=y \\ 2\beta-3\lambda=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=x \\ \beta-2\lambda=y \\ \lambda=z-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=x \\ \lambda=z-2y \\ \beta=-3y+2z \end{cases}$

Finalement $u=(x,y,z)=\underbrace{(0,4y-2z,6y-3z)}_{\in D}+\underbrace{(x,-3y+2z,-6y+4z)}_{\in P}$

et $s:(x,y,z)\mapsto \underbrace{(x,-3y+2z,-6y+4z)-(0,4y-2z,6y-3z)}_{(x,-7y+4z,-12y+7z)}$

autrement dit $s=f$

7) Comme $s=f$, f est un isomorphisme linéaire & $f^{-1}=f$

Il en résulte que $\begin{cases} f^{2n} = id & \forall n. \\ f^{2n+1} = f \end{cases}$

En particulier $\begin{cases} f^{2n}(u) = u, \ f^{2n}(v) = v, \ f^{2n}(w) = w & \forall n \\ f^{2n+1}(u) = f(u) = u, \ f^{2n+1}(v) = f(v) = v \ \& \ f^{2n+1}(w) = f(w) = -w & \forall n \end{cases}$

La matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ou encore la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

La matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2(-1)^{n+1} & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4(-1)^n - 3 & 2(1+(-1)^{n+1}) \\ 0 & 6((-1)^n - 1) & 4+3(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$f^n(x,y,z) = f^n\big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\big)$$

$$f^n(x,y,z) = x f^n(1,0,0) + y f^n(0,1,0) + z f^n(0,0,1)$$

$$f^n(x,y,z) = x(1,0,0) + y\big(0,\ 4(-1)^n - 3,\ 6((-1)^n - 1)\big) + z\big(0,\ 2(1+(-1)^{n+1}),\ 4+3(-1)^{n+1}\big)$$

$$f^n(x,y,z) = \big(x,\ (4(-1)^n - 3)y + 2(1+(-1)^{n+1})z,\ 6((-1)^n - 1)y + (4+3(-1)^{n+1})z\big)$$

Une autre façon de faire est la suivante : on cherche α, β, γ dans $\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Or $\alpha u + \beta v + \gamma w = (\alpha, \beta - 2\gamma, 2\beta - 3\gamma)$

donc $(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w \iff (x,y,z) = (\alpha, \beta - 2\gamma, 2\beta - 3\gamma)$

$$\iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta - 2\gamma = y \\ 2\beta - 3\gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta - 2\gamma = y \\ \gamma = z - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = -3y + 2z \\ \gamma = z - 2y \end{cases}$$

Ainsi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit $x u + (-3y+2z) v + (z-2y) w$ et

$$
\begin{aligned}
f^n(x,y,z) &= f^n\left(x u + (-3y+2z) v + (z-2y) w\right) \\
&= x f^n(u) + (-3y+2z) f^n(v) + (z-2y) f^n(w) \\
&= x u + (-3y+2z) v + (z-2y)(-1)^n w \\
&= x(1,0,0) + (-3y+2z)(0,1,2) + (z-2y)(-1)^n(0,-2,-3) \\
&= \left(x, -3y+2z-2(-1)^n(z-2y), 2(-3y+2z)-3(-1)^n(z-2y)\right) \\
&= \left(x, (4(-1)^n-3)y + 2(1+(-1)^{n+1})z, 6(1+(-1)^n)y + (4+3(-1)^{n+1}z\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 4

Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+3z=0$. Soit D le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $D = \mathrm{Vect}(1,1,2)$.

Montrons que P & D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$:

- clairement P & D sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- soit $u = (a,b,c) \in P \cap D$

  d'une part $u \in P$, i.e. $a+b+3c=0$

  d'autre part $u \in D$, i.e. $u = \lambda(1,1,2)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ soit

  $$(a,b,c) = (\lambda, \lambda, 2\lambda)$$

  ainsi $a+b+3c=0$ se réécrit $\lambda+\lambda+6\lambda=0$ soit $8\lambda=0$. On en déduit que $\lambda=0$ & donc que $u=0$.

ainsi $P \cap D = \{0\}$

. $\dim D = \dim \mathrm{Vect}(1,1,2) = 1$ car $(1,1,2) \neq (0,0,0)$

$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+3z=0\}$

$\Leftrightarrow P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=-y-3z\}$

$\Leftrightarrow P = \{(-y-3z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow P = \{y(-1,1,0) + z(-3,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow P = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-3,0,1))$

$\Leftrightarrow P = \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1,1,0),(0,-3,1)}_{\text{est une famille échelonnée donc libre}})$

par suite $((-1,1,0),(0,-3,1))$ est une base de P

& $\dim P = 2$

ainsi $\dim P + \dim D = \dim \mathbb{R}^3$.

Il en résulte que P & D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

<u>Rappel</u> Soient E_1 & E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in E_1$ & $u_2 \in E_2$.

L'application

$$p : E \to E$$
$$u \mapsto p(u) = u_1$$

est linéaire ; elle est appelée projection sur E_1 parallèlement à E_2.

De plus $\ker p = E_2$, $\operatorname{im} p = \ker(p - id_E) = E_1$

& $p^2 = p$.

1) Explicitons la projection vectorielle p sur P parallèlement à D.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il s'écrit de manière unique sous la forme $w_1 + w_2$ avec $w_1 \in P$ & $w_2 \in D$, i.e. $w_1 = (a,b,c)$ avec $a+b+3c=0$ autrement dit $a=-b-3c$ ou encore $w_1 = (-b-3c, b, c)$ et $w_2 = \lambda(1,1,2)$. Ainsi $(x,y,z) = w_1 + w_2$ se réécrit

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4-3}{8}$$

$$(x,y,z) = (-b-3c, b, c) + \lambda(1,1,2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b-3c+\lambda = x \\ b + \lambda = y \\ c+2\lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b-3c+\lambda = x \\ -3c+2\lambda = y+x \\ c+2\lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b-3c+\lambda = x \\ -3c+2\lambda = y+x \\ 4c = z-y-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{-x-y+z}{4} \\ \lambda = \dfrac{x+y+3z}{8} \\ b = \dfrac{-x+7y-3z}{8} \end{cases}$$

. Autrement dit (x,y,z)

$$\| $$

$$\underbrace{\left(\frac{7x-y-3z}{8}, \frac{-x+7y-3z}{8}, \frac{-x-y+z}{4}\right)}_{\in P} + \underbrace{\frac{x+y+3z}{8}(1,1,2)}_{\in D}$$

La projection vectorielle sur P parallèlement à D est

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{7x-y-3z}{8}, \frac{-x+7y-3z}{8}, \frac{-x-y+z}{4} \right)$$

2) Nous avons $p(1,0,0) = \left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$, $p(0,1,0) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ &

$p(0,0,1) = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$ donc la matrice de p relativement à la base

canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Notons que $A^2 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 56 & -8 & -24 \\ -8 & 56 & -24 \\ -16 & -16 & 16 \end{pmatrix}$

$= A$

3) D'après ce qui précède $((-1,1,0),(0,-3,1))$ est une base de P. Posons $u=(-1,1,0)$ et $v=(0,-3,1)$.

Montrons que $(u,v,(1,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Considérons la matrice dont les colonnes sont les vecteurs u, v & $(1,1,2)$ et appliquons lui l'algorithme vu en cours :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_1 & w_1 \\ \| & \| & \| \\ u & v & (1,1,2) \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_2 \\ & & \| \\ & & u_1+w_1 \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_3 \\ & & \| \\ & & 2v_1+3w_2 \end{array} \end{array}$$

La famille (u_1, v_1, w_3) est une famille échelonnée donc une famille libre ; elle est constituée de trois vecteurs & $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; par suite (u_1, v_1, w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs $\mathrm{Vect}(u_1, v_1, w_1) = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, w_3)$. Il en résulte que $\mathrm{Vect}(u_1, v_1, w_1) = \mathbb{R}^3$ & que $(u_1, v_1, w_1) = (u, v, (1,1,2))$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Une autre façon de rédiger est la suivante :

$$\left.\begin{array}{l} (u,v) \text{ est une base de } P, \ ((1,1,2)) \text{ est une base de } D \\ P \oplus D = \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow (u, v, (1,1,2)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

4) Nous avons

$p(u) = u$ & $p(v) = v$ car $u, v \in P$

de plus $p(1,1,2) = (0,0,0)$ car $(1,1,2) \in D$

Par suite la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1) f est un isomorphisme car $\det A \neq 0$ (en effet $\det A = 1\times(-4) - 1\times 2 = -6$).

f^{-1} est l'application linéaire de matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2) La matrice de $f^2 - 3f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ est

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Considérons la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ & appliquons lui l'algorithme vu en cours

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ u_1 \quad v_1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \\ u_1 \quad v_1 - 2u_1 = v_2 \end{array}$$

La famille (u_1, v_2) est échelonnée donc libre, la famille (u_1, v_2) qui compte deux vecteurs est donc une base de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2. Il en résulte que $\mathcal{B}' = (u_1, v_1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Notons $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Alors

$$\mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{B}_{can}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soient H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$

$D_1 = \text{Vect}((1,-1,0))$

$D_2 = \text{Vect}((1,0,-1))$

1) Montrons que D_1 & D_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de H.

i) • $\dim D_1 = 1$ car $(1,-1,0) \neq (0,0,0)$

• $\dim D_2 = 1$ car $(1,0,-1) \neq (0,0,0)$

• $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=-x-y\}$

$H = \{(x,y,-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,-x)+(0,y,-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$H = \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$H = \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$

Puisque la famille $((1,0,-1),(0,1,-1))$ est échelonnée, elle est libre.

Comme elle engendre H c'est une base de H & $\dim H = 2$.

En particulier $\dim H = \dim D_1 + \dim D_2$.

ii) Soit $v \in D_1 \cap D_2$.

D'une part $v \in D_1$, i.e. $v = \lambda(1,-1,0)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

D'autre part $v \in D_2$, i.e. $v = \mu(1,0,-1)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$

D'où $\lambda(1,-1,0) = \mu(1,0,-1)$, i.e. $(\lambda,-\lambda,0) = (\mu,0,-\mu)$ soit $\begin{cases} \lambda = \mu \\ -\lambda = 0 \\ 0 = -\mu \end{cases}$

ainsi $\lambda = \mu = 0$ & $v = 0$.

Finalement $D_1 \cap D_2 = \{0\}$.

<u>Rappel</u> Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur u de E s'écrit donc de façon unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ & $u_2 \in E_2$.

L'application $s : E \to E$, $u \mapsto s(u) = u_1 - u_2$ est linéaire. Elle est appelée symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2

$$\ker(s - id_E) = E_1, \ \ker(s + id_E) = E_2, \ s^2 = id_E$$

En particulier s est un isomorphisme linéaire & $s^{-1} = s$.

Soit $s : H \to H$ la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

2) Remarquons que $(1,-1,0) = \underbrace{(1,-1,0)}_{\in D_1} + \underbrace{(0,0,0)}_{\in D_2}$ donc $s(1,-1,0) = (1,-1,0) - (0,0,0)$
$= (1,-1,0)$

Notons que $(1,0,-1) = \underbrace{(0,0,0)}_{\in D_1} + \underbrace{(1,0,-1)}_{\in D_2}$ donc $s(1,0,-1) = (0,0,0) - (1,0,-1)$
$= -(1,0,-1)$

Ainsi la matrice de s relativement à la base $((1,-1,0),(1,0,-1))$ de H est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Soit $(x,y,z) \in P$. On peut écrire (x,y,z) sous la forme $\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1)$:

$$\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1)=(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha+\beta,-\alpha,-\beta)=(x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha=-y \\ \beta=-z \end{cases}$$

i.e. $(x,y,z) \in P$ s'écrit $-y(1,-1,0)-z(1,0,-1)$. Par suite

$$s(x,y,z)=s(-y(1,-1,0)-z(1,0,-1))=-y\,s(1,-1,0)-z\,s(1,0,-1)$$

i.e. $s(x,y,z)=-y(1,-1,0)-z(-(1,0,-1))=(-y,y,0)+(z,0,-z)=(-y+z,y,-z)$

Finalement $s: H \to H$, $(x,y,z) \mapsto (-y+z,y,-z)$