Algèbre
Cours Fondements S2
Chapitre 3
Applications linéaires

December 30, 2020

Contents

3 Applications linéaires

3.1 Introduction

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle est compatible à l'addition et à la multiplication par un scalaire : pour tout u, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Soit alors $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si V est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $f(V)$ des images par f des vecteurs de V est alors un sous-espace vectoriel de F. En particulier, l'ensemble des images de tous les vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de F appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.
- Si W est un sous-espace vectoriel de F, l'ensemble $f^{-1}(W)$ des vecteurs de E dont l'image par f est dans W est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est nulle est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f et noté $\ker f$.

Si le noyau de f est réduit au vecteur nul et que tout vecteur de F est image d'un vecteur de E par f, l'application f est bijective et identifie les vecteurs de E et les vecteurs de F. L'application inverse qui a un vecteur de F associe alors l'unique vecteur de E dont il est l'image par f est elle même linéaire.

Lorsque E est de dimension finie, et que $f : E \to F$ est une application linéaire, nous avons toujours :

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Im} f \quad .$$

Supposons E munie d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$, on appelle matrice de f relativement à ces bases la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Cette matrice détermine les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f d'un vecteur connu par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Une fois fixée les bases, associer à une application linéaire sa matrice est compatible aux opérations naturelles sur les applications linéaires : addition, multilication par un scalaire, composition, ...

Une famille d'exemple d'applications linéaires est donnée par les symétries ou les projections associées naturellement à deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel.

Objectif

- Comprendre les liens entre matrices et applications linéaires.
- Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans de nouvelles bases en fonction de sa matrice dans d'anciennes bases : $B = Q^{-1}AP$.
- Savoir calculer le noyau et l'image d'une application linéaire en fonction de sa matrice.
- Savoir déterminer une symétrie et une projection vectorielle

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera au choix l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

3.2 Définitions

Définition 3.2.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, une application linéaire de E vers F est une application $f : E \to F$ vérifiant pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in K$:*

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\lambda\, u) = \lambda f(u) \quad .$$

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, nous noterons que pour tout $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$:

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) \quad .$$

Nous noterons aussi que $f(0_E) = 0_F$ et que pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$f(-u) = -f(u) \quad , \quad f(-\lambda u) = -\lambda f(u) \quad .$$

Notation 3.2.2 *Nous notons $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F et $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers E. Un élément de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est parfois appelé endomorphisme de E.*

Exemple : L'application nulle qui associe à tout vecteur de E est le vecteur nul de F est linéaire. L'application $\mathrm{Id}_E : E \to E\ ,\ u \mapsto \mathrm{Id}_E(u) = u$ est linéaire; nous l'appelons application identité de E.

3.3 Applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^p$

Commençons par décrire les applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^p$.

Proposition 3.3.1 *Soit $(a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$. l'application $f : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^p$ définie par :*

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n\ ,\ y_2 = a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n\ ,\ y_p = a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n)$$

est linéaire. Nous avons si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ désigne la matrice de terme général $a_{i,j}$ (terme de la i ème ligne et de la j ème colonne de A) et que $(y_1,\dots,y_p) = f(x_1,\dots,x_n)$:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Idée de la preuve : On peut prouver la proposition par un calcul direct ou utiliser les propriétés du produit matriciel qui donne pour tout $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $X'' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$A(X' + X'') = AX' + AX'' \quad , \quad \lambda(AX) = A(\lambda X) \ .$$

Remarque : (Image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$) Soit$(e_1,\dots,e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$: $e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots,e_n = (0,\dots,0,1)$. Si f est l'application définie dans la proposition 3.3.1 :

$$\begin{array}{rcll} f(1,0,\ldots,0) & = & (a_{1,1}\ ,\ a_{2,1}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,1}) & \text{1ère colonne de } A \\ f(0,1,\ldots,0) & = & (a_{1,2}\ ,\ a_{2,2}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,2}) & \text{2 ème colonne de } A \\ & \vdots & & \\ f(0,\ldots,0,1) & = & (a_{1,n}\ ,\ a_{2,n}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,n}) & n\,\text{ème colonne de } A\ . \end{array}$$

Ainsi, la matrice A est déterminée par f. **La matrice A est appelée la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$.** Ses colonnes sont données par les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Proposition 3.3.2 *Soit $(a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ la matrice de terme général $a_{i,j}$. L'application linéaire donnée dans la proposition 3.3.1 est l'unique application linéaire f dont les images de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ sont*

$$\begin{array}{rcll} f(1,0,\ldots,0) & = & (a_{1,1}\ ,\ a_{2,1}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,1}) & \text{1ère colonne de } A \\ f(0,1,\ldots,0) & = & (a_{1,2}\ ,\ a_{2,2}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,2}) & \text{2 ème colonne de } A \\ & \vdots & & \\ f(0,\ldots,0,1) & = & (a_{1,n}\ ,\ a_{2,n}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,n}) & n\,\text{ème colonne de } A\ . \end{array}$$

Preuve : Si f une telle application linéaire existe, pour $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{K}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,\ldots,x_n) & = & f(x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + x_n(0,,\ldots,0,1)) \\ & = & x_1 f(1,0,\ldots,0) + x_2 f(0,1,\ldots,0) + \cdots + x_n f(0,,\ldots,0,1) \\ & = & x_1(a_{1,1},a_{2,1},\ldots,a_{p,1}) + x_2(a_{1,2},a_{2,2},\ldots,a_{p,2}) + \cdots + x_n(a_{1,n},a_{2,n},\ldots,a_{p,n}) \\ & = & (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n\ ,\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n) \end{array}$$

L'application, f coïncide avec l'application f de la proposition 3.3.1. Donc, f existe et est unique. Elle est bien linéaire comme l'assure la proposition 3.3.1.

Exemple : La matrice de l'application nulle de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^n,\mathbf{K}^p)$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. La matrice de $\mathrm{Id}_{\mathbf{K}^n}$ l'application identité de $\mathbf{K}^n$ est I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

3.4 Applications linéaires entre espaces vectoriels et leurs matrices

Proposition 3.4.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $f(e_i) = u_i$. Cette application est définie par $f(x) = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$ pour x vecteur de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$*

Preuve par "analyse synthèse" :

Analyse : Soit f une telle application. Soit $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Comme f est linéaire, on obtient :

$$f(x) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \quad .$$

L'application $f : E \to F$ est donc nécessairement l'application définie par $f(x) = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. L'application cherchée est donc unique. Il reste à vérifier que cette application convient.

Syntèse : Montrons que f convient. C'est à dire que $f(e_i) = u_i$ et que f est linéaire. Comme les coordonnées de e_i dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 est placé à la i-ème place, on a bien :

$$f(e_i) = 0u_1 + \ldots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \ldots + 0u_n$$

ainsi $f(e_i) = u_i$.

Il reste à montrer que cette application f est linéaire. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur $x + y$ a pour coordonnées $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur λx a pour coordonnées $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. nous avons donc :

$$\begin{array}{rcl} f(x+y) & = & (x_1+y_1)u_1 + \ldots + (x_n+y_n)u_n \\ & = & (x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) + (y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) \\ & = & f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) & = & \lambda x_1u_1 + \cdots + \lambda x_nu_n \\ & = & \lambda(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) \\ & = & \lambda f(x) \end{array}$$

Ainsi, f convient, f est linéaire et la proposition est démontrée.

Définition 3.4.2 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ de F. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Nous appelons matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

Nous disons que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est la matrice de f avec comme base d'arrivée $\mathcal{B}'$ et base de départ $\mathcal{B}$.

Exemple : Relativement à toutes bases de E et F, la matrice de l'application nulle de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Remarque : Soit $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Si les matrices de f et g dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont égales, alors $f = g$. En effet, nous aurons que les valeurs de f et g sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont égales. Il restera a utiliser la proposition 3.4.1.

Proposition 3.4.3 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ de F. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

Soit u un vecteur de E dont $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur u dans *la base $\mathcal{B}$. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors nous avons :*

$$Y = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})X \quad .$$

Preuve : Soit $a_{i,j}$ le terme de i-ème ligne et de la j-ème colonne de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Ecrivons en colonnes les coordonnées d'un vecteur. Par définition, les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} \quad .$$

Par linéarité de f :

$$f(u) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) \quad .$$

Passons cette égalité en coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Remarque Si f est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^p$, la matrice de la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$ définie au paragraphe 3.3 est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$ définie dans ce paragraphe.

Proposition 3.4.4 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous supposons données une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ de F. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Il existe alors une unique $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = A$. Cette application linéaire f est l'unique application linéaire vérifiant pour tout $1 \leq j \leq n$:*

$$f(e_j) = a_{1,j}e'_1 + a_{2,j}e'_2 + \ldots + a_{p,j}e'_p \ .$$

Nous avons si $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u) = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = (y_1, \ldots, y_p)$ *:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : Cela résulte de la proposition 3.4.1 et de la proposition 3.4.3.

Définition 3.4.5 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Nous appelons matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est appelée matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

Notons d'une part que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E) = \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, E)$ et que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases de E, la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ a un sens. D'autre part, la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ n'est autre que la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ dans la cas particulier où nous prenons la même base sur E vu comme ensemble de départ et d'arrivée de f .

Exemple : Relativement à toutes bases de E, la matrice de Id_E l'application identité de E est I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Suivant la proposition 3.4.3 dans ce cas particulier, nous obtenons

Corollaire 3.4.6 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E . Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$.*

Soit u un vecteur de E dont $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors nous avons

$$Y = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})X \quad .$$

Remarque Si f est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^n$, la matrice de la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^n$ définie au paragraphe 3.3 est la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ définie dans ce paragraphe.

Proposition 3.4.7 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Il existe alors une unique $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = A$. Cette application linéaire f est l'unique application linéaire vérifiant pour tout $1 \leq j \leq n$:*

$$f(e_j) = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \ldots + a_{n,j}e_p \ .$$

Nous avons si $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u) = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(f(u)) = (y_1, \ldots, y_n)$ *:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : C'est un cas particulier de la proposition 3.4.4 : $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Exemple : Désignons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $\epsilon_1 = (1, 1)$ et $\epsilon_2 = (1, 17)$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = \epsilon_1$ et $f(e_2) = \epsilon_2$. Déterminer la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

Les coordonnées de ϵ_1 et et ϵ_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont respectivement $(1, 1)$ et $(1, 17)$. Autrement dit, $\epsilon_1 = e_1 + e_2$ et $\epsilon_2 = e_1 + 17e_2$. Nous obtenons :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} \quad .$$

3.5 Matrice d'une application linéaire et changement de base

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Rappelons que nous avions appelé matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont i-ème colonne est formée des coordonnées de e'_i dans la base $\mathcal{B}$. La matrice P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

L'interêt de cette matrice est que si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X \quad .$$

Proposition 3.5.1 *Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*
Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E (dite ancienne base de E) et $\mathcal{B}_2$ une deuxième base de E (dite nouvelle base de E).
Soit P la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}_1$ de E à la base $\mathcal{B}_2$ de E.
Soit $\mathcal{B}'_1$ une base de F (dite ancienne base de F) et $\mathcal{B}'_2$ une deuxième base de F (dite nouvelle base de F).
Soit Q la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}'_1$ de F à la base $\mathcal{B}'_2$ de F.
Soit $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)$ la matrice de f avec base de départ $\mathcal{B}_1$ et base d'arrivée $\mathcal{B}'_1$ (dans les anciennes bases).
Soit $B = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2)$ la matrice de f avec la nouvelle base de départ $\mathcal{B}_2$ et la nouvelle base d'arrivée $\mathcal{B}'_2$.
Alors, la formule donnant la matrice de f dans les nouvelles bases en fonction de la matrice de f dans les anciennes bases est :

$$B = Q^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = QBP^{-1} \quad .$$

Preuve : Soit en colonne X_1 et X_2 les coordonnées d'un vecteur u de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit en colonne Y_1 et Y_2 les coordonnées du vecteur $f(u)$ de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$. On a :

$$Y_1 = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)X_1 \quad , \quad X_1 = PX_2 \quad , \quad Y_2 = Q^{-1}Y_1 \quad .$$

Ainsi :

$$Y_2 = Q^{-1}Y_1 = Q^{-1}(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)X_1) = Q^{-1}(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)(PX_2)) = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P\,X_2 \quad .$$

De plus :

$$Y_2 = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_2) X_2 \ .$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ matrice colonne, nous avons ainsi :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_2) X = Q^{-1} \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_1) P\, X \quad .$$

Nous en déduisons ;

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_2) = Q^{-1} \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_1) P \quad .$$

Corollaire 3.5.2 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E (dite ancienne base de E) et $\mathcal{B}'$ une deuxième base de E (dite nouvelle base de E). Soit P la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}$ à la $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, soit A la matrice de f dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ et B la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Alors :*

$$B = P^{-1} A P \quad \text{et} \quad A = P B P^{-1} \quad .$$

3.6 Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 3.6.1 *(Noyau d'une application linéaire) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle noyau de f et on note $\ker f$, le sous-espace vectoriel de E :*

$$\ker f = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = 0_F\} \subset E \quad .$$

Justification : Comme f est linéaire $f(0_E) = 0_F$, ainsi nous avons toujours $0_E \in \ker f$ et donc $\ker f$ non vide. Soit $u, u' \in \ker f$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Comme f est linéaire : $f(u + u') = f(u) + f(u') = 0_F + 0_F = 0_F$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda 0_F = 0_F$. Cela montre que $u + u'$ et λu sont encore dans $\ker f$. Ainsi, $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.6.2 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

$$f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker f = \{0_E\} \quad .$$

Preuve :

Supposons injective. Rappelons f injective signifie que pour tout vecteur $v \in f$, il existe zéro ou un vecteur u de E telle que $f(u) = v$. Comme $f(0_E) = 0_F$ et que f est injective, c'est que 0_E est la seule solution de $x \in E$ et $f(x) = 0_F$. Donc, $\ker f = \{0_E\}$. Supposons maintenant que $\ker f = \{0_E\}$. Soit $y \in F$ et $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') = y$. Nous obtenons, $f(x) - f(x') = 0$. Il résulte de la linéarité de f que $f(x - x') = 0$. Ainsi, $x - x' \in \ker f = \{0_E\}$ et donc $x = x'$. Ainsi, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution. L'application f est donc injective. Le fait que f soit linéaire est essentielle.

Définition 3.6.3 *(Image d'une application linéaire) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle image de f et on note* $\operatorname{Im} f$ *le sous-espace vectoriel de F :*

$$\operatorname{Im} f = \{f(u) \text{ tels que } u \in E\} \subset F \quad .$$

Justification : Comme f est linéaire $f(0_E) = 0_F$ et le vecteur 0_F est dans $\operatorname{Im} f$. L'image de f est donc non vide. Soit $v, v' \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Il existe donc $u, u' \in E$ tels que $v = f(u)$ et $v' = f(u')$. Comme f est linéaire, $v + v' = f(u) + f(u') = f(u + u')$ et $\lambda v = \lambda f(u) = f(\lambda u)$. Cela montre que $v + v'$ et λv sont encore dans $\operatorname{im} f$. Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.6.4 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

$$f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = F \quad .$$

Preuve : f est surjective si pour tout $v \in F$, il existe au moins un $u \in E$ tel que $f(u) = v$. C 'est à dire si $\operatorname{Im} f = F$.

Proposition 3.6.5 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E, alors $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_p))$.

Preuve : Supposons donc que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E. Alors, $f(u_1), \ldots, f(u_p) \in \operatorname{im} f$. Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel , nous en déduisons : $\operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_p)) \subset \operatorname{Im} f$. Enfin, si

$v \in \operatorname{Im} f$, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Comme $(u_1, \ldots, u_p)$ engendre E; il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$. Ainsi, puisque f est linéaire :

$$v = f(u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = u = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) \ .$$

Ainsi, $v \in \operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ et $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_p))$. Nous obtenons : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_p))$.

Proposition 3.6.6 *(dimension de la source, du noyau et de l'image) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous supposons E de dimension n et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Alors :*

$$n = \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Im} f \quad .$$

Dans cette formule, nous convenons qu'un sous-espace vectoriel est réduit au vecteur nul si sa dimension est nulle)

Preuve : L'espace vectoriel E admet une base de cardinal n. Nous avons vu alors que tout sous-espace vectoriel de E admet une base et que toute base d'un sous-espace vectoriel de E peut être complété en une base de E. Appliquons cette remarque à $\ker f$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker f$. Complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. Notons que $f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n) \in \operatorname{im} f$ et montrons que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. En utilisant la linéarité de f et le fait que $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs de $\ker f$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y &= f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Montrons que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre. Soit $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$. Comme f est linéaire, on obtient : $f(\lambda_{p+1}e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$. Ainsi, $\lambda_{p+1}e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n \in ker f$. Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\ker f$, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$\lambda_{p+1}e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p \quad .$$

D'où :

$$\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p - \lambda_{p+1}e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0 \quad .$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base, c'est une famille libre. En particulier, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Nous avons ainsi montré que la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre.

En conclusion, $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi, $\operatorname{im} f$ est de dimension $n - p$ et

$$\dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{Iim}\, f = p + (n - p) = n = \dim_{\mathbf{K}} E \quad .$$

Donnons maintenant quelques résultats compémentaires. Soit $f : E \to F$ une application.

Rappelons que si A est un sous-ensemble de E, nous notons $f(A)$ le sous-ensemble de F :

$$f(A) = \{f(a) \quad \text{tels que} \quad a \in A\} \subset F.$$

Ce sous-ensemble est appelé image de A par f.

Rappelons que si B est un sous-ensemble de F, nous notons $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E :

$$f^{-1}(B) = \{a \in E \quad \text{tels que} \quad f(a) \in B\} \subset E.$$

Ce sous-ensemble est appelé image inverse de B par f. Il s'agit d'une notation et cet ensemble est défini même si f n'est pas bijective.

Proposition 3.6.7 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.*
1) Pour tout sous-espace vectoriel V de E, $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2) Pour tout sous-espace vectoriel W de F, $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve de 1) : L'ensemble $f(V)$ est non vide, car $0_E \in V$ et donc $f(0_E) = 0_F \in f(V)$.

Soit $y, y' \in f(V)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Par définition de $f(V)$, il existe x et $x' \in V$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Nous avons alors en utilisant la linéarité de f :

$$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \quad \text{et} \quad \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \quad .$$

Comme V est un sous-espace vectoriel, $x + x'$ et λx sont des vecteurs de V. Il en résulte que et $y + y'$ et λy appartiennent à $f(V)$. Ainsi, $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve de 2) : L'ensemble $f^{-1}(W)$ est non vide, car $f(0_E) = 0_F \in W$. Ainsi, $0_E \in f^{-1}(W)$.

Soit $x, x' \in f^{-1}(W)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ainsi, $f(x), f(x') \in W$. Comme f est linéaire, $f(x + x') = f(x) + f(x')$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Comme W est un sous-espace vectoriel, nous en déduisons $f(x+x'), f(\lambda x) \in W$. Il en résulte que $x + x', \lambda x \in f^{-1}(W)$. Donc, $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.6.8 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $v_1, v_2, \ldots, v_p \in E$. Alors :*

$$f(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)) \quad .$$

Autrement dit, si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ engendrent un sous-espace vectoriel G de E, les vecteurs $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ engendrent le sous-espace vectoriel $f(G)$ de F.

Preuve : Si $y \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, le vecteur y s'écrit $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ avec $\lambda_i \in \mathbf{K}$. Nous avons par linéarité de f : $f(y) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p)$. Ainsi, $f(y) \in \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$.
Inversement, si $y \in \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p)$. D'où, puisque f est linéaire, $y = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p)$. Or, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ et donc $y \in f(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p))$. Nous avons ainsi montré l'égalité cherchée.

3.7 Détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Nous allons montrons comment déterminer l'image, puis le noyau de f à partir de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Détermination de l'image de f : Suivant la proposition 3.6.5, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ n'est autre que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Ainsi, l'algorithme de la section **??** nous fournit à partir de la $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ une base échelonnée de $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1, \ldots, f(e_n))$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$. Nous obtenons en particulier la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{im} f$. L'algorithme de la section **??** nous permet aussi de déduire de cette base échelonnée de $\operatorname{Im} f$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

La formule liant la dimension de la base, du noyau et de l 'image donnera alors la dimension du sous-espace vectoriel $\ker f$. En particulier, l'algorithme de la section **??** permet de décider à partir de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ si f est injective ou surjective. Nous remarquerons que notre algorithme donne des relations entre les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, qui peuvent aider dans certains cas à déterminer une base de $\ker f$.

Détermination du noyau de f : Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées $(y_1, \ldots, y_p)$ de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont en colonne :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, x est dans le noyau de f si et seulement s $f(x) = 0_F$, donc si et seulement $Y = 0$. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, nous obtenons alors que le système d'équations homogènes de p équations à n variables :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

est un systéme d'équations de $\ker f$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Résolvons ce systéme homogéne par l'algorithme de la sous-section **??**, nous obtenons une base de $\ker f$. Par la formule liant la dimension de E, du noyau et de l 'image, nous en déduirons la dimension de $\operatorname{Im} f$. Cela peut aider aider dans certains cas à déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

Exemple : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Préciser $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

Détermination de l'image de f : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 2 : Utilisons $f(e_1)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1))$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) - f(e_1) & f(e_3) - 2f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 3 : Utilisons $f(e_2) - f(e_1)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_1))$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_1)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) - f(e_1) & f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Nous obtenons aussi que $(f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3, f(e_2) - f(e_1) = -2e_2 - 2e_3$ est une base échelonnée de im f relativement à $\mathcal{B}$. Ainsi, l'image de f est de dimension 2. Il en résulte que le noyau de f est de dimension 1.

A titre d'exercice, nous laissons poursuivre l'algorithme et établir que : $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$ est un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Nous pouvons que cet algorithme nous donne $f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) = 0$. Comme $f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) = f(e_3 - e_1 - e_2)$, il en résulte que $e_3 - e_1 - e_2$ est un vecteur de $\ker f$. Ce vecteur est non nul, le noyau est de dimension 1. Donc, $e_3 - e_1 - e_2$ est une base de $\ker f$.

Détermination du noyau de f : Si u est de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont (y_1, y_2, y_3) :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, un système d'équations de $\ker f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Résolvons ce système. Utilisant notre algorithme de résolution, nous obtenons le systéme triangulé ayant mêmes solutions :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système admet x_3 comme seule variable libre. Nous obtenons : $x_2 = -x_3$, puis $x_1 = -x_3$. Ainsi, les coordonndes des vecteurs de $\ker f$ sont :

$$\{x_3(-1, -1, 1) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous en déduisons :
$$\ker f = \{x_3(-e_1 - e_2 + e_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$
Le vecteur $-e_1 - e_2 + e_3$ est une base de $\ker f$. nous retrouvons que le noyau de f est de dimension 1 et que son image est donc de dimension 2.

Nous pouvons essayer de déterminer une base l'image de f à l'aide de cette information. Il nous suffit de donner deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im} f$ Nous pourrons vérifier par exemple que $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 + e_3$ forment une famille libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

3.8 Application linéaire, injective, surjective, bijective

Rappel de thorie des ensembles : Soit X et Y deux ensembles. Notons Id_X l'application identité de X défini pour tout $x \in X$ par $\mathrm{Id}_X(x) = x$.

Rappel des définitions : Rappelons qu'une application $h : X \to Y$ est

- injective si pour tout $y \in Y$ il existe 0 ou 1 élément x de X tel que $h(x) = y$,
- surjective si pour tout $y \in Y$ il existe 1 ou plusieurs éléments x de X tel que $h(x) = y$,
- bijective si pour tout $y \in Y$ il existe un unique élément x de X tel que $h(x) = y$.

Une application est bijective si est seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Propriété caractéristique d'une bijection : Si h est bijective, nous notons $h^{-1} : Y \to X$ l'application qui à $y \in Y$ associe l'unique x de X tel que $h(x) = y$. Cette application est appelée l'inverse ou la réciproque de h. Nous avons que la la composée $h^{-1} \circ h$ est l'application identité de X et la composée $h \circ h^{-1}$ est l'application identité de Y.

Inversement si $h : X \to Y$ et qu'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ h = \mathrm{Id}_X$ et $h \circ g = \mathrm{Id}_Y$, alors d'une part h est inversible et $h^{-1} = g$ et d'autre part g est inversible et $g^{-1} = h$.

Composition de bijections : Si Z est un troisième ensemble et $g : Y \to Z$, alors nous avons

- h et g injectives implique $g \circ h$ injective.
- h et g surjectives implique $g \circ h$ surjective.
- h et g bijectives implique $g \circ h$ bijective et $(g \circ h)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$.
- h bijective implique h^{-1} bijective et $(h^{-1})^{-1} = h$.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Rappelons que nous avons montré les deux résultats suivant :

- Proposition 3.6.2 : f injective $\iff$ $\ker f = \{0_E\}$.
- Proposition 3.6.4 : f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}\, f = F$.

Proposition 3.8.1 *Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ est bijective, l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est alors linéaire : $f^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F, E)$. Nous disons alors que f est un isomorphisme linéaire et que E et F sont isomorphes.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ bijective. Rappelons que cela signifie que pour tout $v \in F$, il existe un unique vecteur de E tel que $f(u) = v$. L'application réciproque est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à un vecteur $v \in F$ le seul vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Nous devons montrer que f^{-1} est linéaire. Soit $v, v' \in F$ et $\lambda \in K$. Notons $u = f^{-1}(v)$ et $u' = f^{-1}(v')$. Comme $f(u + u') = f(u) + f(u') = v + v'$, il vient $u + u' = f^{-1}(v + v')$. Ainsi, $f^{-1}(v + v') = f^{-1}(v) + f^{-1}(v')$. De même, $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v$. Ainsi, $f^{-1}(\lambda v) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$. Cela montre que l'application f^{-1} est linéaire.

Exemples d'isomorphismes linéaires : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application :

$$\phi : E \longrightarrow \mathbf{K}^n \ , \ u \longmapsto \text{ les coordonnées de u dans la base } \mathcal{B}$$

est linéaire. L'application

$$\psi : \mathbf{K}^n \longrightarrow E \ , \ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \quad .$$

est linéaire. Nous avons $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_E$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}^n}$. Il en résulte que ϕ et ψ sont bijectives inverses l'une de l'autre et donc des isomorphismes.

.

Proposition 3.8.2 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

1. *Supposons f injective : Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre, la famille $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F.*
2. *Supposons f surjective : Si $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ engendrent E, $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l))$ engendrent F.*
3. *Si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F.*

Preuve de 1) : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que $\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0_F$. Puisque f est linéaire, nous avons donc : $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = 0_F$. Puisque, f est injective, nous obtenons $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$. La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ étant libre, il en résulte $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Cela assure que $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre

Preuve de 2) : Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ engendrent E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ tels que $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l$. Ainsi,

$$y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l) \quad .$$

L'application f étant linéaire, nous obtenons : $y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_l f(v_l)$. Cela montre que tout y de F est combinaison linéaire de $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l)$. La famille $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l))$ engendrent donc F.

Preuve de 3) : Résulte de 1 et 2.

Remarque : a) Une conséquence est que si deux **K**-espaces vectoriels E et F sont isomorphes et que l'un est de dimension n. Alors, ils sont tous les deux de même dimension n.
b) Inversement si E et F sont deux **K**-espaces vectoriels de même dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F. L'application :

$$\theta : E \longrightarrow F \ , \ u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \longmapsto \theta(u) = x_1 e'_1 + \cdots + x'_n e_n$$

est linéaire. Nous montrons qu'elle est bijective. C'est donc un isomorphisme linéaire.
c) Ainsi, deux **K**-espaces vectoriels de dimension respectivement n et p sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

Proposition 3.8.3 *Soit E et F deux* **K***-espaces vectoriels de* **même dimension**. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective.*

Preuve : Il suffit de montrer l'équivalence de 1 et 2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Preuve $1 \Longrightarrow 2$ **:** Si f est injective : Suivant la proposition 3.8.2, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $n = \dim F$ éléments. C'est donc une base de f et $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{f}(\mathrm{e}_1), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{e}_n))$. Nous en déduisons $\mathrm{Im}\, f = F$ et donc f surjective.
Preuve $2 \Longrightarrow 1$ **:** Si f est surjective : Suivant la proposition 3.8.2 , $(f(e_1), \ldots, f(e_n)$ est une famille génératrice de F formée $n = \dim F$ éléments. C'est donc une base de f et en particulier une famille libre.

Supposons $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ dans le noyau de f. Nous obtenons $x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = 0_F$, d'où les x_i nuls et donc $x = 0_E$. Ainsi, $\ker f = \{0_E\}$ et f est injective.

Pour finir ce paragraphe, donnons une application de la proposition 3.10.4.

Proposition 3.8.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le système homogène d'équations linéaires associé à l'équation* $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *admet* $(0, \ldots, 0)$ *comme unique solution si et seulement si la matrice A est inversible.*

Preuve : Supposons que l'équation homogène ait une unique solution. Considérons l'application linéaire associèe à la matrice A: $h : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$ défini par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Par hypothése, cette application est injective. Comme il s'agit d'une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ vers lui même, elle est donc bijective (corollaire 3.8.3). Sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ étant A, suivant la propositon 3.10.4 la matrice A est inversible. Inversement, si A est inversible et que

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

en multipliant à gauche par la matrice A^{-1}, nous obtenons $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Une autre preuve est donnée dans le section **??** sur les matrices èlèmentaires.

3.9 Opérations sur les applications linéaires

Soit X un ensemble et F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Notons X^F l'ensemble des applications de X vers F. Soit $f \in X^F, g \in X^F, \lambda \in \mathbf{K}$. Nous notons $f+g$ et λf, les applications :

$$\begin{array}{rcl} f+g : X \longrightarrow F & , & x \in X \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \lambda f : X \longrightarrow F & , & x \in X \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \quad . \end{array}$$

Nous déduisons du fait que F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel que pour ces deux opérations, X^F l'ensemble des applications de X vers F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'application nulle est l'application dont l'image de tout $x \in X$ est le vecteur nul de F. L'opposé de $f \in X^F$ est l'application notée $-f$ dont l'image de tout $x \in X$ est $-f(x)$.

Soit E, F, deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), \lambda \in \mathbf{K}$. Nous notons $f_1 + f_2$ et λf_1, les applications :

$$\begin{array}{rcl} f_1 + f_2 : E \longrightarrow F & , & u \longmapsto (f_1+f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u) \\ \lambda f_1 : E \longrightarrow F & , & u \longmapsto (\lambda f_1)(u) = \lambda(f_1(u)) \quad . \end{array}$$

Proposition 3.9.1 *Soit $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), \lambda \in \mathbf{K}$. Les applications f_1+f_2 et λf_1 sont linéaires. Muni de ces opérations, $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : On commence par déduire de la linéarité de f_1 et f_2 que $f_1 + f_2$ et λf_1 sont linéaires. De plus, l'application nulle de E vers F est linéaire et $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est donc non vide. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est donc un sous-espace vectoriel de E^F. Cela montre que muni de nos deux opérations, $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

On notera que le vecteur nul de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est l'application $0 : E \to F$, qui associe à tout vecteur u de E le vecteur nul de F. L'opposée de l'application $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est l'application $-f : E \to F$ définie par $f(u) = -f(u)$.

Proposition 3.9.2 *Soit E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F, G)$, l'application composée $g \circ f$ est linéaire : $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, G)$.*

Preuve : Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Nous rappelons que par définition de la composition : $(g \circ f)(u) = g(f(u))$ et $(g \circ f)(v) = g(f(v))$. En utilisant successivement la définition de $g \circ f$, la linéarité de f, puis de g et la définition de $g \circ f$, nous obtenons :

$$\begin{array}{l} (g \circ f)(u+v) = g(f(u+v)) = g(f(u)+f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v) \\ (g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda\, f(u)) = \lambda\, g(f(u))) = \lambda\, (g \circ f)(u) \quad . \end{array}$$

Proposition 3.9.3 *Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $\lambda \in K$. Soit $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(G, E)$:*

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2 \quad , \quad (f_1 + f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h \quad .$$

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F), g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F, G), \lambda \in \mathbf{K}$: $g \circ (\lambda f) = (\lambda g) \circ f = \lambda(g \circ f)$.
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$, nous avons : $f \circ \mathrm{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_F \circ f = f$.

Remarque 3.9.4 *L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est muni de trois opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition. A la vue des propriétés de l'addition et la composition, nous disons que $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est d'anneau unitaire d'unité Id_E. .*

Si $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, notons qu'en général $g \circ f$ et $f \circ g$ sont deux applications différrantes.

Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, nous notons $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la composée de k fois l'application f par elle même.

Notation 3.9.5 *Soit E un $\mathbf{K}$-espacee vectoriel. Nous notons $\mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E) \subset \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ l'ensemble des isomorphismes de E, c'est à dire applications linéaires bijectives de E vers E.*

Nous avons si $f, g \in \mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E)$, la composée $g \circ f \in \mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E)$. L'application Id_E est dans $\mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E)$ et si $f \in \mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E)$, son inverse $f^{-1} \in \mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E)$.

3.10 Opérations sur les applications linéaires et leurs matrices

Proposition 3.10.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:*

$$\mathcal{M}(f+g, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) + \mathcal{M}(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\lambda f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \lambda \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \quad .$$

Si G est un troisième espace vectoriel, $\mathcal{B}''$ une base de G et $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F, G)$:

$$\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \quad .$$

Preuve : Le premier point provient du fait que si e_j est un vecteur de $\mathcal{B}$, les coordonnées de $(f+g)(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'obtiennent en ajoutant les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ à ceux de $g(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Le deuxième point provient du fait que si e_j est un vecteur de $\mathcal{B}$, les coordonnées de $\lambda f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'obtiennent en multipliant par λ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Montrons plus précisement le troisième point. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$, et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_p)$. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ et $b_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) &= g(a_{1,j}e'_1 + \cdots + a_{m,j}e'_m) \\ &= a_{1,j}g(e'_1) + \cdots + a_{m,j}g(e'_m) \\ &= a_{1,j}(b_{1,1}e''_1 + \cdots + b_{p,1}e''_p) + \cdots + a_{m,j}(b_{1,m}e''_1 + \cdots + b_{p,m}e''_p) \\ &= (b_{1,1}a_{1,j} + \cdots + b_{1,m}a_{m,j})e''_1 + \cdots + (b_{p,1}a_{1,j} + \cdots + b_{p,m}a_{m,j})e''_p \end{aligned}$$

Or, par définition du produit ligne colonne le terme général de la matrice produit $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est $\sum_{k=1}^{m} b_{i,k}a_{k,j} = b_{i,1}a_{1,j} + \cdots + b_{i,m}a_{m,j}$. La troisième assertion de la proposition en résulte.

Il en résulte :

Proposition 3.10.2 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:*

$$\mathcal{M}(f+g, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) + \mathcal{M}(g, \mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{M}(\lambda f, \mathcal{B}) = \lambda \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(g, \mathcal{B})\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) \quad .$$

Proposition 3.10.3 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F. L'application :*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \quad , \quad f \longmapsto \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Idée de la Preuve : La linéarité de notre application résulte de la proposition précédente. La bijectivité résulte de la proposition 3.4.1.

En particulier, avec les notations de la proposition : deux applications $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ sont égales si et seulement si leurs matrices $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ sont égales.

Proposition 3.10.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible. Nous avons alors $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$*

Preuve : Si f est un isomorphisme, en utilisant la proposition , on obtient :

$$\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B})\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f \circ f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

Ainsi, $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible. et $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$.

Si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible, d'après la proposition 3.4.1 il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ tel que $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$. En utilisant la proposition , on obtient :

$$\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f \circ g, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

Or, Id_n est la matrice de Id_E dans la base $\mathcal{B}$. On déduit de la proposition : $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Cette propriété assure que f est bijective d'application réciproque g.

3.11 Projection et symétrie vectorielle

Définition 3.11.1 *(projection et symétrie) Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E : $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur u de E s'écrit donc de façon unique $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.*
1) L'application $p : E \to E\,,\ u \mapsto p(u) = u_1$ est linéaire. Elle est appelée projection sur E_1 parallélement à E_2.

$$\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = E_1 \quad , \quad \ker p = E_2 \quad \text{et} \quad p^2 = p \quad .$$

2) L'application $s : E \to E\,,\ u \mapsto s(u) = u_1 - u_2$ est linéaire. Elle est appelée symétrie par rapport à E_1 parallélement à E_2.

$$\ker(s - \mathrm{Id}_E) = E_1 \quad , \quad \ker(s + \mathrm{Id}_E) = E_2 \quad \text{et} \quad s^2 = \mathrm{Id}_E \quad .$$

En particulier, s est un isomorphisme linéaire et $s^{-1} = s$.

Remarque Si $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$. Nous avons:

$$u_2 = u - u_1 \quad ; \quad s(u) = u_1 - u_2 = u_1 - (u - u_1) = 2u_1 - u = 2p(u) - \mathrm{Id}_E(u) = (2p - \mathrm{Id}_E)(u)\ .$$

Ainsi : $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Exemple : Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $D = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ la droite vectorielle de base $(1, 1, 1)$.
1) Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2) Expliciter la symétrie par rapport P parallélement à D. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$?

1) Par résolution de l'équation $x+y+z = 0$, on obtient que P est un plan vectoriel de base $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ainsi, $\dim P + \dim D = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbf{R}^3$. Pour montrer que P et D sont supplémentaires, il reste à montrer que $P \cap D = \{0\}$ Soit $u \in P \cap D$. Exprimons que $u \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda(1, 1, 1)$. D'où, $u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Comme $u \in P$, les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ vérifie l'équation de P. Ainsi, $\lambda + \lambda + \lambda = 0$, soit $3\lambda = 0$. D'où $\lambda = 0$ et $u = 0$. Donc, $P \cap D = \{0\}$ et $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.
2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, u s'écrit de façon unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in P$ et $u_2 \in D$. Comme $u_2 \in D$, il

existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u_2 = \lambda(1,1,1) = (\lambda,\lambda,\lambda)$. Il vient $u_1 = u - u_2 = (x-\lambda, y-\lambda, z-\lambda) \in P$. Il en résulte : $x - \lambda + y - \lambda + z - \lambda = 0$. Soit : $\lambda = (1/3)(x+y+z)$ et

$$u_2 = \frac{1}{3}(x+y+z)(1,1,1) \quad \text{et} \quad u_1 = (\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}) \quad .$$

La symétrie par rapport à P parallélement à D est donc l'application linéaire :

$$s : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad u = (x,y,z) \longmapsto u_1 - u_2 = (\frac{x-2y-2z}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z}{3}) \quad .$$

La projection sur P parallélement à D est donc l'application linéaire :

$$p : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad u = (x,y,z) \longmapsto u_1 = (\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}) \quad .$$

La matrice de s dans la base canonique est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$