Exercice 1 –

Soit $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Nous considérons l'application linéaire de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$. Déterminer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ à l'aide de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Préciser $f(1,0)$ et $f(0,1)$.

2) Soit $u = (3,-2)$ et $v = (-1,1)$. Déterminer $f(u)$ et $f(v)$. Exprimer ces deux vecteurs à l'aide de u et v.

3) Montrer que $\mathcal{B} = (u,v)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Déduire de la question précédente la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

4) Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}. Quel est le lien entre B et A ?

5) Préciser l'image et le noyau de f. L'application f est-elle inversible ?

6) Préciser f^2, puis f^n pour tout entier n.

Exercice 2 –

Nous considérons l'application linéaire f définie par :

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(5x_1 - x_2 + 2x_3, 6x_2, x_1 + x_2 + 4x_3) \ .$$

1) Quelle est la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbf{R}^3$?

2) Notons E_2 l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que $f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1, x_2, x_3)$. Montrer que F n'est autre que le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ formé des solutions du système d'équations homogènes:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Résoudre ce système et déterminer une base de E_2.

De même, nous notons E_1 l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$. Montrer que E_1 n'est autre que le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ formé des solutions du système d'équations homogènes:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Résoudre ce système et déterminer une base de E_1.

3) Nous posons $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 0, -1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ à l'aide des vecteurs de $\mathcal{B}'$. En déduire que $e'_1 \in E_2$, $e'_2 \in E_2$ et $e'_3 \in E_1$. Montrer que (e'_1, e'_2) est une base de E_2 et (e'_3) est une base E_1.

4) Quelle est la matrice Λ de f dans la base $\mathcal{B}'$? Quel est le lien entre Λ, A et P ?

5) Préciser le noyau et l'image de f. Même question pour $f - 2\mathrm{Id}$ et $f - \mathrm{Id}$.

6) Montrer $\mathbf{R}^3 = E_2 \oplus E_1$.

Exercice 3 –

Soit $\mathcal{B}_{\mathrm{can}} = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Nous considérons l'application linéaire de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 - 4x_2 \\ 6x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Préciser $f(1,0)$ et $f(0,1)$. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$?

2) Soit $u = (-2,3)$ et $v = (1,-1)$. Déterminer $f(u)$ et $f(v)$. Exprimer ces deux vecteurs à l'aide de u et v.

3) Montrer que $\mathcal{B} = (u,v)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Déduire de la question précédente la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

4) Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}. Quel est le lien entre B et A ?

5) Préciser l'image et le noyau de f. L'application f est-elle inversible ?

6) Préciser $f^2(u)$ et $f^2(v)$. En déduire la valeur de f^2 et de f^n pour tout entier n.

Exercice 4 – Notons M la matrice à coefficients réels :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons l'application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

1) Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Exprimer $f(u) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ à l'aide de (x_1, x_2, x_3, x_4).

2) En utilisant l'exercice précédent préciser le noyau $\ker f$ de f.

3) Rappeler la définition de $\operatorname{im} f$ l'image de f. Expliquer pourquoi $\operatorname{im} f$ est le sous-espace vectoriel G de l'exercice précédent. Avec les notations de l'exercice précédent, on admettra que $f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = 7v_2 - 4v_3$, donner alors la matrice dans la base (v_2, v_3) de G, de l'application linéaire de l'espace vectoriel

im f sur lui même définie par :

$$g : \text{im } f \longrightarrow \text{im } f \quad ; \quad u \longmapsto g(u) = f(u) \; .$$

Exercice 5 – Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; .$$

1) Calculer $U^2 - 3U$. Montrer que U est inversible et calculer U^{-1}. En utilisant un algorithme du cours, écrire U^{-1}, puis U comme produit de matrices élémentaires.

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Nous considérons l'application linéaire $f : E \to E$ de matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3/4 & 7/2 \end{pmatrix} \; .$$

2) Soit $e'_1 = -2e_1 + e_2$ et $e'_2 = -4e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E. Quelle est la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer P^{-1}.

3) Soit u de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Déterminer les coordonnées de $f(u)$ la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. En déduire $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$ et exprimer ces vecteurs simplement à l'aide de e'_1 et e'_2. Pour n entier, déterminer ensuite en fonction de n, les vecteurs $f^n(e'_1)$ et $f^n(e'_2)$.

4) Déduire de la question précédente, la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$? Quelle est le lien de cette matrice avec A et P ?

5) Soit $w = e_1 + e_2$. Quelles sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}'$? En déduire les coordonnées dans cette base $\mathcal{B}'$ des vecteurs $f(w)$, $f^2(w)$ et $f^n(w)$ pour n entier.

Exercice 6 –

Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que U est inversible. Calculer U^{-1}. Ecrire U comme un produit de matrices élémentaires.

2) Calculer la matrice :

$$U^2 - 4U + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

3) Soit $e'_1 = e_1 + 3e_2$ et $e'_2 = e_1 + 4e_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ est une base de E. Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?

4) Soit u de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Quelles sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$? Donner les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}.$$

$f : E \to E$ l'application linéaire de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

5) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$?

6) Soit n un entier, donner la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$, puis dans la base $\mathcal{B}$. Préciser f^n à l'aide de f et de n.

Exercice 7 – On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 7x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 7x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_3) \\ 7x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array} \right. .$$

Nous notons P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire E. Donner à l'aide d'un algorithme du cours un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les deux variables libres de ce système triangulé ?

2) Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B} = (u, v)$ de P par cette méthode.

3) Posons $u' = (\frac{2}{7}, 1, 1, 1)$, $v' = (0, 1, 3, 1)$. Montrer que la famille (u', v') est libre. Montrer que la famille (u', v') est une base de P.

4) Soit $(e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1))$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$g(e_1) = (7, 7, 7, 7) \ ; \ g(e_2) = (-4, -2, -5, -6) \ ; \ g(e_3) = (1, 1, 1, 1) \ ; \ g(e_4) = (1, -1, 2, 3) \ .$$

Donner la matrice de g dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Préciser pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ le quadruplet de réels $(y_1, y_2, y_3, y_4) = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

5) Déterminer à l'aide de la question 2 une base du noyau $\ker g$ de g.

Exercice 8 – Posons $v_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (3, 1, 0, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 1, 1)$. Nous désignons par $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.

1) Donner suivant un algorithme du cours une base échelonnée de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la dimension de G ? Donner ensuite un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

2) Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_1 + x_3, y_4 = x_2 + x_3) \; .$$

Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$?

3) Préciser un système de générateurs de $\operatorname{im} f$ l'image de f et une base de $\operatorname{im} f$.

Exercice 9 – Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \;\; (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Préciser $(x', y', z') = f(x, y, z)$ pour tout réel x, y, z.

2) Soit $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (0, -2, -3)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$. Nous noterons $\mathcal{B}'$ cette base.

3) Quelle est la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ vers la base $\mathcal{B}'$? On admettra que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit x, y, z trois réels. Si (X, Y, Z) sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de (x, y, z), exprimer (X, Y, Z) à l'aide des réels (x, y, z).

4) Calculer les vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ à l'aide de u, v, w. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$. Rappeler le lien entre cette matrice B et les matrices A et P.

5) Quelles sont les matrices de $f - \mathrm{Id}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et dans la base $\mathcal{B}'$? Déterminer le noyau de $f - \mathrm{Id}$. Déterminer le noyau de $f + \mathrm{Id}$.

6) Pour tout n entier, déterminer $f^n(u)$, $f^n(v)$, et $f^n(w)$. En déduire $f^n(x, y, z)$ pour tout réels x, y, z. Indication : on écrira (x, y, z) come combinaison linéaire de u, v, w.

Exercice 10 – Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Préciser $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ pour tout réel x_1, x_2, x_3.

Soit $a = (1, -1, 2)$, $b = (2, 0, -1)$ et $c = (-1, 1, 0)$.

2) Calculer les vecteurs $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$. Exprimer ces trois vecteurs simplement comme combinaisons linéaires de a, b et c.

3) Montrer en calculant le déterminant d'une certaine matrice que $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$.

Nous admettrons que l'inverse de P est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

4) Soit x_1, x_2, x_3 trois réels, quelles sont les coordonnées de (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}'$? Quelles sont les coordonnées de $a = (1, -1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}'$?

5) Donner à l'aide de la question 2 la matrice Λ de f dans la base $\mathcal{B}'$. Rappeler ensuite le lien entre A, P et Λ.