Cours Fondements II , Sujet d'Algèbre , Mai 2019

CALCULATRICES TELEPHONES ORDINATEURS TABLETTES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 : On considère le système d'équations linéaires homogènes à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcll} 2x_1 & - & 6x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & E_1 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 4x_3 & = & 0 & E_2 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 & E_3 \end{array} \right. .$$

Nous notons K le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ formé des solutions de E.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire E, puis l'ordre de E_1, E_2 et E_3. À l'aide de l'algorithme du cours, donner un système triangulé $\tilde{E}$ ayant les mêmes solutions que E. Précisez la seule variable libre de ce système triangulé.

2) Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de K. Expliciter deux éléments de K.

Exercice 2 : Posons $v_1 = (2, 2, -2)$, $v_2 = (-6, 10, -2)$ et $v_3 = (-4, 4, 0)$. Nous désignons par $I = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.

1) Donner suivant le cours une base $\mathcal{B}'$ échelonnée de I relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. En déduire la dimension de I.

2) Donner alors un système d'équations de I relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $b = (2, 0, -1)$ et $c = (-1, 1, 0)$ sont des éléments de I.

Exercice 3 : Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1) Préciser $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ pour tout réel x_1, x_2, x_3.

Soit $a = (1, -1, 2)$, $b = (2, 0, -1)$ et $c = (-1, 1, 0)$.

2) Calculer les vecteurs $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$. Exprimer ces trois vecteurs simplement comme combinaisons linéaires de a, b et c.

3) Montrer en calculant le déterminant d'une certaine matrice que $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$.

Nous admettrons que l'inverse de P est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

4) Soit x_1, x_2, x_3 trois réels, quelles sont les coordonnées de (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}'$? Quelles sont les coordonnées de $a = (1, -1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}'$?

5) Donner à l'aide de la question 2 la matrice Λ de f dans la base $\mathcal{B}'$. Rappeler ensuite le lien entre A, P et Λ.