Examen du 28 juin 2019

Durée totale : 2h.
Calculatrices, téléphones portables, ordinateurs, tablettes et documents interdits.
Le sujet comporte 3 pages.
Répondre aux sujets d'algèbre et d'analyse sur deux copies différentes

Partie algèbre (12 points)

Exercice 1 Considérons le système d'équations linéaires homogènes :

$$(E') \qquad \left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E'_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E'_2) \end{array}\right. .$$

1. Préciser l'ordre des variables du système linéaire E', puis l'ordre des équations E'_1 et E'_2. Expliquer pourquoi le système E' est triangulé. Quelles sont les deux variables libres de E' ? Nous notons P_1 le sous-vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E'. Résoudre alors le système E' suivant la méthode du cours et donner une base de P_1.

   Considérons le système d'équations linéaires homogènes de variables respectivement x_1, x_2, x_3, x_4 (comme dans le système E') :

$$(E'') \qquad \left[\begin{array}{cccc} x_3 & & = 0 & (E''_1) \\ & x_4 & = 0 & (E''_2) \end{array}\right. .$$

2. Préciser l'ordre des équations E''_1 et E''_2. Expliquer pourquoi le système E'' est triangulé. Quelles sont les deux variables libres de E'' ? Nous notons P_2 le sous-ensemble de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E''. Résoudre alors le système E'' et donner une base de P_2.
3. Calculer $P_1 \cap P_2$. Quelle est la dimension des sous-espaces vectoriels P_1 et P_2 ? En déduire que les sous-espaces vectoriels P_1 et P_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 2 Posons $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 3, 1)$, $v_3 = (1, 5, 5, 5)$ et $v_4 = (1, 8, 9, 8)$. Nous désignons par $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4.

1. Donner suivant le cours une base $\mathcal{B}$ de F échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. En déduire que la dimension de F est deux.
2. Donner alors un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3. Montrer que pour tout a réel $u = \left(\frac{2a}{5}, -\frac{a}{4}, -a, -\frac{a}{4}\right)$ est un élément de F.

Exercice 3 Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 1 & -11 & -2 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix} .$$

et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Préciser $f(x_1, x_2, x_3)$ à l'aide des réels x_1, x_2, x_3.
   Soit $u = (-1, 1, -2)$, $v = (-2, 0, 1)$ et $w = (1, -1, 0)$.

2. Calculer les vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$. En déduire que $f(u) = 2u$, $f(v) = u + 2v$ et $f(w) = 3w$.

3. Montrer en calculant le déterminant d'une certaine matrice que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$?

4. Donner à l'aide de la question 2 la matrice Λ de f dans la base $\mathcal{B}$. Rappeler ensuite le lien entre A, P, P^{-1} et Λ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).

Partie analyse (8 points)

Exercice 4

a) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

b) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 5 Calculer $I = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)\, dx$.

Exercice 6 Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$.

Exercice 7

a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 1 en 0, à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en 0.

b) En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.