

Feuille 1
Application linéaire

Exercice 1 – 1) Soit E et F deux $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que l'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F .

2) Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Fixons un réel a et considérons l'application $h_a : E \rightarrow E$ définie pour tout $u \in E$ par $h_a(u) = au$. Montrer que h_a est linéaire.

3) Considérons $\mathbf{R}$ muni de sa structure naturelle de $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. L'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour x réel par $f(x) = x^2$ est-elle linéaire ? Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbf{R}$ vers lui même.

Exercice 2 – 1) Soit E et F deux $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E , $f(H) = \{f(u) \text{ tel que } u \in H\}$ est un sous-espace vectoriel de F .

2) Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire. Montrer que $\{u \in E \text{ tel que } f(u) = 17u\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 3 – On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4, 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4) .$$

Soit $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbf{R}^4$.

1) Quelle est la matrice A de f dans ces bases canoniques ?

2) Préciser l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}_4$.

Soit $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$g(1, 0, 0) = (-2, 0, 17) , \quad g(0, 1, 0) = (3, -1, 1) , \quad g(0, 0, 1) = (-2, 2, 2) .$$

3) Préciser g . Quelle est notamment la matrice B de g dans les bases canoniques ?

Exercice 4 – On considère E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ de matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

1) Expliciter $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(x_1e_2 + x_2e_2)$ à l'aide de la matrice A .

2) Déterminer un vecteur non nul $u_1 \in E$ tel que $f(u_1) = u_1$ et un vecteur non nul $u_2 \in E$ tel que $f(u_2) = 17u_2$.

3) Montrer que (u_1, u_2) est une base de E . On notera $\mathcal{B}'$ cette base. Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

4) Quelles sont les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$? Donner la formule liant B , A et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Vérifier cette formule.

Exercice 5 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire de matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que $\mathcal{B}' = ((1, 0), (2, -1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Montrer que $\mathcal{B}'' = ((1, -2), (0, 1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
- 2) Donner la matrice $B = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.
- 3) Donner les matrices de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Rappeler le lien entre A et B .
- 4) Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 6 – Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit F un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit $f : E \rightarrow F$ l'application linéaire de matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Soit $u \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$, préciser le vecteur $f(u)$.
- 2) Donner une base du noyau de f .
- 3) Donner une base de l'image de f .

Exercice 7 – Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ une application linéaire de matrice A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Préciser l'image des vecteurs de base de $\mathcal{B}$.
- 2) Soit $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, préciser $f(u)$.
- 3) Déterminer une base du noyau de f et une base de son image. Donner une équation de l'image de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
- 4) Le noyau et l'image de f sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- 5) On pose $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = e_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E . Quelles sont les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.