Feuille 2
Application linéaire

Exercice 1 – On considère l'application :

$$g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1).$$

- 1) Déterminer la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Expliciter l'application linéaire g^2 . Puis, montrer que $g^2 - g - 6 \text{Id}_{\mathbf{R}^2} = 0$.
- 2) Montrer que g est inversible. Quelle est la matrice de g^{-1} dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$? Exprimer g^{-1} à l'aide de g .
- 3) Expliciter les applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^2)$ telles que :

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = \text{Id}_{\mathbf{R}^2} \\ f_1 - 2f_2 = g - \text{Id}_{\mathbf{R}^2}. \end{cases}$$

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.

- 1) Montrer que $(f - 2 \text{Id}_E) \circ (f - 3 \text{Id}_E) = f^2 - 5f + 6 \text{Id}_E$.
- 2) Montrer que $f - 2 \text{Id}_E$ et $f - 3 \text{Id}_E$ commutent.
Nous supposons dans la suite de l'exercice que $f^2 - 5f + 6 \text{Id}_E = 0$.
- 3) Montrer que l'application f est inversible et préciser f^{-1} à l'aide de f .
- 4) En déduire l'application linéaire f si $f - 3 \text{Id}_E$ ou $f - 2 \text{Id}_E$ est inversible ?

Exercice 3 – Nous considérons la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -12 & 7 \end{pmatrix}.$$

et $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

- 1) Préciser $f(x, y, z)$ pour tout réel x, y, z .
- 2) Soit $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (0, -2, -3)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$. Nous noterons $\mathcal{B}'$ cette base.
- 3) Quelle est la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ vers la base $\mathcal{B}'$? Montrer que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit x, y, z trois réels. Si (X, Y, Z) sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de (x, y, z) , exprimer (X, Y, Z) à l'aide des réels (x, y, z) .

- 4) Calculer les vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ à l'aide de u, v, w . En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$. Rappeler le lien entre cette matrice B et les matrices A et P .
- 5) Quelles sont les matrices de $f - \text{Id}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et dans la base $\mathcal{B}'$? Déterminer le noyau de $f - \text{Id}$.
- 7) Montrer que $P = \text{Vect}(u, v)$ et $D = \text{Vect}(w)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Comparer alors f et la symétrie par rapport à P parallèlement à D .
- 8) Pour tout n entier, déterminer $f^n(u)$, $f^n(v)$, et $f^n(w)$. Quelle est la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire $f^n(x, y, z)$ pour tout réels x, y, z . Indication : on pourra écrire (x, y, z) comme combinaison linéaire de u, v, w . Quelle est la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 4 – Considérons P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + 3z = 0$ et D le sous-espace vectoriel $\text{Vect}((1, 1, 2))$ de $\mathbf{R}^3$. Montrer que P et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.

- 1) Expliciter p la projection vectorielle sur P parallèlement à D .
- 2) Quelle est la matrice A de p relativement à la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbf{R}^3$? Vérifier que $A^2 = A$.
- 3) Donner une base (u, v) de P . Montrer que $(u, v, (1, 1, 2))$ est une base $\mathbf{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}$.
- 4) Quelle est la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 5 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que f est un isomorphisme. Préciser f^{-1} .
- 2) Quelle est la matrice de $f^2 - 3f$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Qu'en conclure pour $f^2 - 3f$?
- 3) Montrer que $\mathcal{B}' = ((1, 1), (2, -4))$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Notons $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Donner la matrice $\mathcal{M}(\text{Id}_{\mathbf{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{B}_{\text{can}})$.

Exercice 6 – Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$. Soit D_1 le sous-espace vectoriel $\text{Vect}((1, -1, 0))$ de $\mathbf{R}^3$ et D_2 le sous-espace vectoriel $\text{Vect}((1, 0, -1))$ de $\mathbf{R}^3$.

- 1) Montrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de H . Soit $s \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(H)$ la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 .
- 2) Quelle est la matrice de s relativement à la base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ de H ?
- 3) Soit $(x, y, z) \in H$ préciser $s(x, y, z)$.