Algèbre
Cours Fondements S2
Exercices Corrigés
Applications Linéaires

February 4, 2021

1 Applications linéaires

1.1 Enoncés

Exercice 1 – Nous considèrons l'application linéaire :

$$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2 \quad , \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) \quad .$$

1) Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^4$?
2) Déterminer le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective ?
3) Quelle est l'image de f ? L'application f est-elle surjective ?
4) Soit y_1 , y_2 deux réels, préciser un vecteur u de $\mathbf{R}^4$ tel que $f(u) = (y_1, y_2)$.

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Nous considèrons f l'application linéaire de E vers E telle que :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 \ , \ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \ , \ f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$$

1) Quelle est la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$? Si $u \in E$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$?
2) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$.
3) Déterminer le noyau et l'image de f.
4) Ces sous-espaces vectoriels de E sont-ils supplémentaires ?
5) Quelle est la matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$? En déduire $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$,$f^2(e_3)$.

Exercice 3 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Nous considèrons f l'application linéaire de E vers E de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Préciser $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Soit a un réel, déterminer à l'aide de la matrice M le vecteur $f(ae_1 + 17e_2)$.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.
3) Soit $u = 2e_1 - e_2$, $v = e_1 + e_2$. Montrer que (u, v) est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
4) Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 4 – Posons $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (1, 3)$.
1) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_2$.
2) Quelle est la matrice B de f dans la base (e_1, e_2) ?
3) Si $u \in \mathbf{R}^2$ a pour coordonnées (X_1, X_2) dans la base (e_1, e_2), quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base (e_1, e_2) ?
4) Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$?

Exercice 5 – Nous considèrons l'application $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \quad .$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ celle de $\mathbf{R}^3$.
1) Quelle est la matrice A de f dans ces bases canoniques ? Préciser $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$.
2) Donner une base échelonnée de $\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
3) En déduire la dimension de l'image de f, la surjectivité de f et la dimension du noyau de f.
4) Déterminer une base du noyau de f.

Exercice 6 – 1) Soit $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (1, 3)$. Exprimer u_1 et u_2 dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
2) Soit f l'application de matrice dans la base (e_1, e_2) : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$. Puis, la matrice B de f dans la base (u_1, u_2).
3) Qelles sont les matrices de passage de la base (e_1, e_2) à la base (u_1, u_2) et de la base (u_1, u_2) à la base (e_1, e_2). Quel est le lien entre A et B ?

Exercice 7 – Soit $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $u_1 = (1,4)$ et $u_2 = (1,3)$.
1) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ notée $\mathcal{B}'$.
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} .$$

2) Préciser les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Préciser f^2.
3) Préciser $f(u_1)$ et $f(u_2)$. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4) Préciser les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) ? Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant ces matrices de passage.
5) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont supplémentaires. Comparer f et la symétrie vectorielle s par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallélement à $\mathrm{Vect}(u_2)$.
6) Quelle est la matrice de projection vectorielle p sur $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallélement à $\mathrm{Vect}(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$, dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 8 – Désignons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Commencer par préciser les vecteurs e_1 et e_2.
1) Nous considèrons l'application linéaire f de $\mathbf{R}^2$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} .$$

Préciser les vecteurs $f(e_1)$,$f(e_2)$,$f(2,5)$,$f(1,3)$.
2) On pose $v_1 = (2,5)$ et $v_2 = (1,3)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Quelle est la matrice B de f dans cette base ?
3) Quelle est la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?
4) Ecrire la formule reliant A et B. Calculer P^{-1} et vérifier cette formule.
5) Déterminer que imf et kerf.

Exercice 9 – Nous considèrons les applications linéaires :

$$\begin{array}{rcrcl} f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 & : & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3) \\ g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 & : & (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1 + x_2, -x_2, 2x_1 - x_2) \end{array} .$$

1) Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$. Puis, déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
2) Calculer les matrices AB, BA, $(AB)^2$.
3) Montrer que AB est une matrice inversible. Préciser $(AB)^{-1}$.
4) Expliciter l'application $(f \circ g)^2$.

Exercice 10 – Notons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $\epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2$ et $\epsilon_2 = -e_1 + e_2$.

A1) Expliciter ϵ_1 et ϵ_2. Puis montrer que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
A2) Exprimer le vecteur e_1 (resp. e_2), comme combinaison linéaire des vecteurs ϵ_1, ϵ_2.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, l'application linéaire définie par $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$ et $f(\epsilon_2) = -\epsilon_2$.

A3) Préciser la matrice A de f dans la base (ϵ_1, ϵ_2). Calculer A^2. Que pouvez vous dire de $f \circ f$?
A4) Exprimer le vecteur $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$), comme combinaison linéaire des vecteurs de e_1, e_2. A5) En déduire B la matrice de f dans la base (e_1, e_2). Quelle est la valeur de la matrice B^2 ?

Soit D_1 la droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ engendrée par ϵ_1 et D_2 la droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ engendrée par ϵ_2.

B1) Donner une équation de la droite vectorielle D_1 (resp. D_2) de $\mathbf{R}^2$.
B2) Montrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
B3) Soit p la projection sur D_1 parallélement à D_2 et s la symétrie vectorielle sur D_1 parallélement à D_2. Expliciter pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, les deux couples de réels $p(x_1, x_2)$ et $s(x_1, x_2)$.

C1) Comparer f et s.

Exercice 11 – Nous considèrons le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

1) Les variables x_1, x_2, x_3, x_4 sont ordonnés naturellement. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué par les solutions du système $(*)$.
2) Résoudre le système $(*)$ et donner une base de F.
Soit $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (-1,0,1,2), v_3 = (1,2,3,4), v_4 = (-1,1,3,5)$. On désigne par G le sous-espace vectoriel $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ de $\mathbf{R}^4$ engendré par v_1, v_2, v_3, v_4.
3) A l'aide d'un algorithme du cours, donner une base de G échelonnée par rapport à la base canonique $\mathcal{B}_4$ de $\mathbf{R}^4$.
4) Déterminer alors, en suivant par exemple l'algorithme du cours, un système de 2 équations à 4 inconnues dont G est l'ensemble des solutions.
5) Montrer que (v_1, v_2) est une base de G. Préciser l'expression de v_3 et v_4 dans la base (v_1, v_2) de G (nous pourrons utiliser les calculs effectués dans la question 3).

Nous considèrons l'application linéaire f de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

6) Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ les images par f des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 de la base canonique $\mathcal{B}_4$ de $\mathbf{R}^4$. En déduire une base de Im f l'image de f.

7) Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, posons $(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Préciser l'expression de (y_1, y_2, y_3, y_4) à l'aide de (x_1, x_2, x_3, x_4).
8) Déterminer une base de $\ker f$ le noyau de f.
9) Montrer que l'intersection de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ est réduite au vecteur nul. En déduire que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

1.2 Corrections

Correction de l'exercice 1
1) Ecrivons les éléments de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^2$ en colonne.
Nous avons :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

2) Le noyau de f est par définition constitué des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbf{R}^4$ tels que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Cette équation équivaut à (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ce système a mêmes solutions que le système triangulé pour l'ordre naturel des variables :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Les variables libres de ce sytème triangulé sont x_3 et x_4. Nous obtenons en le résolvant :

$$\ker f = \{x_3(1,-2,1,0) + x_4(2,-3,0,1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous avons appliquer l'algorithme de résolution. Nous pouvons donc conclure que $\ker f$ admet pour base le couple de vecteurs de $\mathbf{R}^4$: $(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)$. L'espace vectoriel $\ker f$ est donc de dimension 2. Le noyau de f n'est par réduit au vecteur nul de $\mathbf{R}^4$. Donc f n'est pas injective.

3) La formule de dimension, nous apprends :

$$\dim \mathbf{R}^4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \quad .$$

Soit, $4 = \dim \operatorname{Im} f + 2$. Ainsi, l'espace vectoriel Imf est de dimension 2. Comme il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ qui est aussi de dimension 2, nous avons : $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$.
L'image de f coïncide avec $\mathbf{R}^2$ l'espace but de f. Donc, f est surjective.

4) De la surjectivité de f, il résulte que pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$, il existe $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ tels que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2)$. Fixons (y_1, y_2); les (x_1, x_2, x_3, x_4) qui conviennent sont les solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & y_2 \end{array} \right. \quad .$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & y_1 \\ & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & y_2 - y_1 \end{array} \right. \quad .$$

Les variables libres de ce sytème triangulé sont x_3 et x_4. Ces solutions décrivent l'ensemble :

$$S = \{(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0) + x_3(1,-2,1,0) + x_4(2,-3,0,1) \text{ tels que } x_3 \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous obtenons, si nous prenons $x_3 = x_4 = 0$, la solution particulière :

$$(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0)$$

Ainsi, nous avons montré que le quadruplet de réels $(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0)$ vérifie :

$$f(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0) = (y_1, y_2) \quad .$$

Correction de l'exercice 2

1) La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est une matrice carrée à trois lignes, ses colonnes sont respectivement les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Cette matrice est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice A donne les les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ces coordonnées sont :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

2) En particulier les coordonnées de $f(e_1 + 2e_2)$ sont :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(e_1 + 2e_2) = 5e_1 - e_2 + 5e_3$.

3) Considérons un vecteur $u \in E$ et notons (x_1, x_2, x_3) ses coordonées dans la base $\mathcal{B}$: $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Le vecteur u est dans $\ker f$ si et seulement si $f(u) = 0$. Donc, si et seulement si les coordonnées de $f(u)$ sont nulles, c'est à dire solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

ou encore au système triangulé (l'ordre des variables est l'ordre naturel) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

En résolvant ce système, nous trouvons que ses solutions sont :

$$S = \{x_3(-2,-1,1) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

S sont les coordonnées des vecteurs de $\ker f$ Ainsi :

$$\ker f = \{x_3(-2e_1 - e_2 + e_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Le noyau de f est donc un espace vectoriel de dimension 1 de base le vecteur non nul :

$$-2e_1 - e_2 + e_3 \quad .$$

Il résulte de la formule de dimension :

$$3 = \dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f + 1 \quad .$$

Ainsi, l'image de f est un espace vectoriel de dimension 2. D'après le cours, puisque (e_1, e_2, e_3) engendrent E, $\operatorname{Im} f$ est engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Déterminons une base de $\operatorname{Im} f$ echelonnée dans la base (e_1, e_2, e_3).

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(f(e_1), f(e_2)-2f(e_1), f(e_3)-4f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(\, f(e_1), f(e_2)-2f(e_1), f(e_3)-4f(e_1)-(f(e_2)-2f(e_1))\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, Imf admet le couple de vecteurs $(e_1+e_2+e_3, e_2)$ comme base echelonnée relativement à la base (e_1, e_2, e_3) de E.

Nous retrouvons de plus que $f(-2e_1 - e_2 + e_3) = 0$, c'est à dire que $-2e_1 - e_2 + e_3 \in \ker f$.

4) Pour toute application linéaire de source E :

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \quad .$$

Comme l'espace but de f est E (f est un endomorphisme), $\operatorname{Im} f$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. Pour démontrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces supplémentaires, il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.

Déterminons un systéme d'équations de $\operatorname{Im} f$ relativement à la base (e_1, e_2, e_3). Considérons un vecteur u de coordonées (x_1, x_2, x_3) dans la base (e_1, e_2, e_3). Considérons la matrice :

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1+e_2+e_3, e_3, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Suivons l'algorithme qui donne un système d'équations relativement à la base (e_1, e_2, e_3) de Imf qui est l'espace vectoriel engendré par $(e_1+e_2+e_3, e_2)$:

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1+e_2+e_3, e_2, u - x_1(e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1+e_2+e_3, e_3, u - x_1(e_1+e_2+e_3) - (x_2-x_1)e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $u \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) vérifient :

$$x_1 - x_3 = 0 \quad .$$

Il est facile maintenant de montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$. En effet si $u \in \ker f$, il existe un réel a tel que $u = a(-2e_1 - e_2 + e_3)$. Les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2, e_3) sont donc $(-2a, -a, a)$. Ce vecteur est dans Imf si et seulement si :

$$-2a - (-a) = 0 \quad .$$

Il vient $a = 0$, donc $u = 0$. Ainsi, $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

5) La matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ -3 & -3 & -9 \\ 3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$f^2(e_1) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3 \ , \ f^2(e_2) = 12e_1 - 3e_2 + 12e_3 \ , \ f^2(e_3) = 18e_1 - 9e_2 + 18e_3 \quad .$$

Correction de l'exercice 3

1) La matrice M est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ (noter que cela sous-entend que la base de départ est aussi la base d'arrivée). Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la première colonne de M, ainsi $(1, 1)$ sont donc les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$. De même, les coordonnées de

$f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la deuxième colonne de M et $(2,2)$ sont donc les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il en résulte :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = 2e_1 + 2e_2 \quad .$$

Les coordonnées de $ae_1 + 17e_2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(a, 17)$, il en résulte que les coordonnées de $f(ae_1 + 17e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+34 \\ a+34 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(ae_1 + 17e_2) = (a+34)e_1 + (a+34)e_2 = (a+34)(e_1+e_2) \quad .$$

2) Soit u de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur u est dans $\ker f$ si et seulement si $f(u) = 0$, donc si et seulement si les coordonnées de $f(u)$ sont nulles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Cela équivaut au fait que (x_1, x_2) soit solution de l'équation linéaire $x_1 + 2x_2 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\{x_2(-2,1) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\}$. Il en résulte :

$$\ker f = \{x_2(-2e_1 + e_2) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(-2e_1 + e_2) \quad .$$

Comme $-2e_1 + e_2$ est non nul, la famille réduite à ce vecteur est libre et $-2e_1 + e_2$ est une base de $\ker f$.
Le sous-espace vectoriel $\text{Im} f$ est engendré par les deux vecteurs $f(e_1), f(e_2)$. Ainsi :

$$\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) \quad .$$

Nous pouvons pour avancer utiliser trois méthodes. L'algorithme du cours qui dit :

$$M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Im} f = \text{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2)$$

$$M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2 - 2(e_1 + e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Im} f = \text{Vect}(e_1 + e_2, 0) = \text{Vect}(e_1 + e_2) \quad .$$

Comme $e_1 + e_2$ est non nul, la famille réduite à ce vecteur est libre et $e_1 + e_2$ est une base de $\mathrm{Im} f$. Deuxièmement, nous aurions pu aussi noter que $2e_1 + 2e_2 = 2(e_1 + e_2)$. Il est alors clair que

$$\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2) \quad .$$

Nous terminons alors comme au-dessus.

3) Comme E est de dimension 2, pour montrer que (u, v) est une base de E, il suffit de montrer que la matrice :

$$M_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Son déterminant est non nul, car égal à 3, d'où le résultat. Pour déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u, v)$, donnons deux méthodes :

a) Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2, -1)$, il en résulte que les coordonnées de $f(u)$ dans cette même base sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(u) = 0 = 0u + 0v \quad .$$

De même les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 1)$, il en résulte que les coordonnées de $f(v)$ dans cette même base sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(v) = 3e_1 + 3e_2 = 3(e_1 + e_2) = 3v = 0u + 3v \quad .$$

Par définition de la matrice de f dans la base (u, v), nous obtenons :

$$M(f, (u, v)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

b) La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse se déxtermine par le calcul du déterminant et de la comatrice. Nous obtenons :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous savons alors que la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par la formule :

$$B = P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

4) Nous avons toujours : $\dim E = \dim\ker f + \dim \mathrm{Im} f$. Pour montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires, il suffit alors de montrer $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$. Soit $u \in \mathrm{Im} f$, il existe alors $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda(e_1 + e_2)$. Si u appartient de plus à $\ker f$ ses coordonnées (λ, λ) dans la base $\mathcal{B}$ vérifient alors l'équation de $\ker f$. Nous en déduisons : $\lambda + 2\lambda = 0$. D'où $\lambda = 0$ et $u = 0$. Ainsi, $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

Correction de l'exercice 4

1) $\mathbf{R}^2$ est de dimension 2. (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

est inversible. C'est le cas puisque son déxterminant est non nul, car ?gal à 1.

2) La matrice de f dans la base (e_1, e_2) est par définition

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Soit (Y_1, Y_2) les coordonnées de $f(u)$ dans la base (e_1, e_2), on a :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ 2X_1 + 2X_2 \end{pmatrix} \quad .$$

4) La matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base (e_1, e_2) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

$$B = P^{-1}AP \quad ; \quad A = PBP^{-1} \quad .$$

Nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous trouvons $A = B$, pur hasard !

Correction de l'exercice 5

1) Nous observos que :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Les vecteurs cherchés ont pour coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ les colonnes de la matrice A. Ceux sont donc les colonnes de A.

$$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,2,1)\ ,\ f(e_2) = f(0,1,0,0) = (1,1,-1)$$

$$f(e_3) = f(0,0,1,0) = (1,-1,1)\ ,\ f(e_4) = f(0,0,0,1) = (1,1,-1)$$

2) Appliquons l'algorithme du cours, le point de départ est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons $u'_1 = f(e_1), u'_2 = f(e_2) - f(e_1), u'_3 = f(e_3) - f(e_1), u'_4 = f(e_4) - f(e_1)$, on a :

$$\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}\,(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \text{ et } A(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posons $u''_1 = u'_1, u''_2 = u'_2, u''_3 = u'_3 - 3u'_2, u''_4 = u'_4 - u'_2$, on a :

$$\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}\,(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \text{ et } A(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $u''_4 = 0$, on a $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}\,(u''_1, u''_2, u''_3)$. Comme les vecteurs u''_1, u''_2, u''_3 sont échelonnés par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^3$, (u''_1, u''_2, u''_3) est donc une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$.

3) L'image de f n'est autre que $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. Il en résulte que l'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3. Or, $\mathbf{R}^3$ lui même est de dimension 3, donc l'image de f est égal à $\mathbf{R}^3$ et f est surjective. Comme f est une application linéaire de source un espace vectoriel de dimension 4, nous avons :

$$4 = \dim\,(\ker f) + \dim\,(\mathrm{im}\, f)$$

Il en résulte que le noyau de f est de dimension 1. Le noyau de f est donc une droite vectorielle de $\mathbf{R}^4$.
4) L'algorithme donne $u_4'' = 0$, c'est à dire : $u_4' - u_2' = 0$, soit :

$$f(e_2) - f(e_1) - (f(e_4) - f(e_1)) = 0$$

Il vient $f(e_2) - f(e_4) = 0$, c'est à dire $f(e_2 - e_4) = 0$. Ainsi, $e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$ est un vecteur du noyau de f. Ce vecteur est non nul, c'est donc une famille libre à un élément de $\ker f$. Comme $\ker f$ est de dimension 1, $e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$ est une base de $\ker f$. Nous pouvons vérifier ce résultat en résolvant le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

dont les solutions sont justement les éléments du noyau de f.

Correction de l'exercice 6
1) Nous avons $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = e_1 + 3e_2$. La matrice

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2)}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

qui est inversible, car de déterminant non nul. Il en résulte que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
2) Les coordonnées de $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans la base (e_1, e_2) sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = e_1 + 3e_2 = u_2$. La matrice B de f dans la base (u_1, u_2) est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Soit P la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (u_1, u_2) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice de passage de la base (u_1, u_2) à la base (e_1, e_2) est la matroce :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Le lien entre A, B et P est :

$$B = P^{-1}AP \quad .$$

Cette identité peut donner une deuxième manière de calculer B.

Correction de l'exercice 7

1) La dimension de $\mathbf{R}^2$ comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel est 2. Pour montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit donc de montrer que la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}(u_1,u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible. C'est le cas, puisqu'elle est de déterminant -1.

Autre méthode : vu la dimension de $\mathbf{R}^2$, il suffit de montrer que la famille (u_1, u_2) est libre. soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au_1 + bu_2 = 0$. On obtient :

$$au_1 + bu_2 = a(1,4) + b(1,3) = (a + b, 4a + 3b) = (0,0)$$

Ainsi, (a, b) est solution du système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \quad .$$

Nous en déduisons $a = b = 0$. Cela prouve que (u_1, u_2) est une famille libre, donc une base de $\mathbf{R}^2$.

2) Puisque A est la matrice f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$: $f(e_1) = (-7, -24)$ et $f(e_2) = (2, 7)$. La matrice

de f^2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, f^2 et $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ ont la même matrice dans la base $\mathcal{B}$. Ces applications linéaires sont donc égales : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.
3) Les coordonnées de $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement?:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(u_1) = e_1 + 4e_2 = u_1$ et $f(u_2) = -e_1 - 3e_2 = -u_2$. La matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

4) La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}(u_1,u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $e_1 = 3u_1 + 4u_2$ et $e_2 = u_1 - u_2$. Nous peuvons retrouver ce résultat en résolvant le système linéaire vectoriel :

$$\begin{cases} e_1 & + & 4e_2 & = & u_1 \\ e_1 & + & 3e_2 & = & u_2 \end{cases} \quad .$$

Nous obtenons en le résolvant comme un système linéaire à coefficients réels : $e_2 = u_1 - u_2$ et $e_1 = 4u_2 - 3u_1$.
Les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) sont respectiveement $(-3, 4)$ et $(1, -1)$.
Nous avons :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

5) Comme $\dim \mathbf{R}^2 = 2 = \dim \mathrm{Vect}(u_1) + \dim \mathrm{Vect}(u_2)$, pour montrer que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont supplémentaires, il suffit de voir que $\mathbf{R}^2 = \mathrm{Vect}(u_1) + \mathrm{Vect}(u_2)$. Cela résulte du fait que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$. Par définition de la symétrie s : $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = -u_2$. Ainsi, f et s sont deux applications linéaires qui prennent les mêmes valeurs sur les vecteurs u_1, u_2 d'une base de $\mathbf{R}^2$. Elles sont donc égales : $f = s$ et f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_2)$.
6) Par définition de la projection p : $p(u_1) = u_1$ et $p(u_2) = 0$. Ainsi, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathcal{M}(p, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

D'autre part :

$$p(e_1) = p(4u_2 - 3u_1) = 4p(u_2) - 3p(u_1) = -3p(u_1) = (-3, -12) \quad ,$$
$$p(e_2) = p(u_1 - u_2) = p(u_1) = (1, 4) \quad .$$

Il en résulte :

$$\mathcal{M}(p, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous pourrions aussi utiliser les matrices de passage pour déduire cette matrice de la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$.

Correction de l'exercice 8
0) $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
1) Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base canonique sont données par la première colonne de A. Ainsi, $f(e_1) = 11e_1 + 30e_2 = (11, 30)$. De même, nous obtenons, $f(e_2) = (-4, -11)$. Le vecteur $(2, 5)$ de $\mathbf{R}^2$ a pour coordonées $(2, 5)$ dans la base canonique. Dans cette base, les coordonnées de $f(2, 5)$ sont donc :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(2, 5) = (2, 5)$. De même, ls coordonnées de $f(1, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(1,3) = -(1,3)$.
2) Comme $\mathbf{R}^2$ esr un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, pour montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit a, b deux réels, supposons :

$$av_1 + bv_2 = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 2a & + & b & = & 0 \\ 5a & + & 3b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Nous en déduisons : $a = b = 0$. Ainsi, la famille (v_1, v_2) est bien libre. Comme $f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2$ et $f(v_2) = -v_2 = 0v_1 + (-1)v_2$, la matrice B est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Par définition, cette matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Des équations entre vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2e_1 & + & 5e_2 & = & v_1 \\ e_1 & + & 3e_2 & = & v_2 \end{array} \right. \quad .$$

Nous déduisons : $e_1 = 3v_1 - 5v_2$ et $e_2 = -v_1 + 2v_2$. Il en résulte :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous pourrions calculer P^{-1} en calculant le déterminant et la comatrice de P.
4) La formule est $B = P^{-1}AP$. Le lecteur vérifiera (vraiment) que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

5) Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à kerf si et seulement si les coordonnées de $f(u)$ dans cette base sont nulles, donc si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_1 - 4x_2 \\ 30x_1 - 11x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 11x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ 30x_1 & - & 11x_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 11x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Le couple $(0, 0)$ est la seule solution de ce système. Ainsi, kerf $= \{0\}$ et f est injective. L'application linéaire f est un endomorphisme (linéaire avec même source et même but). Comme elle est injective, le cours nous apprends qu'elle est bijective, donc surjective. Ainsi, imf $= \mathbf{R}^2$.

Correction de l'exercice 9

1) Nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Nous trouvons :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} .$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21\mathrm{Id}_2 \quad .$$

3) Nous déduisons de la dernière égalité :

$$(AB)(\frac{1}{21}AB) = (\frac{1}{21}AB)AB = \frac{1}{21}(AB)^2 = \frac{1}{21}(21\,\mathrm{Id}_2) = \mathrm{Id}_2$$

Donc, la matrice AB est inversible et :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{21}(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 3/21 \\ 7/21 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

4) $(f \circ g)^2$ a pour matrice $(AB)^2$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Ainsi, $(f \circ g)^2$ et $21\,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ ont même matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Nous en déduisons $(f \circ g)^2 = 21\,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.

Correction de l'exercice 10

A1) Nous avons :

$$\epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2 = 3(1,0) - 2(0,1) = (3,-2) \quad .$$

De même :

$$\epsilon_2 = -e_1 + e_2 = -(1,0) + (0,1) = (-1,1) \quad .$$

Nous savons qu'une famille libre à deux éléments d'un espace vectoriel de dimension 2 est une base. Ainsi, pour montrer que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Pour ce faire, soit a, b deux réels tels que $a\epsilon_1 + b\epsilon_2 = 0$; il vient :

$$a(3,-2) + b(-1,1) = (0,0) \quad .$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3a - b & = & 0 \\ -2a + b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ajoutons les deux équations, on obtient : $a = 0$. D'où, $b = 0$. Cela montre que la famille (ϵ_1, ϵ_2) est une famille libre de $\mathbf{R}^2$.

A2) Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \epsilon_1 & = & 3e_1 - 2e_2 \\ \epsilon_2 & = & -e_1 + e_2 \end{array} \right. .$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \epsilon_1 & = & 3e_1 - 2e_2 \\ 2\epsilon_2 & = & -2e_1 + 2e_2 \end{array} \right. .$$

Soit en ajoutant : $e_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2$.
Nous avons également :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \epsilon_1 & = & 3e_1 - 2e_2 \\ 3\epsilon_2 & = & -3e_1 + 3e_2 \end{array} \right. .$$

Soit en ajoutant : $e_2 = \epsilon_1 + 3\epsilon_2$.

A3) Puisque $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$ et $f(\epsilon_2) = -\epsilon_2$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, nous obtenons :

$$A = \mathcal{M}(f, (\epsilon_1, \epsilon_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nous en déduisons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_2 .$$

Il en résulte que f^2 et $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ ont la même matrice dans la base (ϵ_1, ϵ_2). Ces applications linéaires sont donc égales : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.

A4) Nous avons :

$$f(e_1) = f(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) = f(\epsilon_1) + 2f(\epsilon_2) = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 3e_1 - 2e_2 - 2(-e_1 + e_2) = 5e_1 - 4e_2$$

De même :

$$f(e_2) = f(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) = f(\epsilon_1) + 3f(\epsilon_2) = \epsilon_1 - 3\epsilon_2 = 3e_1 - 2e_2 - 3(-e_1 + e_2) = 6e_1 - 5e_2$$

A5) Il en résulte :

$$B = \mathcal{M}(f, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous vérifions que $B^2 = \mathrm{Id}_2$.

B1) L'algorithme du cours montre que $y + \dfrac{3}{2}x = 0$ est une équation de D_1. De même, $y + x = 0$ est une équation de D_2.

B2) Comme la dimension de $\mathbf{R}^2$ est la somme des dimensions de D_1 et D_2, pour démontrer que D_1 et D_2 sont en somme directe, il suffit de montrer que $D_1 \cap D_2 = \{0\}$. Pour ce faire, soit $u = (x, y) \in D_1 \cap D_2$. Comme $u \in D_1$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = a(3, -2) = (3a, -2a)$. Comme $u \in D_2$: $3a - 2a = 0$. Soit $a = 0$ et $u = 0$. Ainsi :

$$\mathbf{R}^2 = D_1 \oplus D_2 \quad .$$

B3) Ainsi, tout $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ s'écrit de façon unique : $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in D_1$ et $u_2 \in D_2$. Traduisons que $u_1 \in D_1$: il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u_1 = a(3, -2) = (3a, -2a)$. Il vient $u_2 = (x - 3a, y + 2a)$. Traduisons que $u_2 \in D_2$: il vient $x - 3a + y + 2a = 0$. Soit, $a = x + y$. Ainsi :

$$u_1 = (x + y)(3, -2) = (3x + 3y, -2x - 2y) \quad ; \quad u_2 = (-2x - 3y, 2x + 3y)$$

Par définition de p et s :

$$p(x, y) = u_1 = (3x + 3y, -2x - 2y) \text{ et } s(x, y) = u_1 - u_2 = (5x + 6y, -4x - 5y) \; .$$

C1) La matrice de s dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi f et s ont même matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Nous avons donc $f = s$. Nous aurions pu remarquer aussi que la matrice de s dans la base (ϵ_1, ϵ_2) est la matrice A. Nous conclurions de même que $f = s$.

Correction de l'exercice 11

1) Les différentes étapes de l'algorithme de Gauss sont :

Etape 1 :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Etape 2 :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres sont x_3 et x_4.

2) Le système $(*)$ a mêmes solutions que le système triangulé précédent. Suivons la méthode du cours, les solutions s'expriment à l'aide des variables libres. La dernère équation donne :

$$x_2 = -x_3 - 2x_4 \quad .$$

En remplaçant dans la première équation, nous obtenons :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 = (-x_3 - 2x_4) - x_3 + x_4 = -2x_3 - x_4 \quad .$$

Ainsi, l'ensemble F des solutions de $(*)$ est :

$$\begin{array}{lcl} F & = & \{(-2x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \ ; \ x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \\ & = & \{x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(-1, -2, 0, 1) \ ; \ x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad . \end{array}$$

La famille $\mathcal{B} = ((-2, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1))$ est une base de F.

3) Partons de la matrice $M(v_1, v_2, v_3, v_4)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs v_i dans la base

canonique de $\mathbf{R}^4$:

$$M(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons $v'_2 = v_1 + v_2$, $v'_3 = v_3 - v_1$ et $v'_4 = v_1 + v_4$:

$$M(v_1, v'_2, v'_3, v'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous remarquons que $v''_3 = v'_3 - v'_2 = 0$ et $v''_4 = v'_4 - 2v'_2 = 0$. L'algorithme se termine :

$$M(v_1, v'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte que la famille (v_1, v'_2) est une base de G. Notons que $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $v'_2 = (0, 1, 2, 3)$. Nous observons que $v''_3 = v''_4 = 0$ se traduit par :

$$v_3 - 2v_1 - v_2 = 0 \quad \text{et} \quad v_4 - v_1 + 2v_2 = 0 \quad .$$

4) La famille (v_1, v'_2)étant échelonnée, pour obtenir un système d'équations de G, nous considèrons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et la matrice :

$$M(v_1, v'_2, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons $x' = x - x_1 v_1$:

$$M(v_1, v_2', x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 \\ 1 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons $x'' = x' - (x_2 - x_1)v_2' = x - x_1 v_1 - (x_2 - x_1)v_2'$:

$$M(v_1, v_2', x'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ 1 & 3 & x_4 - x_1 - 3(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \quad .$$

Un système d'équations de G est alors :

$$(**) \quad \begin{cases} x_3 - 2x_2 + x_1 - x_4 & = & 0 \\ x_4 + 2x_1 - 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

4) L'espace vectoriel G est de dimension 2, les vecteuts v_1 et v_2 sont dans G pour démontrer que (v_1, v_2) est une base de G, il suffit donc de montrer que (v_1, v_2) est une famile libre. Montrons cela. Soit a, b deux réels tels que $av_1 + bv_2 = 0$. Comme $av_1 + bv_2 = (a - b, a, a + b, a + 2b)$, il vient $a = 0$, puis $b = 0$.
5) Nous pourrons noter que d'après la question précédente :

$$v_3 = 2v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad v_4 = v_1 - 2v_2 \quad .$$

6) Les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ sont les colonnes de la matrice A. On constate ainsi que :

$$f(e_1) = v_1 \ , \ f(e_2) = v_2 \ , \ f(e_3) = v_3 \ , \ f(e_4) = v_4 \quad .$$

Comme $\mathrm{Im}\, f$ est l'espace vectoriel engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$, on obtient $\mathrm{Im}\, f = G$. Il résulte alors de la question 4 que (v_1, v_2) est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

7) Par définition de A, si $(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 & = & x_1 + 2x_3 + x_4 \\ y_3 & = & x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ y_4 & = & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \quad . \end{array} \right.$$

8) Nous constatons que le noyau de f est constitué des solutions du système $(*)$. D'après la question 2, la famille $\mathcal{B} = ((-2, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1))$ est une base de ker f.
9) L'application f étant linéaire de source $\mathbf{R}^4$, nous savons :

$$\dim \mathbf{R}^4 = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f \quad .$$

Pour démontrer que ker f et Im f sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$. Soit $u \in \ker f$, il existe alors deux réels a et b tels que :

$$u = a(-2, -1, 1, 0) + b(-1, -2, 0, 1) = (-2a - b, -a - 2b, a, b) \quad .$$

Si $u \in \mathrm{Im}\, f$, il vérifie les équations de Im f et on a :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a - 2(-a - 2b) + (-2a - b) & = & 0 \\ b + 2(-2a - b) - 3(-a - 2b) & = & 0 \quad . \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 3b & = & 0 \\ -a + 5b & = & 0 \quad . \end{array} \right.$$

Nous en déduisons $a = b = 0$. Ainsi, $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ et finalement :

$$\mathbf{R}^4 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f \quad .$$