Cours de Fondements Mathématiques II

Primitives et Calcul Intégral - TD 1

Exercice 1 – 1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$f(x) = x^7 - \frac{1}{2}.x + 2$$

Donner les primitives de f et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$.
2) Un mouvement sur une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$ se fait à accélération constante d'une valeur de $-9,8\, m/s^{-2}$. A l'instant initial, sa vitesse est de $7\, m/s$ et il est au point d'abscisse $1220\, m$. Quelle est la loi de son mouvement ?
3) Donner la courbe représentative de la fonction polynomiale $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = 1 - x^4$. Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Représenter la surface des points dont les coordonnées varient dans l'ensemble

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x^4\right\}.$$

Quelle est l'aire de cette surface ?

Exercice 2 – Soit $a < b$ deux réels et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x)$. Nous supposons que d'une part f admet sur $]a, b[$ une primitive et d'autre part que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.
1) Montrer que les primitives de f sur $]a, b[$ sont des fonctions croissantes sur $]a, b[$.
2) Quel est en fonction de la position de $x, y \in]a, b[$ le signe de $\displaystyle\int_{x}^{y} f(t)dt$?

Exercice 3 –
1) Montrer que pour tour tout x réel, $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x + 3)(x + 1)^2 + 1$.
2) En déduire les primitives de

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R} \quad , \quad x \longmapsto f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{(x + 1)^2} .$$

et

$$g :]-\infty, -1[\to \mathbf{R} \quad , \quad x \longmapsto g(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{(x + 1)^2} .$$

Exercice 4 – Sur chacun des intervalles où elle est définie donner une primitive de

$$f(x) = \frac{x}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{3}{x - 3} - \frac{2}{x - 2} .$$

Exercice 5 – (primitives de f et de $f(ax+b)$)
1) Soit a un réel fixé. Rappeler les primitives sur $\mathbf{R}$ des fonctions usuelles : e^x, puis a^x et $\dfrac{1}{x^2+1}$. Rappeler les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction x^a.
2) A partir de ces primitives, donner les primitives des applications suivantes :

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_1(x) = e^{-2x-3}\ ,$$

$$f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_2(x) = 7^{-2x-3}\ ,$$

$$f_3 :]-\frac{4}{3},+\infty[\to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_3(x) = -\frac{5}{(3x+4)^2}\ ,$$

$$f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_4(x) = \frac{1}{x^2+2}\ .$$

$$f_5 :]-\infty,\frac{4}{3}[\to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_5(x) = \sqrt{3x-4}\ \ .$$

$$f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_6(x) = -\frac{1}{3x^2+5}\ ,$$

Exercice 6 – (intégration par parties) Donner les primitives de

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f(x) = (x^2-x+2)e^x\ ,$$

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto g(x) = (2x-3)e^{-5x+2}\ ,$$

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto h(x) = (5x-7)\sin(4x+1)\ ,$$

$$m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto m(x) = (\sin x)^2\ ,$$

$$u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto u(x) = \sin x\, e^x \text{ et } v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto v(x) = \cos x\, e^x\ .$$

Exercice 7 – (intégration par parties)
1) Soit $\alpha \neq -1$ un réel, donner en fonction des valeurs de α les primitives de

$$f_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto f_\alpha(x) = x^\alpha ln\, x\ .$$

2) Soit $\alpha \neq -1$ un réel, donner en fonction des valeurs de α les primitives de

$$g_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto g_\alpha(x) = x^\alpha (ln\, x)^2\ .$$

Exercice 8 – Soit n un entier naturel. Nous posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}dt$.
1) Calculer I_0 et I_1.
2) Montrer que pour tout entier n non nul : $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Exercice 9 – Pour tout entier n, nous posons :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt \ .$$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ .$$

3) En déduire pour tout entier k les formules :

$$I_{2k} = \pi \frac{(2k)\,!}{2^{2k+1}(k\,!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k\,!)^2}{(2k+1)\,!} \ .$$