

Cours de Fondements Mathématiques II

Primitives et Calcul Intégral - TD 2

Exercice 1 – (type u'f(u) : qui est u' , qui est f ?)

1) Donner les primitives de

$$f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f_1(x) = \sin x (\cos x)^{17},$$

2) Donner les primitives de

$$f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f_2(x) = ((\sin x)^2 - 3(\sin x) + 8) \cos x,$$

Donner la primitive F_2 de f_2 nulle en $\frac{3\pi}{2}$.

3) Sur quelles intervalles la fonction rationnelle $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ est-elle définie ? Déterminer alors :

$$\int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+t-3} dt.$$

4) Donner les primitives de

$$f_3 :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f_3(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{17}},$$

5) Donner les primitives de

$$f_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f_4(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 17}},$$

Exercice 2 – Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

1) Pourquoi la fonction rationnelle $\frac{1}{1+x^n}$ est-elle définie pour $x > -1$. Donner alors les primitives de

$$f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^n},$$

2) En déduire en fonction d'une primitive de $\ln(1+x^n)$ les primitives de

$$g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto g(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

3) Considérons la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Montrer que (I_n) tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

4) Etablir ensuite que $nI_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

Exercice 3 – Nous nous proposons de calculer $F(x) = \int \cos(\sqrt{t})dt$ une primitive sur $]0, +\infty[$ de $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ en utilisant le changement de variables :

$$\psi :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[; t \longmapsto u = \psi(t) = \sqrt{t} .$$

- 1) Préciser $g(u)$ quand $g(u) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{\psi'(t)}$ et $u = \sqrt{t}$.
- 2) Calculer une primitive de $g(u)$. Puis exprimer F à l'aide de cette primitive de g .
- 3) Retrouver ce résultat en remarquant que pour $x \in]0, +\infty[$, nous avons

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) .$$

Exercice 4 – Nous nous proposons de calculer $F(x) = \int \frac{1}{2 + \cos t} dt$ une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ sur $] -\pi, +\pi[$ en utilisant le changement de variables :

$$\psi :] -\pi, +\pi[\longrightarrow] -\infty, +\infty[; t \longmapsto u = \psi(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) .$$

- 1) Expliquer pourquoi ψ est un "bon" changement de variables.
- 2) Montrer que pour $t \in] -\pi, +\pi[$ et $u = \psi(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} ; \sin t = \frac{2u}{1 + u^2} ; \psi'(t) = \frac{1}{2}(1 + u^2) .$$

- 3) Préciser $g(u)$ quand $g(u) = \frac{f(t)}{\psi'(t)}$ et $u = \psi(t)$.
- 4) Calculer une primitive de $g(u)$. Puis exprimer F à l'aide de cette primitive de g .

Exercice 5 – 1) Ecrire la formule Taylor avec reste intégral de la fonction $\sin x$ en zéro à l'ordre 3.

2) Soit x réel non nul fixé, nous posons:

$$R(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) dt .$$

A l'aide du changement de variable :

$$\psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} ; t \longmapsto u = \psi(t) = \frac{t}{x}$$

montrer que

$$R(x) = \frac{x^4}{3!} \int_0^1 (1-u)^3 \sin(ux) du .$$

- 3) Montrer que la limite quand x tend vers zéro de $x \int_0^1 (1-u)^3 \sin(ux) du$ est nulle.