Examen du 28 juin 2019

Partie analyse

Exercice 1

a) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

b) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $] -\infty, 1[$.

Solution 1

a) La fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$ car

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$$

b) La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $] -\infty, 1[$ car

$$\forall x \in] -\infty, 1[\quad (\ln(1-x))' = \frac{1}{x-1}$$

Exercice 2 Calculer $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$.

Solution 2 Écrivons f sous la forme $f(x) = u'(x)v(x)$ où $u: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $v: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$. On a $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $u'(x) = x^2$ et la formule d'intégration par parties assure que

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx = \int_1^e u'(x)v(x) dx$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_1^e u'(x)v(x) dx &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x) dx \\ &= \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3} \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx \\ &= \frac{e^3 \ln(e)}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3 \ln(e)}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(e^3 \ln(e) - \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Exercice 3 Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(x) \sin^2(x)$ en utilisant le changement de variable $u = \sin(x)$.

Solution 3 Si $u = \sin(x)$ alors $du = \cos(x) dx$. On a

$$\int \cos(x) \sin^2(x) dx = \int u^2 du.$$

Or une primitive de $u \mapsto u^2$ est $u \mapsto \frac{u^3}{3}$ donc une primitive de $x \mapsto \cos(x) \sin^2(x)$ est $\frac{x^3}{3}$.

Exercice 4

a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.

b) En déduire pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp(y)$.

Solution 4

a) On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}_0(x^3)$.

b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)$ d'où d'après a)

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \sim_{+\infty} \exp\left(n \times \frac{y}{n}\right) = \exp(y)$$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp(y)$.