Développements limités - TD 1

Exercice 1 – Soit $a < b$ deux réels. Notons $I =]a, b[$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La fonction f a donc un D.L. en x_0 à l'ordre 1. Rappeler l'écriture du D.L. de f en x_0 à l'ordre 1.

1) En quels points la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$ est-elle dérivable ? Donner le D.L. en $x_0 = 0$ et $x_0 = 5$ de f à l'ordre 1.

2) Donner le D.L. en $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $x_0 = \frac{\pi}{2}$ de $\sin x$ à l'ordre 1.

3) Soit $g :]-1, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \int_0^x \ln(1+t) dt$. Donner le D.L. en $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$ de la fonction $g(x)$ à l'ordre 1.

Exercice 2 – Soit $a < 0 < b$ deux réels. Notons $I =]a, b[$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$. Nous supposons que f admet le D.L. en 0 d'ordre 5 :

$$f(x) = -2x^2 + 3x^3 - 17x^5 + \epsilon(x)x^5 \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

1) Préciser $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Préciser le D.L. en 0 d'ordre 2 de f .

2) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel pour tout $x \neq 0$ vérifiant $-\alpha < x < \alpha$, $f(x)$ soit strictement négative et donc en particulier non nulle.

3) Donner le D.L. en 0 d'ordre 2 de $e^x - \sin x - \cos x$. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{f(x)}.$$

4) Que dire du signe de $f(x) + 2x^2$ sur un intervalle de nombres réels $]-\beta, \beta[$ pour $\beta > 0$ réel assez petit ?

Exercice 3 – 1) Donner le D.L. de e^x en $x = 2$ d'ordre 4. On donnera une solution qui utilise la formule de Taylor-Young et une autre qui utilise le D.L. de e^x en $x = 0$ et une propriété de la fonction exponentielle.

2) Donner le D.L. de $2x^3 - x^4$ en $x = 2$ d'ordre 2.

3) Donner le D.L. de $\sin x$ en $x = \frac{\pi}{3}$ d'ordre 4.

Exercice 4 – Nous considérons :

$$h :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto h(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2(1+x)^{\frac{1}{3}} - 2(1-x)^{\frac{1}{3}}.$$

1) Donner le D.L. de h en 0 d'ordre 2.

2) En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2(1+x)^{\frac{1}{3}} - 2(1-x)^{\frac{1}{3}}}{x^2 + x^3}.$$