

Cours de Fondements Mathématiques II

Développements limités - TD 2

Exercice 1 – (D.L. d'un produit de fonctions)

- 1) Donner les D.L. à l'ordre 3 en zéro des fonctions suivantes : $e^x \cos x$, $e^x \sin x$, $(\cos x)\sqrt{1+x}$, $(x^3+1)\sqrt{1-x}$.
- 2) Donner le D.L. à l'ordre 4 en zéro de la fonction suivante : $\ln(1+x) \cos x$.
- 3) Donner le D.L. à l'ordre 9 en zéro de la fonction suivante :

$$(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2)(\sin x - x) .$$

Exercice 2 – (D.L. d'un quotient)

- 1) Ecrire la division en puissance croissante de x à l'ordre 3 de $x^3 - 2x^2 + x - 2$ par $x^2 - x - 1$. En déduire le D.L. en 0 d'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 1} .$$

- 2) Ecrire la division en puissance croissante de x à l'ordre 2 de $-\frac{1}{6}x^3 + x - 1$ par $-\frac{1}{2}x^2 + 2$. En déduire le D.L. en 0 d'ordre 2 de

$$g(x) = \frac{(\sin x) - 1}{(\cos x) + 1} .$$

- 3) Donner le D.L. en 0 d'ordre 3 des fonctions :

$$u(x) = \frac{e^x}{\cos x} \quad , \quad u(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x} .$$

Exercice 3 – (D.L. de composées élémentaires comme $f(ax)$ et $f(x^k)$)

- 1) Calculer le D.L. de $(\sin x)(1 - \cos 2x)$ en 0 à l'ordre 6.
- 2) Donner le D.L. de $\sqrt{2+3x}$ en 0 à l'ordre 3.
- 3) Donner le D.L. de e^{x^2} en 0 à l'ordre 4, puis de 5^{3x^2} .
- 4) Donner le D.L. de $\ln(1+3x)$ à l'ordre 3 en $x=1$.
- 5) Donner par plusieurs méthodes le D.L. en 0 d'ordre 2 de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{2+x^2} .$$

Exercice 4 – (D.L. de composées)

- 1) Donner l'expression du D.L. d'ordre 3 en 0 des applications :

$$f(x) = e^{\sin x} \quad , \quad g(x) = \sin(\ln(1+x)) .$$

- 2) Donner l'expression du D.L. d'ordre 5 en 0 des applications :

$$u(x) = \sin(x^3 + x^4) \quad , \quad v(x) = \cos((\sin x) - x) .$$

Exercice 5 – (D.L. d'une primitive et d'une dérivée)

- 1) Donner le D.L. en 0 d'ordre n de $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Retrouver à partir de ce D.L. les D.L d'ordre $n-1$ et $n+1$ de $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $h(x) = \ln(1-x)$.
- 2) Donner l'expression du D.L. d'ordre 6 en 0 des applications :

$$u(x) = \int_0^x 3^{t^2} dt \quad , \quad v(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt .$$

Exercice 6 – Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2} \sin^2(x)}{3x^2 \sin^2(x)} .$$

Exercice 7 – (Position relative de deux courbes représentatives)

- 1) Donner les équations de la tangente en 0 à la courbe représentative de e^x . Préciser alors la position relative de la courbe représentative de la fonction exponentielle en $x=0$ par rapport à sa tangente.
- 2) Même question avec la courbe représentative de $x - \sin x$.
- 3) Que dire en 0 de la position relative des courbes représentatives de e^x et $\frac{1}{2}x^2 + x + 1$?