

Algèbre
Cours Fondements S2
Chapitre 3
Espace Vectoriel
Janvier 2021

January 5, 2021

Contents

1	Espaces vectoriels	4
1.1	Introduction	4
1.2	Définition, exemples	5
1.3	Sous-espaces vectoriels	7
1.4	Famille libre, famille génératrice et base	10
1.5	Coordonnées d'un vecteur dans une base	13
1.6	Dimension d'un K -espace vectoriel	15
1.7	Décider si une famille de vecteurs est libre	19
1.8	Décider si une famille de vecteurs est une base	20
1.9	Coordonnées d'un vecteur dans des bases différentes	23

1 Espaces vectoriels

1.1 Introduction

Un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi d'addition qui permet d'ajouter deux éléments de E (appelés vecteurs) et d'une multiplication qui permet de multiplier un élément de E par un élément de $\mathbf{K}$ (appelé scalaire). Autrement dit, un espace vectoriel est un espace dans lequel on peut faire des combinaisons linéaires d'éléments de E : si $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$ a un sens et appelé une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Une famille $u_1, \dots, u_p$ de vecteurs de E est dite libre, si la seule combinaison linéaire nulle de $u_1, \dots, u_p$ est la combinaison $0u_1 + \dots + 0u_p$. Elle est dite génératrice, si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$. La famille $u_1, \dots, u_p$ est une base, si c'est une famille libre et génératrice. Dans ce cas, tout vecteur u de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la famille formée de la base $(u_1, \dots, u_p)$. Les coefficients de cette combinaison sont alors appelés les coordonnées du vecteur u dans la base $(u_1, \dots, u_p)$.

Supposons qu'un espace vectoriel E possède une base de n éléments. Fort de notre savoir sur la résolution des systèmes linéaires homogènes, nous montrons qu'une famille libre a n ou moins de n vecteurs. Il en résulte que toute base de E a le même nombre d'éléments appelé la dimension de E .

Objectif

- Connaître les définitions de base de la théorie : $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, vecteur nul, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage ...
- Soit E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni d'une base, considérons une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base : Savoir décider si cette famille est libre ou si c'est une base de E .
- Savoir déterminer une base des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes en suivant

l'algorithme de résolution.

- Soit E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, nous supposons que les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Nous demandons de savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ l'aide de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et inversement.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. ou plus généralement ce que les mathématiciens appellent un corps commutatif.

1.2 Définition, exemples

Définition 1.2.1 *Un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E est la donnée d'un ensemble E muni de deux lois :*

- *une loi interne dite d'addition et notée $+$, qui à tout couple $u, v \in E$ associe un vecteur noté $u + v$,*
- *une loi externe dite de multiplication par un scalaire et notée multiplicativement qui à tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $u \in E$ associe un vecteur noté λu .*

Nous demandons que ces deux lois vérifient les conditions a, b, c suivantes :

a) *L'addition est une loi de groupe commutatif, c'est à dire vérifie les quatre propriétés suivantes :*

- i) *Associativité : $\forall u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$. Cet élément est alors noté $u + v + w$.*
- ii) *Existence d'un élément neutre qui est alors unique noté $0_E \in E$ (ou $\vec{0}$, ou encore 0), appelé le vecteur nul de E et caractérisé par : pour tout $u \in E$, $u + 0 = 0 + u = u$.*
- iii) *Existence d'un opposé à tout élément $u \in E$ qui est alors unique noté $-u \in E$ caractérisé par : $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$.*
- iv) *Commutativité : $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$.*

b) La loi externe vérifie pour tout $u \in E$ et $\lambda, \mu \in K$: $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ et $1u = u$ où 1 est le neutre de la multiplication de K .

c) Les deux lois vérifient entre elles pour tout $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in K$:

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v .$$

Les éléments d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E sont appelés vecteurs de E et les éléments du corps $\mathbf{K}$ sont appelés scalaires.

Notons que pour tout $u \in E$: $0u = 0_E$. En effet $(0+0)u = 0u + 0u$, donc $0u = 0u + 0u$. En ajoutant l'opposé de $0u$ des deux cotés de cette égalité, il vient bien $0u = 0_E$.

Si E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et u, v deux vecteurs de E , nous notons $u - v = u + (-v)$.

Exemples Nous avons déjà rencontré de nombreux espaces vectoriels :

1) $\mathbf{K}$ lui même muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

2) L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n -uplets d'éléments de $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel pour ses opérations d'addition et de multiplication par un élément de $\mathbf{K}$:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) .$$

3) L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel pour ses opérations d'addition et de multiplication par un élément de $\mathbf{K}$:

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \quad \text{et} \quad \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}) .$$

3) Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un vecteur de $\mathcal{P}$ est la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur. A deux points $A, B \in \mathcal{P}$, nous associons le vecteur $\vec{AB}$. Nous convenons que

les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux si $ABDC$ est un parallélogramme. Nous savons ajouter deux vecteurs suivant la loi de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Nous savons multiplier un vecteur de $\mathcal{P}$ par un réel. L'ensemble des vecteurs d'un plan géométrique est muni de ces opérations un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Nous désignerons par $\vec{\mathcal{P}}$ les vecteurs de $\mathcal{P}$. Considérons l'application : $\vec{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{P}$; $\vec{u} \mapsto M$ le point défini par $\vec{OM} = \vec{u}$. Cette application est une bijection et identifie les vecteurs de $\mathcal{P}$ et ses points. Si $\vec{OM} = \vec{u}$, nous dirons que le point M représente le vecteur $\vec{u}$.

3) Considérons l'ensemble des nombres réels muni de son addition naturelle et de la multiplication par un nombre rationnel. Muni de ces opérations, $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.1 *Un sous-ensemble non vide F d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E est appelé sous-espace vectoriel de E si F est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire, c'est à dire si :*

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K} : u + v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F.$$

Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel de E , nous avons dans F une addition et une multiplication par un scalaire. Le lecteur vérifiera que ces opérations vérifient les conditions a, b et c de la définition 1.2.1. Munis de ces opérations déduites de celles de E , F est ainsi un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Il résulte de la définition 1.3.1 que tout sous-espace vectoriel F de E contient 0_E le vecteur nul de E qui est donc le vecteur nul de tous ses sous-espaces vectoriels. Nous noterons également que si $u \in F$, où F est un sous-espace vectoriel F de E , l'opposé $-u = (-1)u$ de u dans E appartient à F et est aussi son opposé dans F .

L'ensemble $\{0_E\}$ réduit au zéro de E est un sous-espace vectoriel de E . L'ensemble E tout entier est également un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1.3.2 *L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .*

Preuve : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Tout d'abord $0_E \in F_1$, car F_1 est un sous-espace vectoriel de E . De même, $0_E \in F_2$. Ainsi, $0_E \in F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ est donc non vide. Soit $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. En particulier, u et v sont deux éléments de F_1 . Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E : $u + v \in F_1$ et $\lambda u \in F_1$. De même, $u + v \in F_2$ et $\lambda u \in F_2$. Ainsi, $u + v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda u \in F_1 \cap F_2$. Cela montre que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1.3.3 *Les solutions d'un système de p équations linéaires homogènes (c.a.d. sans second membres) à n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.*

Preuve : Commençons par montrer que les solutions d'une seule équation linéaire homogène à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$, désignons par F le sous-ensemble de $\mathbf{K}^n$ constitué des solutions de l'équation linéaire :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \quad .$$

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Tout d'abord, F est non vide puisqu'il contient $0 = (0, 0, \dots, 0)$ le vecteur nul de $\mathbf{K}^n$. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, x_2, \dots, y_n)$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ainsi :

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \text{et} \quad a_1y_1 + a_2x_2 + \dots + a_ny_n = 0 \quad .$$

Il résulte de * que :

$$\begin{aligned} a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \dots + a_n(x_n + y_n) &= (a_1x_1 + a_1y_1) + (a_2x_2 + a_2y_2) + \dots + (a_nx_n + a_ny_n) \\ &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n) \\ &= 0 + 0 = 0 \quad . \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + \dots + a_n(\lambda x_n) &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) \\ &= \lambda 0 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad .$$

Nous avons ainsi montré que $x + y$ et λx sont des éléments de F . Donc, F un un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

Traitons maintenant le cas d'un système d'équations linéaires homogènes. L'ensemble des solutions d'un tel système est l'intersection des solutions de chaque équation de ce système. Chacune de ces équations est homogène. Ses solutions forment suivant la première partie de la preuve un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. L'ensemble des solutions de notre système d'équations linéaires homogènes est donc une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Suivant la proposition 1.3.2, cet ensemble est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

Définition 1.3.4 Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$. Le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$ est appelé une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_p$. On note $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Proposition 1.3.5 Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit $u_1, \dots, u_p \in E$, alors $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient chacun des vecteurs u_i . L'ensemble $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est appelé le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_p$.

Preuve : Nous avons $0_E = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_p$. Donc, $0_E \in Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ qui est donc non vide. Soit $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ et $w = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p$ où $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{K}$ deux combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_p$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} v + w &= (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) + (\mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p) = (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + \dots + (\lambda_p + \mu_p)u_p \\ \lambda v &= \lambda(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) = (\lambda\lambda_1)u_1 + \dots + (\lambda\lambda_p)u_p \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, $v + w$ et λv sont des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \dots, u_p$. On a ainsi montré que $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est non vide et stable par addition et multiplication par un scalaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E .

Nous avons $u_i = 0u_1 + \dots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \dots + 0u_p$. Cela montre que chaque u_i est un élément de $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Remarque 1.3.6 Nous noterons en particulier que si $u_1, \dots, u_p$ appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E , toute combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$ est un vecteur de F . Ainsi, $\text{vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de F . A ce propos, nous pouvons noter qu'un sous-espace vectoriel d'un sous-espace vectoriel F de E n'est autre qu'un sous-espace vectoriel de E contenu dans F .

1.4 Famille libre, famille génératrice et base

Définition 1.4.1 Soit $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E .

a) Nous disons que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille génératrice de E , si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$. Autrement dit, si $E = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ ou encore si pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tel que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p \quad .$$

b) Nous disons que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est libre, si pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0 \quad .$$

c) Nous disons que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de E , si cette famille est libre et génératrice.

Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ non libre est aussi dite liée. Une telle famille est caractérisée par l'existence d'une "relation non triviale", c'est à dire d'éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \quad .$$

Exemple de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ Les vecteurs :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) , \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) , \quad \dots , \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

de $\mathbf{K}^n$ forment une base du $\mathbf{K}$ -espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Preuve : Montrons tout d'abord que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. nous avons :

$$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n .$$

Ainsi, le vecteur x est bien dans $Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et la famille $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$. Montrons maintenant que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}$ tels que $x_1e_1 + \dots + x_ne_n = 0_{\mathbf{K}^n}$. Nous avons donc :

$$x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0) .$$

Comme $x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1) = (x_1, \dots, x_n)$, nous en déduisons :

$$(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) .$$

Ainsi, chaque x_i est nul. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc libre.

Remarque 1.4.2 *Une famille réduite à un vecteur non nul est libre. Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul n'est jamais libre.*

Preuve (exemple de raisonnement par l'absurde) : Soit u un vecteur non nul d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est non nul et vérifie $\lambda u = 0_E$. Multiplions cette identité par $1/\lambda$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\lambda}\lambda u = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E$$

D'où $u = 0_E$: contradiction. Donc $\lambda \in \mathbf{K}$ avec $\lambda u = 0_E$ implique $\lambda = 0$. La famille réduite au vecteur u est donc libre.

Soit $v_1, \dots, v_p$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Supposons par exemple que le k -ième vecteur v_k de cette famille soit nul. Nous avons la relation :

$$0v_1 + \dots + 0v_{k-1} + 1v_k + 0v_{k+1} + \dots + 0v_p = 0_E .$$

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ n'est donc pas libre.

Proposition 1.4.3 *L'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$ fournit une base de l'espace vectoriel de ses solutions.*

Preuve : Considérons un système d'équations linéaires homogènes E de p équations à n variables $(x_1, \dots, x_n)$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. Suivant la proposition 1.3.3 les solutions F de ce système forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Un tel système d'équations linéaires homogènes a au moins $(0, \dots, 0)$ comme solution. L'algorithme de Gauss détermine alors un système d'équations linéaires homogènes triangulé E' ayant les mêmes solutions. Soit I l'ensemble des indices des variables libres de E' . L'algorithme de résolution d'un système triangulé nous donne les solutions de E sous la forme

$$F = \left\{ \sum_{i \in I} x_i (u_{i,1}, \dots, u_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0) \text{ tels que } \forall i \in I : x_i \in \mathbf{K} \right\} .$$

Pour $i \in I$, posons $v_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0)$. Prenons dans F , le réel $x_i = 1$ pour $i \in I$ et $x_j = 0$ pour $j \in I - \{i\}$. Nous obtenons $v_i \in F$. L'expression de F se traduit exactement par :

$$F = Vect(v_i)_{i \in I} .$$

La famille $(v_i)_{i \in I}$ est donc une famille génératrice de F . Cette famille est libre. En effet, si

$$\sum_{i \in I} x_i v_i = 0 .$$

Pour $i \in I$, le i -ème coefficient du terme de gauche étant x_i , nous obtenons $x_i = 0$. Donc, pour tout $i \in I$, $x_i = 0$ et la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre. Elle forme donc une base de F .

Illustrons cette proposition sur l'exemple suivant :

Exemple Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions du système d'équations linéaires homogènes à coefficients réels :

$$(E) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 18x_4 = 0 & (E_2) \end{cases} .$$

Les variables sont x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement. Les deux équations de (E) sont d'ordre 1. Le système (E) est donc ordonné. Faisons tourner l'algorithme de triangulation. Le système (E) a mêmes solutions que le système :

$$(E') \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_3 + 17x_4 = 0 & (E'_2 = E_2 - E_1) \end{cases} .$$

Ce système est triangulé car $1 = v(E_1) < v(E'_2) = 3$. Les variables libres de (E') sont donc x_2 et x_4 . Résolvons (E') . La dernière équation donne : $x_3 = -17x_4$. En remplaçant dans la première, on obtient : $x_1 = -x_2 + 16x_4$. Ainsi, nous obtenons l'ensemble F des solutions de (E) :

$$\begin{aligned} F &= \{(-x_2 + 16x_4, x_2, -17x_4, x_4) \text{ tels que } x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \\ &= \{x_2(-1, 1, 0, 0) + x_4(16, 0, -17, 1) \text{ tels que } x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} . \end{aligned}$$

En prenant $x_2 = 1$ et $x_4 = 0$, nous obtenons $(-1, 1, 0, 0) \in F$ et en prenant $x_2 = 0$ et $x_4 = 1$, nous obtenons $(16, 0, -17, 1) \in F$. Ainsi, $F = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (16, 0, -17, 1))$. La famille $((-1, 1, 0, 0), (16, 0, -17, 1))$ est libre. En effet, si

$$x_2(-1, 1, 0, 0) + x_4(16, 0, -17, 1) = (-x_2 + 16x_4, x_2, -17x_4, x_4) = 0 ,$$

c'est que $x_2 = x_4 = 0$. La famille $(-1, 1, 0, 0), (16, 0, -17, 1)$ génératrice de F et libre est donc une base de F .

1.5 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $u \in E$. Comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est donc une famille génératrice de E , il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Nous allons montrer que cette famille de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est unique. Pour ce faire, soit $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ une deuxième famille de scalaires telle que $u = \lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_n e_n$. Par différence, nous obtenons :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n = 0 .$$

Comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, il en résulte :

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = 0 \quad \dots, \quad \lambda_n - \lambda'_n = 0 .$$

D'où, $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$.

Définition 1.5.1 (*coordonnées d'un vecteur dans une base*) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Tout vecteur u de E s'écrit alors de façon unique $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ où $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}$. Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ s'appellent les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Le scalaire x_i est appelé la i -ème coordonnée de u dans la base $\mathcal{B}$. Le n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est appelé le n -uplet des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ ou plus simplement les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Si E possède une base $\mathcal{B}$ de n éléments, notons que deux vecteurs de E sont égaux si et seulement si leurs n coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont égales. Retenez le principe : "une identité vectorielle équivaut à n égalités scalaires".

Proposition 1.5.2 Soit $u, v \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $u + v$ a pour coordonnées $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et λu a pour coordonnées $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve : Par définition des x_i et y_i : $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.

Il en résulte que $u + v = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n$. Ainsi $u + v$ a bien pour coordonnées $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. De même, $\lambda u = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n$. Et λu a bien pour coordonnées $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Nous pourrions noter $\text{coord}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbf{K}^n$, le n -uplet des coordonnées d'un vecteur $u \in E$ dans la base $\mathcal{B}$. L'ensemble $\mathbf{K}^n$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. La proposition 1.5.2 se traduit par : pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(u + v) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(u) + \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) \quad , \quad \text{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda u) = \lambda \text{coord}_{\mathcal{B}}(u) .$$

Plus généralement si $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 \text{coord}_{\mathcal{B}}(u_1) + \dots + \lambda_p \text{coord}_{\mathcal{B}}(u_p) .$$

Exemples Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, on observe que :

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Ainsi, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. C'est le seul exemple où un vecteur ne diffère pas de ses coordonnées ...

Notons que mis à part dans le cas de $\mathbf{K}^n$ muni de sa base canonique, un vecteur d'un espace vectoriel n'est jamais égal à ses coordonnées dans une base.

1.6 Dimension d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel

Proposition 1.6.1 *Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel qui possède une base de n vecteurs, alors toute famille libre n ou moins de n éléments.*

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base de E dont nous supposons l'existence. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ de $p \geq n + 1$ vecteurs de E est liée. Désignons par $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Nous devons montrer qu'il existe $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$(*) \quad a_1 u_1 + \dots + a_j u_j + \dots + a_p u_p = 0 \quad .$$

Cherchons donc les $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{K}$ solutions de *. Suivant la proposition 1.5.2, les coordonnées de $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \dots + a_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, l'égalité * équivaut à l'égalité :

$$(**) \quad \begin{cases} a_{1,1}a_1 + \dots + a_{1,j}a_j + \dots + a_{1,p}a_p &= 0 \\ a_{n,1}a_1 + \dots + a_{n,j}a_j + \dots + a_{n,p}a_p &= 0 \end{cases} \quad .$$

Ce système admet déjà la solution évidente $(0, \dots, 0)$. Suivant l'algorithme de résolution, ** a même solution qu'un système triangulé de $m \leq n$ équations linéaires homogènes à n variables. Ce système admet donc au moins une variable libre et donc a plus d'une solution et même une infinité puisque l'ensemble K que nous considérons a un nombre infini d'éléments. Ainsi, notre système admet une solution différente de $(0, \dots, 0)$. La famille $(u_1, \dots, u_p)$ de p vecteurs de E est donc liée.

Théorème 1.6.2 (*définition de la dimension*) Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel qui possède une base de n vecteurs, alors toute base de E a n éléments. Cet entier n , noté $\dim_{\mathbf{K}} E$, est appelé la dimension de E .

Preuve : Sinon, E admettrait une famille libre ayant un nombre d'éléments strictement plus grand que celui d'une base de E .

Proposition 1.6.3 Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel non réduit à zéro admettant une famille génératrice. Alors, nous pouvons extraire de cette famille génératrice une base de E .

Preuve : Soit $(v_1, \dots, v_p)$ cette famille génératrice.

Cas $p = 1$: Le vecteur v_1 engendre E . Comme E est non réduit à zéro, le vecteur v_1 n'est pas nul. La famille réduite à l'élément v_1 est donc libre (voir). C'est donc une base de E .

Cas $p > 1$: Si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre, puisqu'elle est supposée génératrice, c'est une base de E . Sinon, il existe $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p = 0 \quad .$$

Quitte à renuméroter la famille, on peut supposer que a_1 est non nul. On en déduit :

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_p}{a_1} v_p \quad .$$

Par hypothèse, tout vecteur u de E s'écrit :

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$. D'où :

$$u = (\lambda_2 - \lambda_1 \frac{a_2}{a_1})v_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda_1 \frac{a_p}{a_1})v_p \quad .$$

Ainsi, la famille $(v_2, \dots, v_p)$ serait génératrice. En itérant ce procédé, nous obtenons une base de E extraite de la famille $(v_1, \dots, v_p)$.

Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n a donc toujours au moins n éléments.

Proposition 1.6.4 *Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel de dimension n . Alors toute famille libre peut être complétée en une base.*

Preuve : Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de E . On sait alors que $p \leq n$ (proposition 1.6.1). Si la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice, c'est une base de E . Sinon, il existe $v_{p+1} \in E$ non combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_p)$. Considérons une relation :

$$a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} v_{p+1} = 0 \quad .$$

où $a_i \in \mathbf{K}$. Alors $a_{p+1} = 0$, sinon :

$$v_{p+1} = -\frac{a_1}{a_{p+1}}v_1 - \dots - \frac{a_p}{a_{p+1}}v_p \quad .$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur v_{p+1} . Il en résulte :

$$a_1 v_1 + \dots + a_p v_p = 0 \quad .$$

Mais alors, puisque la famille de départ $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre, tous les a_i sont nuls. Cela montre que notre nouvelle famille $(v_1, \dots, v_{p+1})$ est libre et que nous pouvons donc compléter la famille $(v_1, \dots, v_p)$ en une famille libre $(v_1, \dots, v_{p+1})$. Nous itérons ce procédé. En moins de $\dim_{\mathbf{K}} E - p$ étapes, nous complétons $(v_1, \dots, v_p)$ en une base de E , car sinon nous fabriquerions sinon une famille libre de E ayant $\dim_{\mathbf{K}} E + 1$

éléments.

Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n a donc toujours au plus n éléments.

Corollaire 1.6.5 *Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel de dimension n . Alors ;*

- *Une famille libre de n vecteurs de E est une base de E ,*
- *Une famille génératrice de E formée de n vecteurs est une base de E .*

Preuve : Sinon, on pourrait suivant les propositions 1.6.3 et 1.6.7 construire deux bases n'ayant pas le même nombre d'éléments.

Définition 1.6.6 (*droite vectorielle, plan, hyperplan*) *Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle, un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel. Un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ d'un espace vectoriel E de dimension n est appelé hyperplan de E .*

Proposition 1.6.7 *Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille génératrice et $(e_1, \dots, e_m)$ une famille libre d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Alors, on peut compléter la famille $(e_1, \dots, e_m)$ par des vecteurs de $(f_1, \dots, f_p)$ pour obtenir une base de E .*

Preuve Si $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de E , il n'y a rien à compléter. Sinon, $(e_1, \dots, e_m)$ n'est pas une famille génératrice. L'un des f_i n'est alors pas dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$. Sinon $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ serait un sous-espace vectoriel de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ et nous aurions alors $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$: contradiction ! Soit alors i_1 tel que f_{i_1} n'appartient pas à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$. Soit $a_1, \dots, a_{m+1} \in \mathbf{K}$ et une relation :

$$a_1 e_1 + \dots + a_m e_m + a_{m+1} f_{i_1} = 0 \quad .$$

Si a_{m+1} est non nul, nous aurions $f_{i_1} = -(1/a_{m+1})(a_1 e_1 + \dots + a_m e_m)$, ce qui contredit l'hypothèse sur f_{i_1} . Donc, $a_{m+1} = 0$ et la famille $(e_1, \dots, e_m)$ étant libre, nous en déduisons que tous les a_i sont nuls. La famille $(e_1, \dots, e_m, f_{i_1})$ est donc libre. Si c'est une famille génératrice de E , c'est une base de E et nous

avons terminé. Sinon, continuons. Supposons la famille $(e_1, \dots, e_m, f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$ libre. Les f_{i_j} sont alors deux à deux distincts, car une famille libre ne contient pas deux vecteurs égaux. Si $(e_1, \dots, e_m, f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$ est génératrice, c'est une base de E . Sinon, par le même argument que précédemment, il existe $i_{r+1} \in \{1, \dots, p\}$ tel que $f_{i_{r+1}} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_m, f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$. Nous montrons alors comme précédemment que la famille $(e_1, \dots, e_m, f_{i_1}, \dots, f_{i_{r+1}})$ est libre. En moins de p étapes, nous obtenons une base de E , car la famille $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_p)$ est une famille génératrice de E .

Proposition 1.6.8 *Soit $*$ un système d'équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$. et F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ des solutions de $*$. Alors, la dimension de F est le nombre de variables libres de tout système triangulé ayant mêmes solutions que $*$.*

Preuve Cela résulte de la proposition 1.4.3 et de sa preuve. Dans la preuve de la proposition 1.4.3, nous remarquons en effet que l'algorithme de résolution d'un système triangulé d'équations linéaires homogènes ayant r variables libres donne une base du sous-espace vectoriel de ses solutions à r éléments.

1.7 Décider si une famille de vecteurs est libre

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Question : Soit $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E **donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$** . la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est-elle une famille libre ? Nous avons vu à la proposition 1.6.1 que pour cela il est nécessaire que $p \leq n$. Supposons $p \leq n$.

Notons $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$u_j = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{n,j}e_n \quad .$$

Suivant la proposition 1.5.2, les coordonnées de $a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}a_1 + \dots + a_{1,j}a_j + \dots + a_{1,n}a_n \\ \vdots \\ a_{n,1}a_1 + \dots + a_{n,j}a_j + \dots + a_{n,n}a_n \end{pmatrix} \quad .$$

Réponse : Ainsi, $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre si et seulement si le système

$$(*) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,n}x_n &= 0 \end{cases} .$$

admet $(0, \dots, 0)$ comme seule solution. Pour répondre à la question, il suffit alors de résoudre le système $(*)$.

1.8 Décider si une famille de vecteurs est une base

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E . Toutes les bases de E ayant le même nombre d'éléments, si p est différent de n , $(u_1, \dots, u_p)$ ne sera jamais une base de E .

Question : Soit $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est-elle une base de E ?

Notons $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$u_j = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{n,j}e_n \quad .$$

D'après le corollaire 1.6.5, $(u_1, \dots, u_n)$ sera une base de E si et seulement c'est une famille libre.

Suivant la proposition 1.5.2, les coordonnées de $a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}a_1 + \dots + a_{1,j}a_j + \dots + a_{1,n}a_n \\ \vdots \\ a_{n,1}a_1 + \dots + a_{n,j}a_j + \dots + a_{n,n}a_n \end{pmatrix} .$$

Réponse 1 : Ainsi, $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si le système

$$(*) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,n}x_n &= 0 \end{cases} .$$

admet $(0, \dots, 0)$ comme seule solution.

Notons $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice carrée dont la j -ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est donc la matrice carrée de terme général $(a_{i,j})$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

D'après la proposition ?? ou la proposition ??, le système * admet $(0, \dots, 0)$ comme seule solution si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ qui est la matrice associée à ce système est inversible.

Réponse 2 : Pour montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E , il suffit de montrer l'inversibilité de $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Proposition 1.8.1 *Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si la matrice carrée $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est inversible.*

Exemple : Soit E un $\mathbf{R}$ -espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Considérons les vecteurs $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = e_1 + 3e_2$. Montrer que la famille (u_1, u_2) est une base de E .

Méthode 1 : Comme $\dim_{\mathbf{R}} E = 2$, il suffit de montrer que la famille (u_1, u_2) est libre (voir corollaire 1.6.5). Soit $a, b \in \mathbf{K}$ tels que $au_1 + bu_2 = 0$. Les coordonnées de $au_1 + bu_2$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2a + 3b \end{pmatrix}$$

Ainsi, $au_1 + bu_2 = 0$ équivaut au système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \quad \begin{cases} a + b = 0 & (E_1) \\ 2a + 3b = 0 & (E_2) \end{cases} ,$$

ou encore au système triangulé :

$$(**) \quad \begin{cases} a + b = 0 & (E_1) \\ b = 0 & (E_2 - 2E_1) \end{cases} ,$$

On en déduit $a = b = 0$ et donc que la famille (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base E .

Méthode 2 : La matrice carrée dont les colonnes sont les coefficients de u_1, u_2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Son déterminant est 1. Cette matrice est donc inversible et (u_1, u_2) est une base de E .

Exemple (variante) : Soit les vecteurs $v_1 = (1, 4)$ et $v_2 = (1, 5)$ de $\mathbf{R}^2$. Montrer que la famille (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.

A un détail près, il s'agit du même exemple que le précédent. En effet, dire que $v_1 = (1, 4)$ et $v_2 = (1, 5)$, c'est dire que dans la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbf{R}^2$, les coordonnées de v_1 et v_2 sont respectivement $(1, 4)$ et $(1, 5)$.

Méthode 1 : Comme $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^2 = 2$, il suffit de montrer que la famille (v_1, v_2) est libre (voir corollaire 1.6.5). Soit $a, b \in \mathbf{K}$ tels que $av_1 + bv_2 = 0$. En colonne :

$$av_1 + bv_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 4a + 5b \end{pmatrix} .$$

Ainsi, $av_1 + bv_2 = 0$ équivaut au système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \quad \begin{cases} a + b = 0 & (E_1) \\ 4a + 5b = 0 & (E_2) \end{cases} ,$$

ou encore au système triangulé :

$$(**) \quad \begin{cases} a + b = 0 & (E_1) \\ b = 0 & (E_2 - 4E_1) \end{cases} ,$$

On en déduit $a = b = 0$ et donc que la famille (v_1, v_2) est libre. C'est donc une base E .

Méthode 2 : La matrice carrée dont les colonnes sont les coefficients de v_1, v_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$M(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Son déterminant est 1. Cette matrice est donc inversible et (v_1, v_2) est une base de E .

1.9 Coordonnées d'un vecteur dans des bases différentes

Soit E un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ dite ancienne base. Donnons nous une autre base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ dite nouvelle base et **supposons connues les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$** .

Soit $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$e'_j = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{n,j}e_n .$$

Définition 1.9.1 (*matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel E . Appelons matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice carrée $P = M_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$ dont la j -ème colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

$$P = M_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

Nous avons vu à la proposition 1.8.1 que la matrice P est inversible.

question 1 : Si u est un vecteur de E de coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, quelles sont ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$?

Suivant la proposition 1.5.2, les coordonnées de $u = X_1 e'_1 + \dots + X_n e'_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$X_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + X_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \dots + X_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,j}X_j + \dots + a_{1,n}X_n \\ \vdots \\ a_{n,1}X_1 + \dots + a_{n,j}X_j + \dots + a_{n,n}X_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} .$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} .$$

Question 2 : Si u est un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$, quelles sont ses coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$?

Réponse 1 : D'après la question précédente, les coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$ de u dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont l'unique solution du système de n équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,j}X_j + \dots + a_{1,n}X_n = x_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}X_1 + \dots + a_{n,j}X_j + \dots + a_{n,n}X_n = x_n \end{cases} .$$

Il suffit de résoudre le système *, par exemple en suivant l'algorithme donné au chapitre 3.

Réponse 2 : D'après la question précédente, comme la matrice P est inversible, les coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$

de u dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Il reste à calculer P^{-1} , ce qu'on peut faire en utilisant les méthodes ou l'algorithme donnés au chapitre 4.

En particulier, si on prend $u = e_j$, ses coordonnées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ sont $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ où le 1 est placé à la j -ème place. Ainsi, les coordonnées de e_j dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont :

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \text{où 1 est sur la ligne } j$$

qui n'est autre que la j -ème colonne de P^{-1} . Ainsi, P^{-1} n'est autre que la matrice dont la j -ème colonne est constituée des coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{B}'$:

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) .$$

Résumons une partie de cette étude en une proposition :

Proposition 1.9.2 *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbf{K}$ -espace-vectoriel E de dimension n . Désignons par P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit u un vecteur de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et soit $(X_1, \dots, X_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

La matrice, P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Exemple : Soit E le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit $e'_1 = e_1 + 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + 3e_2$, nous avons vu que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E . Si (x_1, x_2) sont les coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont ses coordonnées (X_1, X_2) dans la base $\mathcal{B}'$?

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse s'obtient suivant la chapitre ?? en calculant le déterminant et la comatrice de P . On Obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad .$$