Université Cote d'Azur | L1 - I Algébre
2020-21 | semestre 2

Cours de Fondements Mathématiques II

Espaces Vectoriels . TD 1

Exercice 1 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et w un vecteur fixé de E.
1) Déterminer $u \in E$ en fonction de w tel que :

$$2u - \frac{1}{2}w = 3w - 7u \ .$$

2) Déterminer de même $u, v \in E$ tels que :

$$\begin{cases} 3u - v &= \quad 4w \\ u - 2v &= \ -w \ . \end{cases}$$

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, et $x, u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{Q}$. Soit :

$$v = (\lambda - 1)(x + 5u) - 7u - (2x - u) \ .$$

1) Exprimer v comme une combinaison linéaire de x, u.
2) Nous supposons u non nul fixé, déterminer en fonction de λ et u les vecteurs x tels que $v = 0$.

Exercice 3 – Démonstrations de quelques résultats généraux :
1) Montrer que si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille libre d'un espace vectoriel E, toute sous-famille de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille libre.
2) Montrer que si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E, toute famille finie de vecteurs de E contenant $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est une famille génératrice de E.
3) Soit E un K-espace vectoriel et $u_1, u_2, \ldots, u_p$ une famille libre de E. Montrer que :

$$v \notin < u_1, u_2, \ldots, u_p > \quad \Longleftrightarrow \quad (v, u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad \text{famille libre de } E \ .$$

4) Montrer que si (u_1, u_2, u_3) est une base de E, alors (u_3, u_2, u_1) est une base de E.

Exercice 4 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E Soit u de coordonnées $(-1, 0, 2)$, v de coordonnées $(2, 1, 0)$ et w de coordonnées $(2, 1, -1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
1) Calculer les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$2u - v - 2w \quad \text{et} \quad 3(u - v) + 3(v - w) \ .$$

2) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs x satisfaisant la relation :

$$2u - x = v + x \ .$$

Exercice 5 – Soit $u = (1, 0), v = (1, 2) \in \mathbf{R}^2$. Montrer en revenant aux définitions de famille libre et génératrice que la famille (u, v) est une famille libre et génératrice du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ des couples de réels. Quellles sont les coordonnées du couple $(\sqrt{2}, \pi)$ dans cette base.

Exercice 6 – Soit $u = (1,0,2), v = (1,3,1) \in \mathbf{R}^3$. Et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u et v.
1) Expliquer pourquoi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Montrer que famille (u,v) est une base de F. Montrer que $e = (3,3,5) \in F$. Quelles sont les coordonnées de e dans la base (u,v) de F.
2) Montrer que la famille (u,v) est libre et non génératrice. Exhiber un vecteur w de $\mathbf{R}^3$ telle que la famille (u,v,w) woit une base de $\mathbf{R}^3$. Quels sont tous les vecteurs w qui conviennent ?

Exercice 7 – Nous considérons les systèmes linéaires :

$$(1)\left\{\ x-y+z+t=0\right. \quad ; \quad (2)\left\{\ x+2y-2z+4t=0\right. \quad ; \quad (3)\left\{\begin{array}{lll} x-y+z+t & = & 0 \\ x+2y-2z+4t & = & 0 \end{array}\right.$$

1) Pourquoi les ensembles de solutions $S_1, S_2, S_3 = S_1 \cap S_2$ de ces trois systèmes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$?
2) Donner une base de ces trois sous-espaces vectoriels (On suivra l'algorithme de résolution des systèmes linéaires).
3) Vérfier que $u = (-4,0,2,2) \in S_1 \cap S_2$. Déterminer les coordonnées de u dans ces trois bases.

Exercice 8 – Soit $u = (1,1), v = (2,-1), w = (1,3) \in \mathbf{R}^2$.
Nous appelons relation entre u,v,w, tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$xu + yv + zw = 0\ .$$

1) Montrer que l'ensemble des relations entre u,v,w est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer une base de ce sous-espace.
3) En déduire par exemple l'expréssion de w comme combinaison linéaire de (u,v).

Exercice 9 – Soit $M_2(K)$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille 2.
1) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une base de $M_2(K)$.
2) Soit $G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)\ ;\ a+b+c+d = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$. Donner une base de G.