=== Université Cote d'Azur — L1 - I Algébre
2020-21 — semestre 1 et 2

Cours de Fondements Mathématiques

Espaces Vectoriels . TD 2

Exercice 1 – Soit $u = (1, 2, -1), v = (1, 3, 1) \in \mathbf{R}^3$.
1) Montrer que la famille (u, v) est libre.
2) Montrer que la famille (u, v) n'est pas une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. On précisera un vecteur $w = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que w n'est pas combinaison linéaire de u et v.
3) Montrer que (u, v, w) est une famille libre et une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2 – Soit $u = (1, 2, -1, 1, 3), v = (1, 3, 1, 0, 7) \in \mathbf{R}^5$.
1) Montrer que la famille (u, v) est libre.
2) Donner $w_3, w_4, w_5 \in \mathbf{R}^5$ telle que (u, v, w_3, w_4, w_5) soit une famille libre et une une base de $\mathbf{R}^5$.
3) Calculer $\mathrm{Vect}(u, v) \cap \mathrm{Vect}(w_3, w_4, w_5)$.

Exercice 3 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. et (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille génératrice de E.
1) Montrer qu'il existe a_1, a_2, a_3, a_4 des réels non tous nuls tels que $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4 = 0$.
2) Supposer $a_4 \neq 0$, montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.

Exercice 4 – Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ tels que $x + y + z + t = 0\}$.
1) Rappeler pourquoi H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. Donner sans calcul la dimension de H ?
2) Montrer que $u_1 = (1, -1, 0, 0), u_2 = (0, 1, -1, 0), u_3 = (0, 0, 1, -1)$ sont dans H et que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. En déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base de H.
3) Compléter la famille (u_1, u_2, u_3) en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5 – Soit $u = (1, 1), v = (3, -1) \in \mathbf{R}^2$.
1) Montrer par plusieurs méthodes que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbf{R}^2$:
Méthode a : Montrer que la famille (u,v) est libre ...
Méthode b : Montrer que la famille (u,v) est une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$ ...
Méthode c : Si $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$, écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$ ...
2) Quelle est la matrice de passage P de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}'$?
3) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Quelles sont les coordonnées de (x, y) dans la base $\mathcal{B}'$?
4) Quelles sont les coordonnées de $(1, 0)$ et $(0, 1))$ dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}_{\text{can}}$?
5) Si $(X, Y) \in \mathbf{R}^2$ et $w = Xu + Yv$, quelles sont les cooordonnées de w dans la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$?

Exercice 6 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Posons $u = e_1 + e_2 + e_3$, $v = e_2 - e_1$, $w = 2e_1$.
1) Montrer par plusieurs méthodes que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E :

Méthode a : Montrer que la famille (u,v,w) est libre ...
Méthode b : Montrer que la famille (u,v,w) est une famille génératrice de E ...
Méthode c : Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u, v et w dans la base $\mathcal{B}$ ...
2) Quelle est la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$?
3) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Quelles sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}'$?
4) Quelles sont les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$?
5) Si $(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3$ et $w = Xu + Yv + Zw$, quelles sont les cooordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 7 – Soit $G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad a + d = 0 \text{ et } b + c = 0\}$.
1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$.
2) Montrer que $\mathcal{B} = (A_1, A_2)$ est une base de G où :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Montrer que les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de G.
4) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer P^{-1}. En déduire les coordonnées des matrices A_1 et A_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 8 – On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 7x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 7x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_3) \\ 7x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array} \right. \quad .$$

Nous notons P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E.
1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire E. Donner à l'aide d'un algorithme du cours un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les deux variables libres de ce système triangulé ?
2) Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B} = (u, v)$ de P par cette méthode.
3) Posons $u' = (\frac{2}{7}, 1, 1, 1)$, $v' = (0, 1, 3, 1)$. Montrer que u' et v' sont dans P. Quels sont leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$. Montrer que la famille (u', v') est libre. Montrer que la famille (u', v') est une base de P.