Algèbre
Cours Fondements S2
Exercices Corrigés
Espaces Vectoriels
Janvier 2021

January 5, 2021

Contents

1	Espaces vectoriels	4
1.1	Enoncés	4
1.2	Corrections	6

1 Espaces vectoriels

1.1 Enoncés

Exercice 1 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_2) \end{cases} .$$

1) En résolvant ce système suivant l'algorithme du cours, donner une base de F . Quelle est la dimension de F ?

2) Soit $u = (-4, -1, 3, 3)$ et $v = (-3, -3, 6, 3)$. Montrer que u et v appartiennent à F . Quelles sont les coordonnées de u et v dans la base déterminée à la question 1. En déduire que (u, v) est une base de F .

Exercice 2 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E .

1) Montrer en utilisant la définition que $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ est une base de E . Pourquoi aurait-il été suffisant de montrer que la famille $(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ était libre ou génératrice ?

2) Quelle est la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer P^{-1} .

En déduire les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. En déduire les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 3 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_2) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 & (E_2) \end{cases} .$$

Déterminer une base de F .

Exercice 4 – Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de base (e_1, e_2) . On pose $u_1 = e_1 + e_2$ et $u_2 = e_1 - e_2$.

1) Montrer par deux méthodes que la famille (u_1, u_2) est une base.

- 2) Exprimer par deux méthodes e_1 , puis e_2 comme une combinaison linéaire de u_1, u_2 .
- 3) Si un vecteur u de E a pour coordonnées (A, B) dans la base (u_1, u_2) , quelles sont les coordonnées (a, b) de u dans la base (e_1, e_2) et inversement ?

Exercice 5 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_2) \end{cases} .$$

et le sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(**) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E'_1) \\ x_4 = 0 & (E'_2) \end{cases} .$$

Préciser F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ et une base de ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 6 – Nous considérons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_4 = 0 & (E_1) \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 & (E_2) \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 & (E_3) \end{cases} .$$

On note P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E) .

- 1) Préciser en utilisant l'algorithme de résolution une base $\mathcal{B}$ de P .
- 2) Vérifier que les vecteurs $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (0, 3, 0, 4)$ appartiennent à P .
- 3) Déterminer les coordonnées des vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$ déterminée dans 1).
- 4) Montrer que (u, v) est une base de P .

Nous considérons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E') \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} .$$

Nous notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E') .

5) Montrer que $P \cap F = \{0\}$.

6) Déterminer une base de F .

7) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, montrer qu'il existe $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in P$ et $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3, x''_4) \in F$ tel que $x = x' + x''$. On déterminera x' et x'' .

1.2 Corrections

Correction de l'exercice 1 :

1) F est constitué des solutions d'un système homogène à coefficients réels de deux équations à quatre inconnues. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. F est encore formé des solutions du système homogène :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_1) \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 & (E_2 - E_1) \end{cases} .$$

qui est un système triangulé de variables libres x_3 et x_4 . Nous obtenons :

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 .$$

On obtient alors :

$$x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 .$$

Il en résulte :

$$F = \left\{ \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4 \right) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} .$$

$$F = \left\{ x_3 \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0 \right) + x_4 \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1 \right) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} .$$

Ainsi, F est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs

$$e_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) \quad \text{et} \quad e_2 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right).$$

La famille (e_1, e_2) est donc une famille génératrice de F . C'est une famille libre. En effet :

$$x_3 \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + x_4 \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right) = \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4\right) = 0$$

implique clairement $x_3 = x_4 = 0$. C'est donc une base de F . Cette base est formée de deux éléments. Donc, $\dim_{\mathbf{R}} F = 2$.

Cela correspond au résultat du cours : l'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ de p équations à n inconnues fournit une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ constitué par ses solutions.

2) Pour montrer que u et v sont dans F , nous vérifions qu'ils satisfont aux équations *. Pour u , cela donne par exemple :

$$-4 - (-1) - 3 + 2 \times 3 = -4 + 2(-1) + 3 + 3 = 0 \quad .$$

Ainsi, il existe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que :

$$(-4, -1, 3, 3) = x \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + y \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, x, y\right) \quad .$$

Nous en déduisons $x = 3$ et $y = 3$. Les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) sont donc $(3, 3)$. De même, nous montrons que les coordonnées de v dans la base (e_1, e_2) sont donc $(6, 3)$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au + bv = 0$. Il en résulte que les coordonnées de $au + bv$ dans la base (e_1, e_2) sont nulles. Nous obtenons en écrivant ces coordonnées en colonne :

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3b \\ 6a + 3b \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Le couple (a, b) vérifie donc le système d'équations linéaires homogènes :

$$\begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ 6a + 3b = 0 \end{cases} .$$

en résolvant ce système, nous obtenons $a = b = 0$. Ainsi, (u, v) est une famille libre. Or, la dimension de F est 2, donc (u, v) est une base de F .

Pour montrer que (u, v) est une base de F , nous pouvons aussi considérer la matrice :

$$M_{(e_1, e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u et v dans la base (e_1, e_2) de F . Le déterminant de cette matrice est non nul. Donc, (u, v) est une base de F .

Correction de l'exercice 2 :

1) Montrons que la famille $(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ est une famille libre de E . Soit a, b, c trois réels tels que :

$$a(e_1 + e_2 + e_3) + b(e_2 + e_3) + ce_3 = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$ae_1 + (a + b)e_2 + (a + b + c)e_3 = 0 \quad .$$

Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E , c'est une famille libre. On en déduit :

$$a = a + b = a + b + c = 0$$

Il en résulte : $a = b = c = 0$. Nous avons ainsi prouvé que la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ est libre.

Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ est génératrice. Soit u un vecteur de E . Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E , si (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \quad .$$

Cherchons (X_1, X_2, X_3) trois réels, tels que :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = X_1(e_1 + e_2 + e_3) + X_2(e_2 + e_3) + X_3e_3 \quad .$$

Il vient :

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = X_1e_1 + (X_1 + X_2)e_2 + (X_1 + X_2 + X_3)e_3 \quad .$$

Il en résulte puisque $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E (unicité de l'expression d'un vecteur dans une base) ;

$$(*) \begin{cases} X_1 & = x_1 \\ X_1 + X_2 & = x_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 & = x_3 \end{cases} \quad .$$

Ainsi, (X_1, X_2, X_3) sont les solutions d'un système linéaire. Résolvons ce système. Il se trouve qu'il est triangulé. On obtient :

$$(*) \quad X_1 = x_1 \quad , \quad X_2 = x_2 - X_1 = x_2 - x_1 \quad , \quad X_3 = x_3 - (X_1 + X_2) = x_3 - x_2 \quad .$$

On a donc :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(e_1 + e_2 + e_3) + (x_2 - x_1)(e_2 + e_3) + (x_3 - x_2)e_3 \quad .$$

Le vecteur u est donc bien combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre, génératrice de E . C'est donc une base de E .

Nous noterons que l'on obtient par la formule * les coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur dont on connaît les coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

En fait, comme la dimension de E est trois, Nous aurions pu faire plus court pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base en rappelant que dans un espace vectoriel de dimension 3 une famille libre de 3 vecteurs de E est une

base de E . Mais, à ce moment là, nous perdons la formule de changement de coordonnées.

2)

$$P = M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque P est une matrice de passage, elle est inversible. Le calcul de son déterminant et de sa comatrice donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la formule :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Nous retrouvons, l'expression donnée dans la première question.

Nous savons que $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$ n'est autre que la matrice de changement de base de la $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, si nous posons $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, et $e'_3 = e_3$:

$$\begin{cases} e_1 &= e'_1 - e'_2 \\ e_2 &= e'_2 - e'_3 \\ e_3 &= e'_3 \end{cases} .$$

Correction de l'exercice 3 :

Pour la rédaction, voir la solution de la question 1 de l'exercice 1. Après calcul, le lecteur constatera que les systèmes d'équations linéaires homogènes des exercices 1 et 3 sont égaux.

Correction de l'exercice 4 :

1) Méthode 1 : Soit a et b deux réels tels que : $au_1 + bu_2 = 0$. Nous en déduisons :

$$a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = 0 \quad .$$

Nous en déduisons :

$$(a + b)e_1 + (a - b)e_2 = 0 \quad .$$

Comme (e_1, e_2) est une base de E , c'est une famille libre. La dernière égalité implique donc :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad .$$

Réolvons ce système. On obtient : $a = b = 0$. La famille (u_1, u_2) est donc libre. Comme E est de dimension 2, (u_1, u_2) est une base de E .

1) Méthode 2 : La matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2 dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est -2 . Elle est donc inversible et (u_1, u_2) est donc une base de E .

2) Méthode 1 : Nous avons :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 = u_1 \\ e_1 - e_2 = u_2 \end{cases} \quad .$$

Réolvons ce "système linéaire" d'équations entre vecteurs. En conservant la première équation et enlevant la première équation à la seconde, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 = u_1 \\ -2e_2 = u_2 - u_1 \end{cases} \quad .$$

Il en résulte : $e_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$. Remplaçons e_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient :

$$e_1 = u_1 - e_2 = u_1 - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad .$$

Ainsi :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ e_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \end{cases} \quad .$$

2) Méthode 2 : La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ à la base (u_1, u_2) est :

$$P = M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Calculons son inverse à l'aide de son déterminant et de sa comatrice, on obtient :

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Mais $P^{-1} = M_{(u_1, u_2)}\mathcal{B}(u_1, u_2)$. Autrement dit, les colonnes de P^{-1} donnent les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) . Nous retrouvons le résultat précédent.

3) (a, b) et (A, B) sont liés par les formules :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}(a + b) \\ B = \frac{1}{2}(a - b) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a = A + B \\ b = A - B \end{cases} \quad .$$

Solution de l'exercice 5 :

Le sous-espace vectoriel F_1 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_2) \end{cases} \quad .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_3 et x_4 . Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_2 = x_3 - 2x_4 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4 = -3x_3 + 3x_4 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 = \{(-3x_3 + 3x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille de deux vecteurs $(-3, 1, 1, 0), (3, -2, 0, 1)$ est une base de F_1 .

Le sous-espace vectoriel F_2 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E'_1) \\ x_4 = 0 & (E'_2) \end{cases} \quad .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_2 et x_3 . Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_2 = \{(-2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0) \text{ tels que } x_2, x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_2 = \{x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) \text{ tels que } x_2, x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille de deux vecteurs $(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)$ est une base de F_2 .

L'ensemble $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ comme intersection de deux tels sous-espaces vectoriels. Il est constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E'_1) \\ x_4 = 0 & (E'_2) \end{cases} .$$

Soit :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_2) \\ x_4 = 0 & (E'_2) \end{cases} .$$

Ce système est triangulé. Il possède une seule variable libre : x_3 . Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_2 = x_3 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -3x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 \cap F_2 = \{(-3x_3, x_3, x_3, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 \cap F_2 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille d'un vecteur $(-3, 1, 1, 0)$ est une base de $F_1 \cap F_2$.

Correction de l'exercice 6 :

Solution de 3

1 Les variables du système (E) sont naturellement ordonnées. Les trois équations de (E) sont d'ordre 1. Le système (E) a même solution que le système :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & - 3x_4 = 0 & (E_1) \\ - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ - 8x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 & (E'_3 = E_3 - 3E_1) \end{cases} .$$

La première équation est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Le système (E) a même solution que le système :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & - 3x_4 = 0 & (E_1) \\ - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & 0 = 0 & (E'_3 - 2E'_2) \end{cases} .$$

Ou encore, même solution que le système triangulé :

$$(E') \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 & - 3x_4 = 0 & (E_1) \\ - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \end{cases} .$$

Ce système admet pour variables libres : x_3 et x_4 .

La deuxième équation du système triangulé (E') donne :

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 .$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient :

$$x_1 = -4x_2 + 3x_4 = x_3 .$$

Il en résulte :

$$P = \left\{ \left(x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4 \right) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} .$$

$$P = \left\{ x_3 \left(1, -\frac{1}{4}, 1, 0 \right) + x_4 \left(0, \frac{3}{4}, 0, 1 \right) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} .$$

Les deux vecteurs $(e_1 = (1, -\frac{1}{4}, 1, 0), e_2 = (0, \frac{3}{4}, 0, 1))$ forment clairement une famille génératrice de P . On vérifie facilement qu'ils forment une famille libre de $\mathbf{R}^4$. Ainsi, (e_1, e_2) forment une base de P . Nous pourrions noter que la liberté de (e_1, e_2) se déduit facilement de

$$ae_1 + be_2 = a \left(1, -\frac{1}{4}, 1, 0 \right) + b \left(0, \frac{3}{4}, 0, 1 \right) = \left(a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b \right) .$$

2) Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que les deux quadruplets de réels $(1, -1, 1, -1)$ et $(0, 3, 0, 4)$ vérifient chacun les deux équations du système (E') .

3) u appartient donc à P de base (e_1, e_2) . Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$u = (1, -1, 1, -1) = ae_1 + be_2 = \left(a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b \right) .$$

Nous en déduisons $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi $(1, -1)$ sont les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) de P . Nous constatons d'autre part que $v = 4e_2$, donc $(0, 4)$ sont les coordonnées de v dans la base (e_1, e_2) de P .

4) La matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Son déterminant est 4. Elle est donc inversible et (u, v) est donc une base de P .

5) $P \cap F$ est formé des solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_4 = 0 & (E_1) \\ -4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & x_3 = 0 \\ & x_4 = 0 \end{cases} .$$

Réolvons ce système qui est d'ailleurs triangulé. On a : $x_4 = x_3 = 0$. Nous en déduisons $x_2 = 0$ et en reportant dans la première équation $x_1 = 0$. Ainsi, ce système admet $(0, 0, 0, 0)$ comme unique solution. Cela montre que $P \cap F = \{0\}$.

6)

$$F = \{(x_1, x_2, 0, 0) \text{ tels que } x_1, x_2 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

$$P = \{x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Il en résulte que $(e_3 = (1, 0, 0, 0), e_4 = (0, 1, 0, 0))$ est une famille génératrice de F . Comme c'est une famille libre, c'est une base de F .

7) Supposons que x' et x'' existent. Nous avons $x'' = (x''_1, x''_2, 0, 0)$ et il existe deux réels a et b tels que

$$x' = ae_1 + be_2 = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) \quad .$$

On en déduit :

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) + (x''_1, x''_2, 0, 0) \quad .$$

Soit :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a + x''_1, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b + x''_2, a, b) \quad .$$

Il en résulte $a = x_3, b = x_4$, puis :

$$x''_2 = x_2 + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b = x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \quad .$$

et

$$x''_1 = x_1 - a = x_1 - x_3 \quad .$$

Inversement, nous avons bien :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4) + (x_1 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, 0, 0) \quad .$$

Ainsi, $x' = x_3e_1 + x_4e_2 = (x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4)$ et $x'' = (x_1 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, 0, 0)$ convient.