Algèbre
Cours Fondements S1 et S2
Sous-espaces vectoriels

November 30, 2020

Contents

4 Sous-espaces vectoriels

4.1 Introduction

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, nous commençons par observer que tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension inférieure ou égale à n et que si $\dim_{\mathbf{K}} F = \dim_{\mathbf{K}} E$, c'est que $F = E$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, autrement dit $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. A partir de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}$, nous donnons un algorithme pour calculer la dimension de F appelée aussi rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Cet algorithme construit en fait une base échelonnée de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $*$ un système de m équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$. Nous pouvons observer facilement que le sous-ensemble de E formé des vecteurs dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions de $*$ est un sous-espace vectoriel E. Nous montrons inversement que tout sous-espace vectoriel F de E est en fait formé des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les solutions d'un système équations linéaires homogènes de n variables. Nous appelons un tel système un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$. Si F est engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, nous montrons comment déterminer un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$.

Si F est donné par un système de générateurs, il est facile de déterminer des vecteurs de F. Ils sont en effet "paramétrés" par la famille génératrice. Par contre, si F est donné par un système d'équations, il est facile de vérifier si un vecteur de E est dans F. L'idéal est donc de disposer à la fois d'un système de générateurs d'un sous-espace vectoriel et d'un système d'équations. Les algorithmes du chapître **??** et de ce chapître permettent justement de passer d'une présentation à l'autre.

La somme de deus sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E est l'ensemble des sommes des vecteurs de F et des vecteurs de G. C'est un espace vectoriel noté $F+G$. Nous montrons la formule :

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F \cap G) \quad .$$

La somme $F+G$ est dite directe si $F \cap G = \{0\}$. Tout vecteur de $F+G$ se décompose alors de façon unique commme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G. On dit que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si $E = F \oplus G$. Dans ce cas, tout vecteur de E se décompose de façon unique commme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Objectif Soit E et un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E.

- Savoir déterminer à l'aide de $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ une base échelonnée de $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et donc le rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.
- Savoir déterminer à l'aide d'une base échelonnée de F un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Savoir montrer en petite dimension que deux sous-espaces vectoriels sot supplémentaires. Dans ce cas, savoir préciser la décomposition d'un vecteur de E en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera toujours soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

4.2 Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 4.2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel non réduit à zéro d'un K-espace vectoriel E de dimension n. Alors, F admet une base et* $\dim_{\mathbf{K}}(F) \leq \dim_{\mathbf{K}}(E) = n$.

Preuve : Observons les deux points suivants.
1) Soit u un vecteur non nul de F. Suivant la remarque **??**, la famille (u) réduite au seul vecteur u est alors libre.

2) Supposons construit une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de F qui ne soit pas une base de F. Soit alors, $u_{p+1} \in F$ qui ne soit pas combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$. Il en résulte (voir preuve de la proposition **??**) que la famille $(u_1, \ldots, u_{p+1})$ est une famille libre de vecteurs de F.

Suivant ces deux remarques, si F n'admettait pas de base, nous construirions une famille libre de strictement plus de n vecteurs. C'est impossible, car toute famille de strictement plus de n vecteurs de E est liée. Ainsi, F admet une base. Cette base est une famille libre de vecteurs de E. Elle a donc moins de n éléments et $\dim_{\mathbf{K}}(F) \leq n$.

Proposition 4.2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

$$\dim_{\mathbf{K}}(F) = \dim_{\mathbf{K}}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad F = E \quad .$$

Preuve : Supposons $\dim_{\mathbf{K}}(F) = n$. Les vecteurs de $\mathcal{B}$ forment donc une famille libre de de n vecteurs de E. Suivant le corollaire **??**, $\mathcal{B}$ est une base de E. Ainsi, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc de F. Ainsi, $E \subset F$ et $E = F$. Inversement si $E = F$, les dimensions de E et F sont bien égales.

Corollaire 4.2.3 *Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

$$E_1 \subset E_2 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{K}}(E_1) = \dim_{\mathbf{K}}(E_2) \quad \Longleftrightarrow \quad E_1 = E_2 \quad .$$

Preuve : En effet, E_1 est un sous-espace vectoriel de E contenu dans le sous-espace vectoriel E_2 de E. C'est donc un sous-espace vectoriel de E_2. Il reste à appliquer la proposition 4.2.2.

Soit maintenant E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. Le sous-espace $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est par définition engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Sa dimension est donc inférieureà p.

Définition 4.2.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. Nous appelons rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ l'entier :*

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim_{\mathbf{K}} Vect(u_1, \ldots, u_p) \ \leq \ p \quad .$$

Remarque 4.2.5 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p) = p &\iff (u_1, \ldots, u_p) \text{ base de } Vect(u_1, \ldots, u_p) \\ &\iff (u_1, \ldots, u_p) \text{ famille libre} \quad . \end{aligned}$$

Preuve : Posons $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$.

Comme F est par définition engendré par $u_1, \ldots, u_p$, les assertions $(u_1, \ldots, u_p)$ base de F et $(u_1, \ldots, u_p)$ famille libre sont équivalentes.

Si le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est p, c'est que F est de dimension p. Ainsi $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de F ayant le même nombre d'éléments qu'une base de F, c'est donc une base de F.

Inversement si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F, c'est que p est la dimension de F et donc $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p) = p$.

Remarque 4.2.6 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p) = n &\iff c = E \\ &\iff (u_1, \ldots, u_p) \text{ famille génératrice de E} \quad . \end{aligned}$$

Preuve : Si $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p) = n$, c'est que $Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Il résulte de la proposition 4.2.2 que $Vect(u_1, \ldots, u_p) = E$. Inversement, si $Vect(u_1, \ldots, u_p) = E$, la dimension de $Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est n, donc $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p) = n$. Enfin, nous rappelons que l'égalité de $Vect(u_1, \ldots, u_p)$ avec E équivaut à ce $(u_1, \ldots, u_p)$ soit une famille génératice de E.

Remarque 4.2.7 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E.

$$\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_n) = n \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ base de } E \quad .$$

Preuve : Cette remarque résulte par exemple des remarques 4.2.6 et 4.2.5.

4.3 Transformation conservant le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel.

Proposition 4.3.1 *(Lemme d'échange) Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p \in E$ et $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ la famille de E déduite de $u_1, \ldots, u_p$ par une ou une succession des opérations suivantes :*

- *permutation de deux vecteurs,*
- *multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul,*
- *conserver un vecteur et retiter aux autres vecteurs des produits par des éléments de K du vecteur conservé,*
- *soustraction à un vecteur d'une combinaison linéaire des autres.*

Alors, nous avons :

a) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$,

b) $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ famille libre $\iff (u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ famille libre ,

c) $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ base de E $\iff (u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ base de$E$.

Preuve : L'assertion c) résulte des assertions a) et b). En effet si $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ est une famille de vecteurs de E, dire que $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ est une base de E équivaut à dire que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ est libre et que $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_l)$.

Nous allons montrer les points a) et b) de la proposition dans le cas où la famille $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ se déduit de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ en conservant u_1 et en retirant aux autres vecteurs des produits par des éléments de K de u_1. Ainsi, nous allons montrer la proposition dans le cas :

$$u'_1 = u_1 \ , \ u'_2 = u_2 - \gamma_2 u_1 \ , \ldots \ , \ u'_p = u_p - \gamma_p u_1 \ ,$$

où les $\gamma_i \in \mathbf{K}$. Sous ces hypothèses, nous avons :

$$(*)\ u_1 = u'_1\ ,\ u_2 = u'_2 - (-\gamma_2)u_1\ ,\dots\ ,\ u_p = u'_p - (-\gamma_p)u_1\ .$$

Il en résulte que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ se déduit de la famille $(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ par le même procédé.

Montrons a). Si $u \in \text{vect}(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$, il existe $a_1, \dots, a_p$ tels que :

$$u = a_1u'_1 + \cdots + a_pu'_p \quad .$$

Il en résulte :

$$u = a_1u_1 + a_2(u_2 - \gamma_2u_1) + \cdots + a_p(u_p - \gamma_pu_1)\ .$$

et

$$u = (a_1 - a_2\gamma_2 - \cdots - a_p\gamma_p)u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_pu_p \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \quad .$$

Cela montre l'inclusion :

$$\text{Vect}(u'_1, u'_2, \dots, u'_p) \subset \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \quad .$$

L'autre inclusion résulte de $*$.

Montrons b). Supposons la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre. Montrons que $(u'_1, u_2, \dots, u'_p)$ est une famille libre. Soit $a_1, \dots, a_p$ des scalaires tels que

$$a_1u'_1 + \cdots + a_pu'_p = 0 \quad .$$

D'où :

$$0 = a_1u_1 + a_2(u_2 - \gamma_2u_1) + \cdots + a_p(u_p - \gamma_pu_1) = (a_1 - a_2\gamma_2 - \cdots - a_p\gamma_p)u_1) + a_2u_2 + \cdots + a_pu_p\ .$$

Il en résulte : $a_1 - a_2\gamma_2 - \cdots - a_p\gamma_p = a_2 = \ldots = a_p = 0$. D'où, $a_1 = \ldots = a_p = 0$. La famille $(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ est donc libre. La réciproque résulte de $*$.

Remarque 4.3.2 Soit $u_1, u_2, \dots, u_p \in E$, nous avons :

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p, 0)\ .$$

4.4 Famille échelonnée de vecteurs relativement à une base

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel. Nous supposerons E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Notation 4.4.1 *Soit u un vecteur non nul de E de coordonnées $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous appellerons ordre de u relativement à la base $\mathcal{B}$ l'entier :*

$$v_{\mathcal{B}}(u) = \inf\{i \in \{1, \dots, n\},\ \text{tel que } a_i \neq 0\} \quad .$$

L'ordre de u est autrement dit l'ordre de la première coordonnée non nulle de u.
Nous dirons qu'une famille $u_1, \dots, u_p$ de vecteurs non nuls de E est ordonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ si

$$v_{\mathcal{B}}(u_1) \leq v_{\mathcal{B}}(u_2) \leq \dots \leq v_{\mathcal{B}}(u_p) \ .$$

Nous dirons qu'une famille $u_1, \dots, u_p$ de vecteurs non nuls de E est échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ si

$$v_{\mathcal{B}}(u_1) < v_{\mathcal{B}}(u_2) < \dots < v_{\mathcal{B}}(u_p) \ .$$

S'il n'y a pas d'ambiguité sur la base $\mathcal{B}$, nous écrirons plus simplement $v_{\mathcal{B}}(u) = v(u)$.

Lemme 4.4.2 *Une famille de vecteurs de E échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ est une famille libre.*

Preuve : Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Soit $\lambda_i \in \mathbf{K}$, tel que :

$$(*) \quad \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \quad .$$

Notons k l'ordre de u_1 dans la base $\mathcal{B}$ et $a_{1,k} \neq 0$ la k-ième coordonnée de u_1 dans la base $\mathcal{B}$. Comme la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$, la k-ième coordonnée de $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda_1 a_{1,k}$. L'égalité $*$ donne $\lambda_1 a_{1,k} = 0$. D'où, $\lambda_1 = 0$. Itérons, nous obtenons que tous les λ_i sont nuls et la liberté de la famille $u_1, \dots, u_p$.

4.5 Algorithme pour calculer le rang d'une famille de vecteurs et une base d'un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel. Nous supposerons E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E connus par leurs cordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Nous donnerons un algorithme qui déterminera le rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ et une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ qui sera même échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et que F admet $(u_1, \dots, u_p)$ comme famille génératrice, nous avons alors $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Notre algorithme donne donc en particulier la dimension de F et une base échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ de F.

Cet algorithme sera une nouvelle fois très semblable à l'algorithme de triangulation d'un système d'équations linéaires.

Soit u et v deux vecteurs non nuls de E. Nous supposons que u est d'ordre k par rapport à la base $\mathcal{B}$ et que v est d'ordre plus grand ou´gal à k dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, si r est l'ordre de u par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{rcl} u & = & a_r e_r + \cdots + a_n e_n \qquad \text{où} \quad a_r \neq 0 \\ v & = & b_r e_r + \cdots + b_n e_n \end{array} .$$

Le vecteur

$$v' = v - \frac{b_r}{a_r} u = (b_{k+1} - \frac{b_r}{a_r} a_{k+1}) e_{k+1} + \cdots + (b_n - \frac{b_r}{a_r} a_n) e_n$$

est dit déduit de v en utilisant u pour faire monter le poids de v par rapport à base $\mathcal{B}$. Nous remarquons que v'est d'ordre supérieur ou égal à $r+1$ ou nul. Notons que $v' = v$ si v est déjà d'ordre d'ordre supérieur ou égal à $r+1$.

Notation 4.5.1 *Soit $u_1, u_2, \dots, u_p$ des vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Désignons par $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ la matrice dons la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Notons $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u_j) = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$. De sorte que $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est la matrice de terme général $a_{i,j}$.*

Détaillons maintenant l'algorithme qui précisera à partir de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base échelonnée de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Nettoyage : Si tous les u_i sont nuls, $F = \{0\}$. Sinon, quitte à enlever les vecteurs nuls de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et ou à permuter ces vecteurs, nous pouvons supposer les u_i sont non nuls et $v_{\mathcal{B}}(u_1) \leq v_{\mathcal{B}}(u_2) \leq \dots \leq v_{\mathcal{B}}(u_p)$.

Ainsi :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \quad ; \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Si $v_{\mathcal{B}}(u_1) < v_{\mathcal{B}}(u_2) < \dots < v_{\mathcal{B}}(u_p)$ la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre. C'est donc une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. FIN

Sinon, pour un certain entier k : $v_{\mathcal{B}}(u_1) < v_{\mathcal{B}}(u_2) < \dots < v_{\mathcal{B}}(u_k) = v_{\mathcal{B}}(u_{k+1}) = r \leq \dots \leq v_{\mathcal{B}}(u_p)$.

Passage à l'étape suivante : Nous utilisons u_k pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants $u_{k+1}, \dots, u_p$:

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k, u'_{k+1}, \dots, u'_p) \quad ; \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_k, u'_{k+1}, \dots, u'_p)$$

où pour $j > k$:

$$u'_j = u_j - \frac{a_{r,j}}{a_{r,k}} u_k \quad \text{et} \quad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u'_j) = \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u_j) - \frac{a_{r,j}}{a_{r,k}} \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u_k) \ .$$

Notons ainsi que les k premières colonnes de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_k, u'_{k+1}, \dots, u'_p)$ sont les mêmes que celles de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et que pour $j > k$ la j-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_k, u'_{k+1}, \dots, u'_p)$ est j-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ moins $\dfrac{a_{r,j}}{a_{r,k}}$ fois la k-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Reste à itérer : nettoyage, passage à étape suivant. En moins de n ou p étapes, l'algorithme se termine. Nous obtenons une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exemple 1 : Notons $E = \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$:

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \quad .$$

Soit $u_1 = (2,1,0), u_2 = (-1,2,1), u_3 = (3,4,1), u_4 = (0,5,2)$. Notons F le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de E. Déterminons une base de F.

Étape 1 : Puisque (a,b,c) sont les coordonnées de (a,b,c) dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, nous avons d'une part : $v(u_1) = v(u_2) = v(u_3) < v(u_4)$. Ainsi, le point de dṕart est :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille de vecteurs non nul ordonnée. Il n'a rien à nettoyer.

Étape 2 : Nous utilisons u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$F = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u'_1 = u_1 & u'_2 = u_2 + (1/2)u_1 & u'_3 = u_3 - (3/2)u_1 & u'_4 = u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

On a $v(u'_1) < v(u'_2) = v(u'_3) = v(u'_4)$.

La famille (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) est une famille de vecteurs non nul ordonnée. Il n'a rien à nettoyer.

Étape 3 : Nous utilisons u'_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$F = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u''_1 = u'_1 & u''_2 = u'_2 & u''_3 = u'_3 - u'_2 & u''_4 = u'_4 - 2u'_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad .$$

On a $v(u''_1) < v(u''_2)$ et $u''_3 = u''_4 = 0$. Retirons les deux vecteurs nuls :

$$F = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2) M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2) = \begin{pmatrix} u''_1 = u'_1 & u''_2 = u'_2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2) \ .$$

Nous avons $v(u''_1) < v(u''_2)$: L'algorithme est terminé et la famille

$$(u''_1 = 2e_1 + e_2 = (2,1,0), u''_2 = (5/2)e_2 + e_3 = (0, 5/2, 1))$$

est donc une base de F échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

De plus, on peut observer que :

$$\begin{array}{ccccccc} (2,1,0) & = & u''_1 & = & u'_1 & = & u_1 \\ (0,5/2,1) & = & u''_2 & = & u'_2 & = & u_2 + (1/2)u_1 \\ 0 & = & u''_3 & = & u'_3 - u'_2 = u_3 - (3/2)u_1 - (u_2 + (1/2)u_1) & = & u_3 - u_2 - 2u_1 \\ 0 & = & u''_4 & = & u'_4 - 2u'_2 = u_4 - 2(u_2 + (1/2)u_1) & = & u_4 - 2u_2 - u_1 \end{array}$$

L'algorithme donne en plus les relations entre les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4. :

$$0 = u_3 - u_2 - 2u_1 \quad \text{et} \quad 0 = u_4 - 2u_2 - u_1 \ .$$

4.6 Système d'équations d'un sous-espace vectoriel relativement à une base

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Proposition 4.6.1 *Considérons un système linéaire homogène de m équations linéaires à n inconnues.*

$$(*)\quad \left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

où les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbf{K}$.
Suivant le cours de fondements 1, un algorithme nous donne une base $(u_1, \ldots, u_p)$ des solutions de $*$. Notons, alors v_i le vecteur de E de coordonnées u_i dans la base $\mathcal{B}$. Alors, la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre. L'ensemble F des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions de $*$ est un sous-espace vectoriel de E de base $(v_1, \ldots, v_p)$.

Preuve : Montrons que $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre. Soit $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$ tels que :

$$a_1v_1 + \cdots + a_pv_p = 0_E \ .$$

Passons en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, nous obtenons :

$$a_1u_1 + \cdots + a_pu_p = 0_{\mathbf{R}^n} \ .$$

Il en résulte : $a_1 = \ldots = a_p = 0$.

Montrons que $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. Par définition de F, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} v \in F & \Longleftrightarrow & \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \\ & \Longleftrightarrow & \textit{il existe } a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K} \text{ tels que } \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) = a_1u_1 + \cdots + a_pu_p \\ & \Longleftrightarrow & \textit{il existe } a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K} \text{ tels que } v = a_1v_1 + \cdots + a_pv_p \\ & \Longleftrightarrow & F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) \ . \end{array}$$

Donc, $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre et génératrice de F, c'est une base de F.

Définition 4.6.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Nous disons qu'un système d'équations linéaires homogènes $*$ est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ si F est constitué des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions du système $*$. Autrement dit, $*$ est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ si et seulement su*

$$v \in F \Longleftrightarrow \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) \textit{ solution de } * \ .$$

Problème : Soit F sous-espace vectoriel de E dont $*$ est un système d'équations relativemment à la base $\mathcal{B}$. détreminer une base de F.

Cas Particulier $E = \mathbf{R}^n$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique : Rappelons que si m $u \in \mathbf{R}^n$, u est égal à ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Le sous espace vectoriel F n'est alors autre que l'espace vectoriel des solutions de $*$. L'algorithme de résolution de $*$ développé dans le cours de Fondements 1 donne une base de F.

Cas Général : L'algorithme de résolution de $*$ développé dans le cours de Fondements 1 donne une basse $(u_1, \ldots, u_p)$ des solutions de $*$. Notons, alors v_i le vecteur de E de coordonnées u_i dans la base $\mathcal{B}$. Suivant la proposition 4.6.1, $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de F. En particulier, $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Exemple. Soit E un K-espace vectoriel de dimension trois et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Considérons le système d'équations linéaires homogènes de 3 variables

$$(*) \quad \left[\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Donner une base du sous-espace vectoriel F de E d'équations $*$ dans la base $\mathcal{B}$.

Ce système est triangulé de variables libres x_1 et x_3. La dernière équation donne $x_2 = x_3$ et la première donne alors $x_1 = x_3$. Les solutions de $*$ sont alors

$$S = \{(x_3, x_3, x_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} = \{x_3(1,1,1) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \ .$$

Soit e le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors, la famille (e) réduite au vecteur e est une base de F et $F = \mathrm{Vect}(e)$.

4.7 Algorithme pour déterminer les équations d'un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Problème : Soit $u_1, \dots, u_p$ une famille de vecteurs de E connus par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, nous supposons connu $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ la matrice dons la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Le problème est de trouver un un système d'équations de $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Nous allons donner un algorithme pour donner un tel système d'équations.

Lemme 4.7.1 *Soit $u_1, \dots, u_p \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On suppose $v_{\mathcal{B}}(u_1) < \cdots < v_{\mathcal{B}}(u_p)$. Soit $u \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$u \in F \quad \text{et} \quad x_{v_{\mathcal{B}}(u_1)} = x_{v_{\mathcal{B}}(u_2)} = \cdots = x_{v_{\mathcal{B}}(u_p)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0 \quad .$$

Preuve : $\Longleftarrow$ Clair, puisque qu'un vecteur de E est nul si et seulement ses coordonnées dans une base sont nulles.
$\Longrightarrow$ Comme $u \in F$, il existe $\lambda_1, \dots \lambda_p \in K$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$. La $v_{\mathcal{B}}(u_1)$-ème coordonnée de $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$ est $\lambda_1 a_{v_{\mathcal{B}}(u_1),1}$ où $a_{v_{\mathcal{B}}(u_1),1} \neq 0$ est la $v_{\mathcal{B}}(u_1)$-ème coordonnée de u_1 dans la base $\mathcal{B}$. Comme la $v_{\mathcal{B}}(u_1)$-ème coordonnée de u est nulle, nous obtenons $\lambda_1 = 0$. Itérons, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Donc, $u = 0$.

Soit $u \in E$ d'ordre r dans la base $\mathcal{B}$ et $v \in E$, nous allons préciser ce que l'on entend par utiliser u pour annuler la r-ième coordonnée de v dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcccccl} u & = & & & a_r e_r & + & \cdots + a_n e_n \\ v & = & b_1 e_1 + \cdots + b_{r-1} e_{r-1} & + & b_r e_r & + & \cdots + b_n e_n \ , \end{array}$$

où les b_j et a_i sont dans $\mathbf{K}$ et où a_r est non nul, car u est supposé d'ordre r dans la base $\mathcal{B}$. Considérons le vecteur

$$v' = v - \frac{b_r}{a_r}u = b_1e_1 + \cdots + b_{r-1}e_{r-1} + 0e_r + (b_{r+1} - \frac{b_r}{a_r}a_{r+1})e_{r+1} + \cdots + (b_n - \frac{b_r}{a_r}a_n)e_n \ .$$

Nous disons que v' est déduit de v en utilisant u pour annuler la r-ième coordonnée de v dans la base $\mathcal{B}$.

Description de l'algorithme : En utilisant l'algorithme du paragraphe 4.5, nous pouvons supposer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$v_{\mathcal{B}}(u_1) < v_{\mathcal{B}}(u_2) \cdots < v_{\mathcal{B}}(u_p) \quad .$$

Rappelons que pour $u \in E$, l'entier $v_{\mathcal{B}}(u)$ désigne l'ordre de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Notons $a_{i,j}$ la i-ème coordonnée de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Soit $v \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Départ : $v \in F$ et $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, x)$ La dernière colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v)$ est $(x_1, \ldots, x_n)$.
Etape 1 : Utilisons u_1 pour annuler la $v_{\mathcal{B}}(u_1)$-ème coordonnée de v, nous obtenons

$$v \in F \Longleftrightarrow v(1) = v - \frac{x_{v_{\mathcal{B}}(u_1)}}{a_{v_{\mathcal{B}}(u_1),1}}u_1 \in F \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v(1)) \ .$$

La dernière colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v(1))$ est la dernière colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v)$ moins $\frac{x_{v_{\mathcal{B}}(u_1)}}{a_{v_{\mathcal{B}}(u_1),1}}$ fois sa première colonne.

Etape 2 : Utilisons u_2 pour annuler la $v_{\mathcal{B}}(u_2)$-ème coordonnée de $v(1)$. Soit $(x_{1,1}, \ldots, x_{n,1})$ les coordonnées de $v(1)$ dans la base $\mathcal{B}$, nous obtenons :

$$v \in F \Longleftrightarrow v(2) = v(1) - \frac{x_{v_{\mathcal{B}}(u_2),1}}{a_{v_{\mathcal{B}}(u_2),2}}u_2 \in F \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v(2)) \ ,$$

où $x_{v_{\mathcal{B}}(u_2),1}$ est la $v_{\mathcal{B}}(u_2)$-ème coordonnée de $v(1)$. La dernière colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v(2))$ est la dernière colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v(1))$ moins $\frac{x_{v_{\mathcal{B}}(u_2),1}}{a_{v_{\mathcal{B}}(u_2),2}}$ fois sa deuxième colonne.

Etape p : Utilisons u_p pour annuler la $v_{\mathcal{B}}(u_p)$-ème coordonnée de $v(p-1)$ Nous obtenons $v(p) \in E$ dont les $v_{\mathcal{B}}(u_1)$-ème, ... , $v_{\mathcal{B}}(u_p)$-ème coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont nulles et tel que

$$v \in F \Longleftrightarrow v(p) \in F \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p, v(p)) \ .$$

Synthèse : Suivant le lemme 4.7.1, $v \in F$ équivaut donc à $v(p) = 0$ et donc à la nullité des coordonnées de $v(p)$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous obtenons ainsi un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Remarque : Ce système est un système d'équations de $n - \dim_K F$ linéaires homogénes de n variables. En fait, en changeant l'ordre des variables, on pourrait noter que ce sysème est triangulé de variables libres :

$$x_{v_{\mathcal{B}}(u_1)}, x_{v_{\mathcal{B}}(u_2)}, ..., x_{v_{\mathcal{B}}(u_p)} \ .$$

Mais, oublions ce dernier point pour ne pas jeter de confusions....

Exemple 1 : $E = \mathbf{R}^4$, $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, 4, 3)$. Soit $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Nous nous proposons de donner un système d'équations de F relativement à $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$: $v_{\mathcal{B}}(u_1) = 1$, $v_{\mathcal{B}}(u_2) = 2$ et $v_{\mathcal{B}}(u_3) = 3$. C'est donc une base de F. Soit v de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$. .

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v \\ 1 & 0 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Étape 1 : Utillisons u_1 pour annuler la première coordonnée de v.

$$v(1) = v - x_1u_1 \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, v(1)) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v(1) = v - x_1u_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} .$$

Nous avons $v \in F$ équivaut à $v(1) \in F$.

Étape 2 : Utillisons u_2 pour annuler la deuxième coordonnée de $v(1)$.

$$v(2) = v(1) - (x_2 + x_1)u_2 \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, v(2)) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v(2) = v(1) - (x_2 + x_1)u_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} .$$

Nous avons $v \in F$ équivaut à $v(2) \in F$. De plus, on peut noter que $v(2) = v(1) - (x_2 + x_1)u_2 = u - x_1u_1 - (x_2 + x_1)u_2$.

Étape 3 : Utillisons u_3 pour annuler la troisième coordonnée de $v(2)$.

$$v(3) = v(2) - (x_3/4)u_3 \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, v(3)) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v(3) = v(2) - (x_3/4)u_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 - (3/4)x_3 \end{pmatrix} .$$

Nous avons $v \in F$ équivaut à $v(3) \in F$. Les $v_{\mathcal{B}}(u_1)$-ème, $v_{\mathcal{B}}(u_2)$-ème et $v_{\mathcal{B}}(u_3)$-ème coordonnées de $v(3)$ sont nulles.

De plus, on peut noter que $v(3) = v(2) - (x_3/4)u_3 = u - x_1u_1 - (x_2 + x_1)u_2 - (x_3/4)u_3$,

L'algorithme est terminé. Le vecteur v de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans F si et seulement si $v(3) = 0$. Donc, si et seulement si :

$$(*) \quad x_4 - x_1 - (3/4)x_3 = 0 \quad .$$

Ce système $*$ d'une seule équation homogène est donc le un système d'équations de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

De plus, nous notons que si $v \in F$, $v(3) = 0$ et :

$$v = x_1u_1 + (x_2 + x_1)u_2 + (x_3/4)u_3 \quad .$$

Cela donne les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3) de F.

4.8 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Dans cette section, E désignera un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.8.1 *(Somme de deux sous-espaces vectoriels) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Notons :*

$$F + G = \{u + v\ ;\ u \in F \text{ et } v \in G\} \subset E \quad .$$

Alors, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et de G.

Preuve : Comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$ et $0_E = 0_E + 0_E$, on a $0_E \in F + G$. Ainsi, $F + G$ est un ensemble non vide.

Soit $w_1, w_2 \in F + G$. Par définition, il existe $u_1, u_2 \in F$ et $v_1, v_2 \in G$ tels que $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ &= (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \quad . \end{aligned}$$

Or, $u_1+u_2 \in F$, car F est un sous-espaces vectoriel de E et de même $v_1+v_2 \in G$. Il en résulte $w_1+w_2 \in F+G$.

Soit $w \in F+G$ et $\lambda \in K$. Par définition, il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u+v$. Ainsi, $\lambda w = \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$. Comme $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$ (stabilité de F et G par multiplication par un scalaire), nous obtenons $\lambda w \in F+G$.

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. En général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par contre, nous pouvons noter que tout sous-espace vectoriel de E qui contient les sous-espaces vectoriels F et G contient $F+G$. Ainsi au sens de l'inclusion, $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G.

Définition 4.8.2 *(Somme directe) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Nous disons que la somme $F+G$ est directe si tout $w \in F+G$ s'écrit de façon unique $w = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Cette somme est alors notée $F \oplus G$.*

Proposition 4.8.3 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F+G \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\} \quad .$$

Preuve $\Longrightarrow$: Soit $u \in F \cap G$. Nous remarquons que $0_E = 0_E + 0_E = u + (-u)$. Or, $0_E, u \in F$ et $0_E, -u \in G$. Comme la somme $F+G$ est directe, nous obtenons : $0_E = u$ et $0_E = -u$. Ainsi, $u = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Comme $0_E \in F \cap G$, nous avons finalement $F \cap G = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$: Soit $w \in F+G$ et $w = u_1+v_1 = u_2+v_2$ deux décompositions de w comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (c.a.d. $u_1, u_2 \in F$, $v_1, v_2 \in G$). Il en résulte $u_2 - u_1 = v_1 - v_2$. Or, $u_2 - u_1 = u_2 + (-u_1) \in F$ et de même $v_1 - v_2 \in G$. Ainsi : $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 \in F \cap G$. Donc, $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = 0_E$. Donc, $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$.

Définition 4.8.4 *(Sous-espaces vectoriels suplémentaires de E) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Tout élément $w \in E$ s'écrit de façon unique $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.*
- $E = F \oplus G \quad .$
- $E = F + G$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.

Nous disons alors que F et G sont supplémentaires de E.

Lemme 4.8.5 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $F \cap G$. Complétons $(e_1, \dots, e_r)$ en $(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_l)$ base de F et complétons $(e_1, \dots, e_r)$ en $(e_1, \dots, e_r, g_{r+1}, \dots, g_m)$ base de G. Alors, $(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_l, g_{r+1}, \dots, g_m)$ est une base de $F + G$.*

Nous convenons de prendre $(e_1, \dots, e_r)$ égal à l'ensemble vide si $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.

Preuve du lemme : Montrons que $(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_l, g_{r+1}, \dots, g_m)$ engendre $F + G$. Soit $x \in F + G$, Par définition x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Comme $(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_l)$ est une base de F, y s'écrit :

$$y = y_1 e_1 + \cdots + y_r e_r + y_{r+1} f_1 + \cdots + y_{r+l} f_l \quad \text{où} \quad y_j \in \mathbf{K} \quad .$$

Comme $(e_1, \dots, e_r, g_{r+1}, \dots, g_m)$ est une base de G, z s'écrit :

$$z = z_1 e_1 + \cdots + z_r e_r + z_{r+1} g_1 + \cdots + z_{r+m} g_m \quad \text{où} \quad z_j \in \mathbf{K} \quad .$$

Il en résulte :

$$x = y + z = (y_1 + z_1) e_1 + \cdots + (y_r + z_r) e_r + y_{r+1} f_1 + \cdots + y_{r+l} f_l + z_{r+1} g_1 + \cdots + z_{r+m} g_m \quad .$$

Ainsi, tout $x \in F + G$ est combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_l, g_{r+1}, \dots, g_m)$.

Montrons maintenant que la famille $(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_l, g_{r+1}, \dots, g_m)$ est libre. Soit $x_i, y_i, z_i \in \mathbf{K}$ tels que :

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l + z_1 g_1 + \cdots + z_m g_m = 0_E \quad .$$

Il en résulte

$$x_1e_1 + \cdots + x_re_r + y_1f_1 + \cdots + y_lf_l = -z_1g_1 - \cdots - z_mg_m \in F \cap G \quad .$$

Ainsi, il existe $\lambda_i \in \mathbf{K}$ tels que

$$-z_1g_1 - \cdots - z_mg_m = \lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_re_r \quad .$$

D'où :

$$\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_re_r + z_1g_1 + \cdots + z_mg_m = 0_E \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une famille libre, nous en déduisons que les z_i sont nuls. Il vient alors :

$$x_1e_1 + \cdots + x_re_r + y_1f_1 + \cdots + y_lf_l = 0_E \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_l)$ est une base de F, il vient : $x_1 = \cdots = x_r = y_1 = \cdots = y_l = 0$. Cela montre que la famille $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est libre.

En particulier, si la somme de F et de G est directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Comme conséquence directe du lemme, nous obtenons :

Proposition 4.8.6 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On a :*

$$\dim_{\mathbf{K}}(F + G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F \cap G) \quad .$$

Corollaire 4.8.7 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Les trois conditions suivantes sont équivalentes*

- *F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.*
- $\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G \quad$ et $\quad F \cap G = \{0_E\} \quad .$

- $\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G \quad \text{et} \quad E = F + G \quad .$

Proposition 4.8.8 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors, F et G sont supplémentaires si et seulement si la reunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E.*

Preuve : On a déjà vu que si la somme de F et de G est directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G. Cela donne que si F et G sont supplémentaires une base de E s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G. La réciproque est laissée au lecteur