Exercice 1 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Posons :

$$u_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3)\ ,\ u_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3)\ ,\ u_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3) \quad .$$

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.

2) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

3) Vérifier en calculant un produit de deux matrices que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

4) Soit $u \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. Quelles sont les coordonnées de u dans le base $\mathcal{B}'$.

5) Donner sans calcul l'expression de e_1, e_2 et e_3 comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

6) Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$. Quelle est la dimension de D ? Donner un système d'équations de D relativement à la base $\mathcal{B}$. Donner un système d'équations de D relativement à la base $\mathcal{B}'$.

7) Soit P le sous-espace vectoriel de E dont un système d'équations relativement à la base $\mathcal{B}$ est $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Donner une base de P.

8) Préciser la somme $P + D$.

Exercice 2 – On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ -x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 & (E_3) \\ -x_1 & + & 7x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array}\right. \quad .$$

Nous notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire E. Donner à l'aide d'un algorithme du cours un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Montrer que ce système admet deux variables libres que l'on précisera. Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B} = (a, b)$ de F obtenue par cette méthode.

2) Soit $u = (4, 1, -1, -1)$ et $v = (0, 3, 1, -7)$. Montrer que u et v sont des vecteurs de F et que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de F. Expliciter u et v comme combinaisons linéaires des vecteurs a, b de votre base $\mathcal{B}$. Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer son inverse et expliciter les vecteurs (a, b) de la base $\mathcal{B}$ à l'aide des vecteurs (u, v).

3) Posons $w = (7, 3, 2, 2)$ et $t = (-7, 1, -2, 2)$. Nous désignons par $G = \mathrm{Vect}(w, t)$. Montrer que (w, t) est une famille libre et une base de G. Donner un système d'équation de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

4) On admettra que $\mathrm{Vect}(u, v, w, t) = \mathbf{R}^4$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 3 – Dans $\mathbf{R}^3$, considérons les trois vecteurs $u = (5, 0, 1), v = (-1, 6, 1), w = (2, 0, 4)$. Nous désignons par $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par (u, v, w).

1) A l'aide d'un algorithme du cours, donner une base de F échelonnée relativement à la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbf{R}^3$. Que pouvez vous alors dire du sous-espace vectoriel F ?

2) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 4 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 & (E_1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 & (E_2) \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 & (E_3) \end{cases} .$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes du cours (on précisera les variables libres du système triangulé intermédiaire). Donner alors une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de F. Quelle est la dimension de F ?

2) Montrer que le vecteur $w = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 2, -1)$ appartient au sous-espace vectoriel F. Donner les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de F.

3) Soit $u = 2e_1 - e_2$ et $v = 3e_1 - e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de F. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de F à la base $\mathcal{B}' = (u, v)$. Calculer P^{-1}.

4) Soit (x, y) deux réels et $e = xe_1 + ye_2$. Quelles sont les coordonnées de e dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$? Préciser à l'aide de (x, y) les coordonnées (X, Y) de e dans la base $\mathcal{B}' = (u, v)$.

5) Montre que $g = (1, 1, 1, 1)$ n'appartient pas à F. Montre que (g, u, v) est une famille libre.

6) Soit $G = \text{Vect}(g)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par g. Donner un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Déterminer $F \cap G$. Donner le dimension et une base de $F + G$.

Exercice 5 – Soit $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ sa base canonique. Posons :

$$u_1 = (1, -1, -1) \ , \ u_2 = (1, 1, 1) \ , \ u_3 = (1, -1, 1) \ .$$

Nous notons P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Calculer le déterminant de P. En déduire que P est inversible. Calculer ensuite P^{-1} l'inverse de P. Vérifier votre calcul en effectuant le produit de deux matrices.

2) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$?

3) Soit trois réels x_1, x_2, x_3. Quelles sont les coordonnées de $u = (x_1, x_2, x_3)$ dans le base $\mathcal{B}$?

4) Donner sans calcul l'expression des trois vecteurs de la base canonique comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$.

5) Soit $D = \mathrm{Vect}(1, -1, 1))$. Quelle est la dimension de D ? Donner un système d'équations de D relativement à la base canonique. Donner un système d'équations de D relativement à la base $\mathcal{B}$.

7) Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dont un système d'équations relativement à la base canonique est $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Donner une base de P.

8) Montrer que P et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$. Préciser en particulier la somme $P + D$.

Exercice 6 – On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 0 & (E_3) \\ 2x_1 & & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array} \right. .$$

Nous notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de $*$.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire $*$. Donner à l'aide d'un algorithme du cours un système triangulé $*'$ ayant les mêmes solutions que $*$. Quelles sont les deux variables libres de ce système triangulé ?

Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B} = (u, v)$ de F obtenue par cette méthode.

2) Posons $v_1 = (1, 1, 3, 2)$, $v_2 = (1, -1, 1, 0)$, $v_3 = (1, -3, -1, -2)$ et $v_4 = (-3, 1, -5, -2)$. Nous désignons par $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4. Donner suivant un algorithme du cours une base échelonnée $\mathcal{B}' = (u', v')$ de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la dimension de G ? Donner ensuite un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3) Montrer que (v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbf{R}^4$. En déduire que $\mathcal{B}'' = (v_2, v_3)$ est une base de G. Quelles sont les coordonnées de v_2 et v_3 dans la base $\mathcal{B}' = (u', v')$ de G ? En déduire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}' = (u', v')$ de G à la base $\mathcal{B}'' = (v_2, v_3)$ de G.

4) En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que $F \cap G = \{0\}$. En déduire que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 7 – On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(*)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array}\right. .$$

Nous notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de $*$.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire $*$. Donner à l'aide d'un algorithme du cours un système triangulé $*'$ ayant les mêmes solutions que $*$. Quelles sont les deux variables libres de ce système triangulé ? Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B} = (u, v)$ de F obtenue par cette méthode.

2) Posons $v_1 = (1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 3, -2, 3)$ et $v_3 = (2, 4, -3, 4)$. Nous désignons par $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3. Donner suivant un algorithme du cours une base échelonnée $\mathcal{B}' = (u', v')$ de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Quelle

est la dimension de G ? Donner ensuite un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3) Montrer que (v_1, v_2) est une famille libre de $\mathbf{R}^4$, une base de G. Quelles sont les coordonnées de v_3 dans cette base ? Le vecteur v_1 appartient-il à F ? .

4) Montrer que $F \cap G = \{0\}$. En déduire que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 8 – Nous considèrons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array} \right. .$$

Nous notons P_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire E. Donner à l'aide d'un algorithme du cours un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les deux variables libres de ce système triangulé ?

2) Résoudre alors le système E et Expliciter une base $\mathcal{B} = (u, v)$ de P_1.

Nous considèrons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(F) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_1') \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. .$$

Nous notons P_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions de E.

3) Résoudre ce système F et expliciter une base $\mathcal{B}' = (u', v')$ de P_2.

4) Déterminer $P_1 \cap P_2$. En déduire que P_1 et P_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 9 – Posons $u = (1, 2, 0)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (1, 5, 1)$. Nous désignons par $G = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs u, v, w.

1) Donner suivant un algorithme du cours une base échelonnée de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la dimension de G ? Donner ensuite un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2) Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1 = x_1 - x_2 + x_3, y_2 = 2x_1 + x_2 + 5x_3, y_3 = x_2 + x_3) \ .$$

Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$? Calculer $f(1, 0, 0)$,$f(0, 1, 0)$, et $f(0, 0, 1)$.

3) Préciser un système de générateurs de im f. Donner alors en utilisant les questions précédentes une base im f et un système d'équations de im f relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

4) Déterminer le noyau $\ker f$. Préciser notamment une base de $\ker f$ et des équations de $\ker f$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $\ker f \subset \mathrm{im}\ f$. Préciser $\ker f + \mathrm{im}\ f$.

Exercice 10 – Posons $v_1 = (2, 2, -2)$, $v_2 = (-6, 10, -2)$ et $v_3 = (-4, 4, 0)$. Nous désignons par $I = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.

1) Donner suivant le cours une base $\mathcal{B}'$ échelonnée de I relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. En déduire la dimension de I.

2) Donner alors un système d'équations de I relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $b = (2, 0, -1)$ et $c = (-1, 1, 0)$ sont des éléments de I.

Exercice 11 –

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes du cours (on précisera les variables libres du système triangulé intermédiaire). Donner alors une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de F. Quelle est la dimension de F ?

2) Montrer que les vecteurs $w = (5, -5, 1, 3)$ appartiennt au sous-espace vectoriel F. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ de F obtenue à la première question.

3) Soit $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 2, 2)$. Nous considérons $G = \mathrm{Vect}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs u et v. Montrer que la famille (u, v) est libre et est une base de G. Donner une base échelonnée de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Puis, donner un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

4) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Au passage, rappeler la définition de sous-espaces supplémentaires.

Exercice 12 – 'On considère le système d'équations linéaires homogènes à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lclclcll} 2x_1 & - & 6x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & E_1 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 4x_3 & = & 0 & E_2 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 & E_3 \end{array}\right. .$$

Nous notons K le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ formé des solutions de E.

1) Préciser l'ordre des variables du système linéaire E, puis l'ordre de E_1, E_2 et E_3. À l'aide de l'algorithme du cours, donner un système triangulé $\tilde{E}$ ayant les mêmes solutions que E. Précisez la seule variable libre de

ce système triangulé.

2) Résoudre ce système. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de K. Expliciter deux éléments de K.