Cours de Fondements Mathématiques 2

Sous-espaces Vectoriels
Cours II

Exercice 1 – Nous considérons l'équation linéaire homogène :

$$(*) \quad \left[\; x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \right. \quad .$$

1) Nous supposons que H est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé par les solutions de $*$ (ou encore d'equation $*$ dans la base canonique $\mathbf{R}^4$). Donner une base de H.
2) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Nous supposons que L est le sous-espace vectoriel de E d'équations $*$ relativement à $\mathcal{B}$. Donner une base de L.

Exercice 2 – Nous considérons le système d'équations linéaires :

$$(**) \quad \left[\begin{array}{lllllllllll} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 2x_1 & - & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 5x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

1) Nous supposons que F est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé par les solutions de $**$ (ou encore d'équation $**$ dans la base canonique $\mathbf{R}^4$). Donner une base de F.
2) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Nous supposons que G est le sous-espace vectoriel de E d'équations $**$ relativement à $\mathcal{B}$. Donner une base de G.

Exercice 3 – (Exercice de l'examen de mai 2019) Posons $v_1 = (2, 2, -2)$, $v_2 = (-6, 10, -2)$ et $v_3 = (-4, 4, 0)$. Nous désignons par $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.
1) Donner suivant le cours une base $\mathcal{B}'$ échelonnée de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. En déduire la dimension de F.
2) Donner alors un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $b = (2, 0, -1)$ et $c = (-1, 1, 0)$ sont des éléments de F.

Exercice 4 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u de coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ et v de coordonnées $(-2, 1, 1)$.
1) Montrer que $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est un plan vectoriel de E de base (u, v) (c.a.d. un sous-espace vectoriel de dimension 2) .
2) Donner une base échelonnée de P relativement à la base $\mathcal{B}$ de P.
2) Donner un système d'équations de ce plan P relativement à la base $\mathcal{B}$.
3) Soit $w = -e_1 + 8e_2 + 11e_3$, montrer que $w \in P$. Quelles sont les coordonnées de w dans la base (u, v) ?
4) Montrer que $w' = -e_1 + 8e_2 + 10e_3 \notin P$. Puis, que (u, v, w') est une base de E.

Exercice 5 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E tels que $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v_1) = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v_2) = (3, 1, 0, 1)$ et $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v_3) = (2, 1, 1, 1)$. Nous désignons par $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de E formé des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.
1) Donner suivant un algorithme du cours une base échelonnée de G relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Quelle est la dimension de G ?
2) Donner ensuite un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathcal{B}$.

Exercice 6 – Considérons P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + 3z = 0$ et les sous-espaces vectoriels $D = \mathrm{Vect}((1, 1, 2))$ et $D' = \mathrm{Vect}((1, 1, 3))$ de $\mathbf{R}^3$.
1) Montrer que P et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
2) Donner des équations définissant les sous-espaces vectoriels D et D' et une base de P.
3) Expliciter la décomposition du vecteur $(1, 0, 0)$ comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de P.
4) Plus généralement, soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Expliciter la décomposition de u comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D.
4) Préciser $D \cap D'$. Déterminer une base et des équations $D + D'$, puis de $P \cap (D + D')$.

Exercice 7 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère H le sous-espace vectoriel de E d'équation $x + y + 2z + 2t = 0$ relativent à la base $\mathcal{B}$ et D le sous-espace vectoriel des multiples du vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.
1) Expliciter une base de H.
2) Montrer que H et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
3) Expliciter la décomposition du vecteur e_1 comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de H.
4) Plus généralement, soit (x, y, z, t) les coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$. Écrire explicitement ce vecteur comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de D.
5) Soit (a, b, c, d) les coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que H et $\mathrm{Vect}(u)$ soient supplémentaires.

Exercices supplémentaires

Exercice 8 – Soit S le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites de nombres réels. Soit :

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad ; \quad \forall n \geq 2 \quad : \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\} \subset S$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de S.
2) Montrer qu'il existe deux réels distincts que l'on déterminera λ_1, λ_2 tels que les suites :

$$s_1 = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad s_2 = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$$

appartiennent à F.
3) Montrer que (s_1, s_2) est une base de F.
4) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de F définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Déterminer les coordonnées de u dans la base (s_1, s_2). En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 9 – Soit $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ et $a_0,\dots,a_n \in \mathbf{R}$. L'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0$ est appelée fonction polynomiale de degré $\leq n$. Notons E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq n$.
1) Montrer que $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2) Si $f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f. Montrer que

$$F_n = \{f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \quad ; \quad f^{(n+1)} = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
3) En utilisant le fait qu'une fonction dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, montrer par récurrence sur n que $E_n = F_n$.
4) En calculant ses dérivées successives, montrer que si f est une fonction polynomiale de degré $\leq n$, il existe $a_0,\dots,a_n \in \mathbf{R}$ uniques appelés coefiicients de f tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0$$

5) En déduire une base de E_n.

6) Hors concours : Le nombre π étant la surface d'un cercle de rayon 1. Ferdinand Lindemmann a montré en 1882 qu'il n'existe pas de fonction polynomiale non identiquement nulle et à coefficients rationels qui s'annule en π. On dit que le nombre π est transcendant. En déduire que pour tout entier n, la famille $(1,\pi,\pi^2,\dots,\pi^n)$ est une famille libre de l'ensemble des nombres réels considéré naturellement comme espace vectoriel sur le corps des rationels. En déduire que le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ n'admet pas de famille génératrice fini.
Pour l'histoire, l'existence de nombres transcendants résulte du fait qu'il n'existe pas de bijection entre l'ensemble des nombres réels et celui des entiers naturels (Georg Kantor, 1874) et on doit a Joseph Liouville d'avoir exhibé en 1844 les premiers nombres transcendants.

Exercice 10 – Notons par $\mathcal{F}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
1) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) de $\mathcal{F}$ formé des fonctions paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
2) Soit $\tau : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto \tau(x) = -x$. Montrer que f est paire si et seulement si $f \circ \tau = f$ et que f est impaire si et seulement si $f \circ \tau = -f$. Constater que pour tout $f, g \in \mathcal{F}$:

$$(f+g)\circ\tau = f\circ\tau + g\circ\tau \quad \text{et} \quad (-f)\circ\tau = -(f\circ\tau)$$

3) Soit $f \in \mathcal{F}$, $a \in \mathcal{P}$ et $b \in \mathcal{I}$ tels que $f = a + b$. Déterminer a et b à l'aide de f et $f \circ \tau$.
4) Monter que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
5) Ecrire les applications suivantes comme somme d'une fonction paire et somme d'une fonction impaire :

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto f_1(x) = \sin(x^3) \quad , \quad f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto f_2(x) = e^x \ .$$