Développements limités

Table des matières

Développements limités 1
1. Définitions et généralités 4
2. Le théorème de Taylor-Young 10
3. Opérations sur les développements limités 13
3.1. Somme et multiplication par un réel 13
3.2. Développement limité d'un produit 15
3.3. Division en puissances croissantes de fonctions polynomiales 19
3.4. Développement limité d'un quotient 21
3.5. Quelques cas élémentaires de développement limité de fonctions composées 23
3.6. Développement limité et composition d'applications 25
3.7. Développement limité d'une primitive 30
4. Utilisation des développements limités 33
4.1. Pour le calcul de limites 33
4.2. Pour l'étude des propriétés locales de la représentation graphique d'une fonction 36

1. Définitions et généralités

Commençons par quelques rappels. Soient a_0, a_1, …, a_n des réels. La fonction $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est appelée une ***fonction polynomiale***.

Pour $\ell \leq n$, $a_\ell x^\ell$ est appelé ***terme*** ou ***monome de degré*** ℓ de P.

Les réels a_0, a_1, …, a_n sont appelés les ***coefficients*** de P. Si $a_n \neq 0$, nous dirons que P est de ***degré*** n.

Notons que P est dérivable pour tout x et $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$.

Enfin $P = 0$ si et seulement si $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$.

Définition* 1.1** (développement limité en 0)**.** — Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $I =]\alpha, \beta[$. Supposons que $0 \in I$, c'est-à-dire $\alpha < 0 < \beta$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Nous dirons que f admet un ***développement limité (**D.L.**) ***en*** 0 ***à l'ordre*** n s'il existe des réels a_0, a_1, …, a_n et une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

La fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est appelée la ***partie régulière*** du développement limité.

La fonction

$$I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n = x^n\varepsilon(x)$$

est appelée le ***reste*** du développement limité.

***Remarque* 1.2.** — Toute fonction polynomiale $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kx^k$ admet un développement limité à tout ordre en 0 :

— si $n \geq d$, alors la partie régulière du D.L. d'ordre n en 0 de f est f et le reste la fonction nulle ;

— si $n < d$, alors la partie régulière du D.L. d'ordre n en 0 de f est $\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$ et le reste est

$$\sum_{k=n+1}^{d} a_kx^k = x^n \underbrace{\sum_{k=1}^{d-n} a_{k+n}x^k}_{\varepsilon(x)}$$

Autrement dit si $n \in \mathbb{N}$ et si f est une fonction polynomiale, le polynôme P obtenu en supprimant les monomes de f dont le degré excède n (s'il en existe) est un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0.

***Remarque* 1.3.** — Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ admettant un développement limité en 0 à l'ordre n. Il existe donc des réels a_0, a_1, …, a_n et une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

Soit λ un réel. Notons $g\colon I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \lambda f(x)$. Nous avons encore pour tout $x \in I$

$$g(x) = \lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \ldots + \lambda a_nx^n + x^n(\lambda\varepsilon(x)). \tag{1.1}$$

Nous avons encore : $\lim_{x\to 0} \lambda\varepsilon(x) = 0$. Ainsi $g = \lambda f$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n donné par (1.1).

***Remarque* 1.4.** — Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $I =]\alpha, \beta[$. Supposons que 0 appartienne à I. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n. Il existe donc des réels a_0, a_1, …, a_n et une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

Notons $g\colon]-\beta, -\alpha[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(-x)$. Nous avons encore pour tout $x \in]-\beta, -\alpha[$

$$g(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + \ldots + (-1)^na_nx^n + (-1)^nx^n\varepsilon(-x). \tag{1.2}$$

Nous avons encore $\lim_{x\to 0} \varepsilon(-x) = 0$. Ainsi g admet un développement limité en 0 à l'ordre n donné par (1.2).

***Définition* 1.5** (D.L. en a)**.** — Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $I =]\alpha, \beta[$. Supposons que $a \in I$, c'est-à-dire $\alpha < 0 < \beta$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Nous dirons que f admet un **développement limité (D.L.) en a à l'ordre n** s'il existe des réels a_0, a_1, …, a_n et une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

La fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$ est appelée la **partie régulière** du développement limité.

La fonction

$$I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) - a_0 - a_1(x-a) - a_2(x-a)^2 - \ldots - a_n(x-a)^n = (x-a)^n\varepsilon(x)$$

est appelée le **reste** du développement limité.

Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $I =]\alpha, \beta[$. Supposons que $a \in I$, c'est-à-dire $\alpha < a < \beta$. Nous avons $\alpha - a < 0 < \beta - a$ de sorte que $0 \in]\alpha - a, \beta - a[$.

> Dire que $f\colon]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ admet pour D.L. en a à l'ordre n
> $$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \varepsilon(x)(x-a)^n$$
> où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

équivaut à

> dire que $f\colon]\alpha - a, \beta - a[\to \mathbb{R}$, $h \mapsto f(a+h)$ admet pour D.L. en 0 à l'ordre n
> $$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_nh^n + \varepsilon(a+h)h^n$$
> où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(a+h) = 0$.

On passe de la première à la seconde situation en remplaçant x par $a+h$ et on passe de la seconde situation à la première en remplaçant $a+h$ par x ou encore h par $x-a$.

Développement limité et approximation : soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soient $I =]\alpha, \beta[$, $a \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f admette un D.L. en a à l'ordre n. Soient a_0, a_1, …, a_n des réels et $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière du D.L.}} + \underbrace{\varepsilon(x)(x-a)^n}_{\substack{\text{reste du D.L. qui est une « quantité proche} \\ \text{de 0 quand } x \text{ est proche de } a \text{ »} \ \times (x-a)^n}}$$

On peut penser à cette écriture comme une approximation d'ordre n de $f(x)$ au voisinage de a.

***Exemple* 1.6.** — Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 3 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - x^3$. Pour h réel :

$f(\sqrt{3}+h) = (\sqrt{3}+h) - (\sqrt{3}+h)^3 = \sqrt{3} + h - 3\sqrt{3} - 9h - 3\sqrt{3}h^2 - h^3 = -2\sqrt{3} - 8h - 3\sqrt{3}h^2 - h^3$.

C'est un polynôme en h. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(\sqrt{3}+h)$ est donc

$$f(\sqrt{3}+h) = -2\sqrt{3} - 8h - 3\sqrt{3}h^2 + \varepsilon(h)h^2.$$

où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Le développement limité à l'ordre 2 en 3 de la fonction f est donc :

$$f(x) = x - x^3 = -2\sqrt{3} - 8(x-\sqrt{3}) - 3\sqrt{3}(x-\sqrt{3})^2 + \varepsilon(x)(x-\sqrt{3})^2$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

***Exemple* 1.7.** — Déterminons le développement limité à l'ordre 5 en π de la fonction $f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{\pi - x}$.

Considérons $f_0\colon t \mapsto f(\pi+t)$; alors

$$f_0(t) = \frac{\sin(\pi+t)}{-t} = \frac{\sin(t)}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + t^4\varepsilon(t)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Alors le développement limité à l'ordre 5 en π de la fonction f est

$$f(x) = 1 - \frac{(x-\pi)^2}{6} + \frac{(x-\pi)^4}{120} + (x-\pi)^4\widetilde{\varepsilon}(x)$$

où $\widetilde{\varepsilon}$ désigne une fonction définie au voisinage de π telle que $\lim_{x\to\pi} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$.

***Proposition* 1.8.** — *Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soient $I =]\alpha, \beta[$, $a \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f admet un D.L. d'ordre n en a de partie régulière*

$$P = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n,$$

alors f admet un D.L. d'ordre $\ell < n$ en a de partie régulière

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_\ell(x-a)^\ell.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout $x \in I$ $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$. Pour $\ell < n$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_\ell(x-a)^\ell \\ &\quad + (x-a)^\ell\Big(a_{\ell+1}(x-a) + a_{\ell+2}(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^{n-\ell} + (x-a)^{n-\ell}\varepsilon(x)\Big). \end{aligned}$$

Il reste à constater que
$$\lim_{x\to a}\Big(a_{\ell+1}(x-a)+a_{\ell+2}(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^{n-\ell}+(x-a)^{n-\ell}\varepsilon(x)\Big)=0$$
pour observer que nous avons un D.L. de f en a d'ordre ℓ. $\square$

***Exemple* 1.9.** — Considérons la fonction
$$f\colon]-1,1[\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto\frac{1}{1-x}.$$
Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que f admet un D.L. à l'ordre n en 0.

Pour x réel
$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)=1-x^{n+1}$$
d'où pour $x\in]-1,1[$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\frac{x}{1-x}\,x^n.$$
Considérons la fonction
$$\varepsilon\colon]-1,1[\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto\frac{x}{1-x}.$$
Pour $x\in]-1,1[$ nous avons d'une part
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$
et d'autre part $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

***Remarque* 1.10.** — Attention le développement limité d'une fonction peut être nul à tout ordre en 0 sans que la fonction soit elle-même nulle sur un voisinage ; c'est par exemple le cas de la fonction définie par
$$x\mapsto\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

***Proposition* 1.11.** — *La partie régulière et le reste du développement limité à l'ordre n en a d'une fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$ sont uniques.*

Démonstration. Soient a_0, a_1, …, a_n, b_0, b_1, …, b_n des réels, $\varepsilon_1\colon I\to\mathbb{R}$, $\varepsilon_2\colon I\to\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x)=\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x)=0$ tels que pour tout $x\in I$
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon_1(x)\\ &= b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_n(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon_2(x)\end{aligned}$$
Par différence pour tout $x\in I\smallsetminus\{a\}$ nous avons
$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)(x-a)+(a_2-b_2)(x-a)^2+\ldots+(a_n-b_n)(x-a)^n+\Big(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)\Big)(x-a)^n=0.$$
Faisons tendre x vers a : nous obtenons $a_0-b_0=0$ soit $a_0=b_0$.

Divisons par $(x-a)$; nous obtenons pour tout $x\in I\smallsetminus\{a\}$
$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)(x-a)+\ldots+(a_n-b_n)(x-a)^{n-1}+\Big(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)\Big)(x-a)^{n-1}=0. \tag{1.3}$$

Faisons tendre x vers a ; nous obtenons $a_1 - b_1 = 0$, soit $a_1 = b_1$. Nous itérons et obtenons $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, ..., $a_n = b_n$. De (1.3) nous déduisons enfin que $\varepsilon_1(x)(x-a)^n = \varepsilon_2(x)(x-1)^n$ pour tout $x \in I$. $\square$

***Corollaire* 1.12.** — *Soit $\alpha > 0$ un réel. Soit $f\colon]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n.*

Si f est paire, alors la partie régulière de ce développement limité en 0 est paire.

Si f est impaire, alors la partie régulière de ce développement limité en 0 est impaire.

DÉMONSTRATION. Rappelons que la fonction $f\colon]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ est paire si $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$.

La fonction $f\colon]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$.

L'énoncé résulte des Remarques 1.3 et 1.4. $\square$

***Remarques* 1.13.** — Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soient $I =]\alpha, \beta[$, $a \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$.

— La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en a.

Le développement limité de f est alors $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)(x-a)$ où $_lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

— La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

Le développement limité de f est alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$$

où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Montrons que si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité d'ordre 1 en a. Soit $\tau\colon I \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; notons que $\lim\limits_{x\to a} \tau(x) = f'(a)$. Considérons la fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} x \mapsto \varepsilon(x) = \tau(x) - f'(x) \text{ pour tout } x \in I \smallsetminus \{a\} \\ a \mapsto 0 \end{cases}$$

Nous obtenons que

- ◇ $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$,
- ◇ pour $x \in I \smallsetminus \{a\}$ nous avons $(x-a)\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ soit $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$; mais cette égalité est aussi vraie pour $x = a$ donc pour tout $x \in I$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$$
où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Conséquences de la remarque :

— Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre $n \geq 0$ en a, alors f est continue en a et dans la partie régulière du développement limité $a_0 = f(a)$.

— Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ alors f est dérivable en a et les deux premiers termes de ce développement limité sont

$$f'(a)(x-a) + f(a), \text{c'est-à-dire } a_0 = f(a) \text{ et } a_1 = f'(a).$$

— Une fonction qui n'est pas continue en 0 n'admet de développement limité à aucun ordre en 0.

***Exemple* 1.14.** — Considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 \ln|x|.$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x \ln|x| = 0$ la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Il s'en suit que f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 de partie régulière 0.

***Remarque* 1.15.** — Considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrons que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
   Notons $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous avons : $0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq x$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Par suite pour tout x réel

$$f(x) = x + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   Ainsi la fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 de partie régulière x. Elle est donc en particulier continue en 0 et dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 1$.

b) Montrons que f n'admet pas de dérivée seconde en 0.
   Calculons $f'(x)$ pour $x \neq 0$. Posons $u(x) = \frac{1}{x^2}$ alors $u'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Nous avons

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' = \Big(\sin(u(x))\Big)' = u'(x)\cos(u(x)) = -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

   Finalement pour $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3\left(-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

   Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3\left(-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \text{ pour } x \neq 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

   Si $f''(0)$ existait, $f'(x)$ serait continue en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$; donc pour toute suite $(u_n)_n$ tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, nous aurions $\lim\limits_{x\to 0} f'(u_n) = 1$. Posons $u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$; alors $\frac{1}{u_n^2} = 2\pi n$ et

$$f'(u_n) = 1 + \frac{3}{2\pi n}\sin(2\pi n) - 2\cos(2\pi n)$$

   d'où $f'(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = -1$: impossible. Par conséquent $f'(x)$ n'est pas continue en 0 et $f''(0)$ n'existe pas.

2. Le théorème de Taylor-Young

L'énoncé suivant assure que sous certaines conditions un développement limité existe toujours.

***Théorème* 2.1** (Formule de Taylor-Young)**.** — *Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soient $I =]\alpha, \beta[$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Soit $n \geq 2$ un entier et soit $a \in I$. Supposons que f soit $n-1$ fois dérivable sur I et que f admette une dérivée d'ordre n en a.*

Alors f admet comme développement limité à l'ordre n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

où $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ désigne une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

***Conséquence* 2.2.** — *Si f est une fonction infiniment dérivable sur un intervalle I, alors f possède des développements limités à tout ordre en tout point a de I.*

Développement limité en 0 de $\exp(x)$ **:** la formule de Taylor-Young pour la fonction $x \mapsto \exp(x)$ à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Démonstration. la fonction $\exp(x)$ est dérivable à tout ordre. Pour tout x réel $\exp'(x) = \exp(x)$. En itérant nous obtenons pour tout entier k et tout réel x que $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$ et en particulier $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$. Il reste à appliquer la formule de Taylor-Young.

Développement limité en 0 de $\exp(-x)$ **:** la formule de Taylor-Young pour la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Développements limités en 0 de $\sin(x)$ **et** $\cos(x)$ **:** la formule de Taylor-Young pour la fonction $x \mapsto \sin(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 s'écrit

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

La formule de Taylor-Young pour la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre $2n$ en 0 s'écrit

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Démonstration. Les fonctions sin et cos sont dérivables à tout ordre. Pour tout x réel

$$(\sin(x))' = \cos(x) \text{ et } (\cos(x))' = \sin(x).$$

En itérant il en résulte que par récurrence pour tout entier k et tout réel x

$$\sin^{(2k)}(x) = (-1)^k\sin(x), \quad \sin^{(2k+1)}(x) = (-1)^k\cos(x),$$

$$\cos^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x), \quad \cos^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin(x).$$

En particulier pour tout entier k :

$$\sin^{(2k)}(0) = 0, \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0.$$

Il reste à appliquer la formule de Taylor-Young.

Développement limité en 0 de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$: soit $f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \ln(1+x)$, la formule de Taylor-Young pour la fonction f donne

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Soit $g\colon]-\infty,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \ln(1-x)$, la formule de Taylor-Young pour la fonction g donne

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

où ε désigne une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Démonstration. La fonction $f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ est indéfiniment dérivable. Notons que $f(0) = 0$. Nous obtenons par récurrence pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et tout entier $k \geq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Il en résulte pour tout entier $k \geq 1$: $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Ainsi pour tout entier $k \geq 1$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^n = (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

Il reste à écrire la formule de Taylor-Young.

Pour obtenir le développement limité en 0 de g il suffit d'utiliser la Remarque 1.4.

Développements limités en 0 de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$: soit $f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}$. La formule de Taylor-Young pour la fonction f assure que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Soit $g\colon]-\infty,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x}$, la formule de Taylor-Young pour la fonction f assure que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Développements limités en 0 de $\mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$: ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et infiniment dérivables. Les formules de Tayloy-Young pour ces fonctions assurent que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\mathrm{ch}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

où ε sont des fonctions définies au voisinage de 0 telles que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Rappel : les coefficients binomiaux. Nous rappelons la formule de Pascal qui précise le développement en somme de monomes de $(1+x)^n$ pour tout réel x et pour tout entier n.

Convention :

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \times 1, \quad \ldots \quad n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq n$ nous avons $\binom{n}{0} = 1! = 1$ et pour $1 < j \leq n$ nous avons $\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!}$. De plus

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}.$$

Pour x réel nous avons les égalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^2 & = & 1 + 2x + x^2 \\ (1+x)^3 & = & 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\ (1+x)^4 & = & 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1 \end{array}$$

Rappel : Formule de Pascal (1654). Pour tout réel x et pour tout entier n

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^p + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}x^p + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

Conséquence sur le développement limité de

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (1+x)^n$$

- ◇ pour $k \geq n$: la partie régulière du développement limité de $(1+x)^n$ à l'origine d'ordre k est donnée par le développement de Pascal et son reste est nul ;
- ◇ pour $k < n$: la partie régulière du développement limité de $(1+x)^n$ à l'origine d'ordre k est

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + x^k\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

De Pascal à Newton. Soit α un réel. Considérons la fonction

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Cette fonction est infiniment dérivable de dérivée $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Par récurrence pour tout entier k et tout réel $x \in]-1, +\infty[$:

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad \text{et} \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1).$$

Il en résulte en suivant la formule Taylor-Young :

Formule de Newton. Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ d'ordre n à l'origine est

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{x!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Suivant la Remarque 1.4 le développement limité de $(1-x)^\alpha$ d'ordre n à l'origine est

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{x!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$ puis $\alpha = -\frac{1}{2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

***Remarque* 2.3.** — La formule de Taylor-Young assure qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 admet des développements limités de tout ordre en 0. La réciproque est fausse.

3. Opérations sur les développements limités

3.1. Somme et multiplication par un réel.

***Proposition* 3.1.** — *Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $I =]\alpha, \beta[$. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur I, $a \in I$ et k un nombre réel.*

Supposons que f et g aient un développement limité d'ordre n en a. Alors $f+g$ et kf ont un développement limité d'ordre n en a.

Plus précisément si pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x) \\
g(x) &= b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$.

Alors pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)(x-a) + \ldots + (a_n+b_n)(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et

$$(kf)(x) = kf(x) = ka_0 + ka_1(x-a) + \ldots + ka_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

où ε désigne par chaque formule une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

Idée de démonstration. Dire que f admet un développement limité en a à l'ordre n c'est dire que pour tout $x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)$$

où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x) = 0$.

De même dire que g admet un développement limité en a d'ordre n c'est dire que

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$. Il en résulte que pour tout $x \in I$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)(x-a)+\ldots+(a_n+b_n)(x-a)^n+(x-a)^n(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)$.

Considérons $\varepsilon \colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$; nous avons $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) + \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0 + 0 = 0$. Ainsi pour tout $x \in I$ nous avons

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)(x-a)+\ldots+(a_n+b_n)(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

La seconde assertion fait l'objet de la Remarque 1.3. $\square$

***Exemple* 3.2.** — Considérons la fonction

$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x + \frac{x^3}{3} + x^7 + 2\sin(x)$$

Donnons le développement limité de h en 0 à l'ordre 6.

Soient

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x + \frac{x^3}{3} + x^7$$

et

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sin(x).$$

Remarquons que $h = f + 2g$. À partir de

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ nous obtenons

$$2g(x) = 2x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + 2x^6\varepsilon_1(x).$$

De plus

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^6\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Il en résulte que

$$h(x) = 3x + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3!}\right)x^3 + \frac{2}{5!}x^5 + x^6\varepsilon_3(x)$$

soit

$$h(x) = 3x + \frac{2}{5!}x^5 + x^6\varepsilon_3(x)$$

où $\varepsilon_3(x) = 2\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$; en particulier $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

***Exemple* 3.3.** — Considérons la fonction f donnée par

$$]-1,1[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Donnons le développement limité de f en 0 à l'ordre 6.

Rappelons que

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+x^6\varepsilon_1(x)\\ \ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+x^6\varepsilon_2(x)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$. Nous en déduisons que

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}-x^6\varepsilon_2(x)$$

puis que

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))x^6$$

et enfin que

$$\frac{1}{2}\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_1(x)}{2}-\frac{\varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\varepsilon(x)}x^6$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Or $f(x)=\frac{1}{2}\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)$ donc

$$f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+x^6\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Généralisation : soient f_1, f_2, …, $f_p\colon I\to\mathbb{R}$ des fonctions, k_1, k_2, …, k_p des réels et a un point de I. Si f_1, f_2, …, f_p ont des développements limités en a d'ordre n, alors $k_1f_1+k_2f_2+\ldots+k_pf_p$ admet un développement limité en a d'ordre n dont la partie régulière est

$$\begin{aligned}&k_1\times\text{partie régulière du D.L. de } f_1+k_2\times\text{partie régulière du D.L. de } f_2\\ &\quad+\ldots+k_p\times\text{partie régulière du D.L. de } f_p\end{aligned}$$

3.2. Développement limité d'un produit.

***Proposition* 3.4.** — *Soient α et β deux réels tels que $\alpha<\beta$. Posons $I=]\alpha,\beta[$. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur I. Soit a un point de I. Fixons $n\in\mathbb{N}$.*

Si f et g admettent comme développement limité en a d'ordre n

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon_1(x)\\ g(x) &= b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_n(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon_2(x)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x)=\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x)=0$, alors $(fg)(x)=f(x)g(x)$ admet un développement limité en a d'ordre n dont la partie régulière s'obtient en conservant les monomes $(x-a)^k$ avec $k\le n$ dans le produit des parties régulières des développement limité F et G de f et g en a d'ordre n.

Méthode de calcul : FG est le produit

$$\Big(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n\Big)\Big(b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n\Big).$$

Gardons les monomes en $(x-a)^k$ avec $k \leq n$ dans ces sommes :

$$\begin{array}{r} a_0b_0 + a_0b_1(x-a) + a_0b_2(x-a)^2 + \ldots + a_0b_n(x-a)^n \\ a_1b_0(x-a) + a_1b_1(x-a)^2 + \ldots + a_1b_{n-1}(x-a)^n \\ a_2b_0(x-a)^2 + a_2b_1(x-a)^3 + \ldots + a_2b_{n-2}(x-a)^n \\ \vdots \\ a_{n-1}b_0(x-a)^{n-1} + a_{n-1}b_1(x-a)^n \\ a_nb_0(x-a)^n \end{array}$$

Faisons la somme de ces monomes « restants »,nous obtenons la partie régulière du développement limité de fg en a à l'ordre n :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-a) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-a)^2 \\ &\quad + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_pb_{n-p} + \ldots + a_nb_0)(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

***Proposition* 3.5.** — *Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Posons $I =]\alpha, \beta[$. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur I. Soit a un point de I. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et soient $p \leq n$ et $q \leq n$ deux entiers.*

Si f admet comme développement limité en a d'ordre $n-q$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

Si g admet comme développement limité en a d'ordre $n-p$

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Alors $(fg)(x) = f(x)g(x)$ admet un développement limité en a d'ordre n. Et si F désigne la partie régulière du développement limité de f en a à l'ordre $n-q$, si G désigne la partie régulière du développement limité de g en a à l'ordre $n-p$, alors la partie régulière du développement limité de fg en a à l'ordre n s'obtient en conservant les monomes $(x-a)^k$ avec $k \leq n$ dans le produit FG.

***Exemple* 3.6.** — Calculons le développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$h\colon]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (1 - x + x^2 + x^5)\frac{1}{1+x}.$$

Posons

$$f\colon]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 1 - x + x^2 + x^5$$

et

$$g\colon]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

Notons que $h(x) = f(x)g(x)$.

Le développement limité de f en 0 à l'ordre 5 est

$$f(x) = 1 - x + x^2 + x^5;$$

par troncature le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 est

$$f(x) = 1 - x + x^2 + x^3\varepsilon_1(x);$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Le développement limité de g en 0 à l'ordre 3 est

$$g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Pour obtenir le développement limité de $f(x)g(x)$ en 0 à l'ordre 3 on ne conserve que les monomes x^k avec $k \leq 3$ dans le produit $(1 - x + x^2)(1 - x + x^2 - x^3)$. Nous obtenons

$$\begin{array}{r} 1 - x + x^2 - x^3 \\ -x + x^2 - x^3 \\ x^2 - x^3 \end{array}$$

ainsi $1-2x+3x^2-3x^3$ est la partie régulière du développement limité de fg en 0 à l'ordre 3. Autrement dit

$$f(x)g(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 3x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

***Exemple* 3.7.** — Calculons le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction

$$h\colon]-1,1[\to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto \sqrt{1+x}\,\ln(1+x).$$

Posons

$$f\colon]-1,1[\to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto \sqrt{1+x}$$

et

$$g\colon]-1,1[\to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto \ln(1+x).$$

Notons que $h(x) = f(x)g(x)$.

Rappelons que pour α réel

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Ainsi pour $\alpha = \frac{1}{2}$ nous obtenons

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. De plus

$$g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

Il en résulte que le développement limité de h en 0 à l'ordre 3 s'obtient en ne gardant que les monomes en x^k, $k \leq 3$, dans le produit

$$\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right).$$

Ces termes sont

$$\begin{array}{l} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \\ \quad\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4} \\ \qquad -\frac{1}{8}x^3 \end{array}$$

ainsi $x-\frac{x^3}{24}$ est la partie régulière du développement limité de fg en 0 à l'ordre 3. Autrement dit

$$f(x)g(x)=\sqrt{1+x}\ln(1+x)=x-\frac{x^3}{24}+x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

***Exemple* 3.8.** — Donnons le développement limité en 0 à l'ordre 12 de la fonction

$$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto h(x)=(x^7+x^8)\sin(x).$$

Il existe une fonction ε_1 définie sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$ telle que pour tout x réel

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon_1(x).$$

Il en résulte que pour tout x réel :

$$h(x)=(x^7+x^8)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon_1(x)\right).$$

Soit

$$\begin{aligned} h(x) &= x^8-\frac{x^{10}}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+x^{12}\varepsilon_1(x) \\ &\quad +x^9-\frac{x^{11}}{3!}+\frac{x^{13}}{5!}+x^{13}\varepsilon_1(x) \\ &= x^8+x^9-\frac{x^{10}}{3!}-\frac{x^{11}}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\frac{x^{13}}{5!}+x^{12}\varepsilon_1(x)+x^{13}\varepsilon_1(x) \\ &= x^8+x^9-\frac{x^{10}}{3!}-\frac{x^{11}}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+x^{12}\underbrace{\left(\frac{x}{5!}+\varepsilon_1(x)+x\varepsilon_1(x)\right)}_{\varepsilon(x)} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Nous aurions pu traiter cet exemple à l'aide de la Proposition 3.5 en observant que la fonction polynomiale x^7+x^8 admet un développement en 0 à l'ordre 11 de la partie régulière x^7+x^8.

3.3. Division en puissances croissantes de fonctions polynomiales.

La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est polynomiale si pour tout réel x il existe a_0, a_1, …, a_n des réels tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n;$$

notons que $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, …, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Supposons que f soit non nulle. Rappelons que le **degré** de f est par définition

$$m = degf = \sup\{i \in \mathbb{N} \,|\, a_i \neq 0\}.$$

Introduisons la ***valuation de*** f

$$\ell = \mathrm{val}(f) = \inf\{i \in \mathbb{N} \,|\, a_i \neq 0\}.$$

Nous avons l'inégalité $\ell \leq m$.

***Exemple* 3.9.** — Si $f(x) = -2x^3 + 5x^7 - x^{17}$, alors $\mathrm{val}(f) = 3$ et $\deg f = 17$.

***Remarque* 3.10.** — Si f est une fonction non nulle, alors $\mathrm{val}(f) \geq \ell$ si et seulement si f s'écrit sous la forme $x^\ell v$ où v est une fonction polynomiale.

***Lemme* 3.11.** — *Soit $p \leq n$, ℓ trois entiers. Soient u et v deux fonctions polynomiales telles que*

$$\begin{array}{rcl} u & = & a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_nx^n \\ g & = & b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_\ell x^\ell \end{array}$$

et $\mathrm{val}(u) \geq p$, $b_0 = g(0) \neq 0$. *Alors*

$$u = \frac{a_p}{g(0)}x^pg + x^{p+1}v$$

avec v une fonction polynomiale.

Démonstration.

$$\begin{array}{lcl|l} u & = & a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_nx^n & g = g(0) + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_\ell x^\ell \\ \cline{4-4} \frac{a_p}{g(0)}x^pg & = & a_px^p + \frac{a_p}{g(0)}b_1x^{p+1} + \ldots & \\ \cline{1-3} & & & \frac{a_p}{g(0)}x^p \\ u - \frac{a_p}{g(0)}x^pg & = & \left(a_{p+1} - \frac{a_p}{g(0)}b_1\right)x^{p+1} + \ldots & \end{array}$$

□

***Proposition* 3.12** (Division en puissances croissantes)**.** — *Soient f et g deux fonctions polynomiales. Supposons que $g(0) \neq 0$ (c'est-à-dire que $\mathrm{val}(g) = 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$.*

Il existe deux fonctions polynomiales uniques q et v telles que

$$f = \underbrace{q}_{\substack{\text{quotient de la division} \\ \text{à l'ordre } n}} g + x^{n+1} \underbrace{v}_{\substack{\text{reste d'ordre } n \\ \text{de la division}}}$$

avec $\deg q \leq n$ *ou* $q = 0$.

Démonstration. Démontrons cet énoncé par récurrence sur n :

- $\diamond$ Écrivons f sous la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$. Le Lemme 3.11 assure que

$$f = \frac{a_0}{g(0)}g + xv$$

avec $\deg\left(\frac{a_0}{g(0)}\right) = 0$ ou $\frac{a_0}{g(0)} = 0$.

- $\diamond$ Supposons que f s'écrive sous la forme

$$f = qg + x^{n+1}v$$

où v désigne une fonction polynomiale et où $\deg q \leq n$ ou $q = 0$. Le Lemme 3.11 assure que

$$x^{n+1}v = \frac{v(0)}{g(0)}x^{n+1}g + x^{n+2}\underbrace{u}_{\text{polynomiale}}$$

Par conséquent

$$f = \underbrace{\left(q + \frac{v(0)}{g(0)}x^{n+1}\right)}_{\text{polynomiale de de degré} \leq n+1} g + x^{n+1}\underbrace{u}_{\text{fonction polynomiale}}$$

$\square$

***Exemple* 3.13.** — Divisons en puissances croissantes $1 + x$ par $1 + x^2$ à l'ordre 2. Nous obtenons pour tout x réel :

$$1 + x = (1 + x - x^2)(1 + x^2) + x^3(-1 + x). \tag{3.1}$$

Donnons comme application un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Notre division (3.1) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{x^3(-1+x)}{1+x^2} = 1 + x - x^2 + \frac{x(-1+x)}{1+x^2}x^2.$$

Posons pour tout x réel

$$\varepsilon(x) = \frac{x(-1+x)}{1+x^2}.$$

Remarquons que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Nous avons donc pour tout x réel :

$$f(x) = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1+x}{1+x^2}$ est

$$\frac{1+x}{1+x^2} = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

***Exemple* 3.14.** — Divisons en puissances croissantes $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ à l'ordre 5. Nous obtenons pour tout x réel

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + x^6\left(\frac{19x}{360} - \frac{2x^3}{15\times 4!}\right) \tag{3.2}$$

La fonction $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ est non nulle à l'origine et continue (car polynomiale). Il existe donc un intervalle I contenant l'origine sur lequel cette fonction est non nulle. Donnons comme application de notre division un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction g définie par

$$g\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}$$

Notre division (3.2) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\,\frac{\frac{19x^2}{360}-\frac{2x^4}{15\times 4!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}.$$

Posons pour tout $x \in I$:

$$\varepsilon(x) = \frac{\frac{19x^2}{360}-\frac{2x^4}{15\times 4!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}} = x^2\,\frac{\frac{19}{360}-\frac{2x^2}{15\times 4!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}.$$

Remarquons que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Nous avons donc pour tout x réel

$$g(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Par suite le développement limité à l'ordre 5 en 0 de g est

$$g(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x).$$

3.4. Développement limité d'un quotient.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha<\beta$. Posons $I=]\alpha,\beta[$. Soient $f\colon I\to\mathbb{R}$ et $g\colon I\to\mathbb{R}$ deux fonctions telles que g ne s'annule pas sur I. Considérons le quotient

$$\frac{f}{g}\colon I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

***Proposition* 3.15** (Cas où $0\in I$). — *Si f et g ont des développement limité en 0 à l'ordre n de parties régulières F et G, alors $\frac{f}{g}$ a un développement limité en 0 à l'ordre n de partie régulière*

- *la partie régulière du développement limité de $\frac{F}{G}$ en 0 à l'ordre n ;*

  ou encore
- *Q le quotient de la division en puissances croissantes d'ordre n de F par G : ce quotient Q est caractérisé par*

  $$F = QG + x^{n+1}u$$

  avec $\deg Q \leq n$ *ou* $Q=0$.

Donnons quelques explications. Soit la division en puissances croissantes de F par G à l'ordre n

$$F = QG + x^{n+1}u$$

avec $\deg Q \leq n$ ou $Q = 0$. Nous avons $G(0) = g(0) \neq 0$. Donc au voisinage de 0

$$\frac{F(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{x^{n+1}u(x)}{G(x)} = Q(x) + x^n \underbrace{\left(\frac{xu(x)}{G(x)}\right)}_{\varepsilon(x)}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi le développement limité de $\frac{F}{G}$ en 0 à l'ordre n est

$$\frac{F(x)}{G(x)} = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

***Remarque* 3.16** (Précisons la Proposition)**.** — Si $F = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_n x^n$, alors le quotient de la division en puissances croissantes d'ordre n de F par G est le même que le quotient de la division en puissances croissantes d'ordre n de F par la partie régulière $\overline{G}$ du développement limité de g d'ordre $n - p$.

***Remarque* 3.17** (Cas $a \in I$)**.** — Si f et g ont des développement limité en a à l'ordre n de parties régulières F et G, alors $\frac{f}{g}$ a un développement limité en a à l'ordre n. La partie régulière du développement limité de $\frac{f}{g}$ en a à l'ordre n est Q le quotient de la division en puissances croissantes de $(x-a)^k$ d'ordre n de F par G caractérisé par

$$F = QG + (x-a)^{n+1}u$$

avec $\deg Q \leq n$ ou $Q = 0$.

***Remarque* 3.18** (Cas $a \in I$)**.** — Le quotient $\frac{f}{g}$ a un développement limité en a d'ordre n si et seulement si la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$ admet un développement limité en 0 d'ordre n.

La partie régulière du développement limité de $\frac{f}{g}$ en a d'ordre n est alors $Q(x-a)$ où Q est la partie régulière du développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$.

***Exemple* 3.19.** — Donnons le développement limité en 0 à l'ordre 5 de

$$\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad\qquad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Notons que la fonction cos ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_1(x) & \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0 \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x) & \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

est la partie régulière du développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 5 en 0 et

$$G(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

est la partie régulière du développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre 5 en 0.

Or la division en puissances croissantes de F par G à l'ordre 5 est (Exemple **??**)

$$F = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) G + x^6 \left(\frac{19x}{360} - \frac{2x^3}{15 \times 4!}\right)$$

donc le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5 est

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3.5. Quelques cas élémentaires de développement limité de fonctions composées.

Soit $r > 0$ un réel. Posons $I =]-r, r[$ de sorte que $0 \in I$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que f admette un développement limité en 0 d'ordre n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(1) Soit k un réel. Si $k > 0$, on pose $J = \left]-\frac{r}{k}, \frac{r}{k}\right[$ et si $k < 0$, on pose $J = \left]\frac{r}{k}, -\frac{r}{k}\right[$. La fonction

$$J \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(kx)$$

admet un développement limité en 0 d'ordre n donné par

$$f(kx) = a_0 + ka_1x + k^2a_2x^2 + \ldots + k^na_nx^n + x^n\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

(2) Soit $m \geq 1$ un entier. Posons $J =]-r^{1/m}, r^{1/m}[$. La fonction

$$J \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x^m)$$

admet un développement limité en 0 d'ordre nm donné par

$$f(x^m) = a_0 + a_1x^m + a_2x^{2m} + \ldots + a_nx^{nm} + x^{mn}\varepsilon_2(x)$$

ec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Démonstration du second point. Pour tout $x \in I$ nous avons

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent pour tout $x \in J$ nous avons

$$f(x^m) = a_0 + a_1x^m + a_2x^{2m} + \ldots + a_nx^{mn} + x^{mn}\varepsilon(x^m) \tag{3.3}$$

Posons $\varepsilon_2(x) = \varepsilon(x^m)$. Alors $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et (3.3) est un développement limité en 0 à l'ordre mn de $f(x^m)$. $\square$

***Exemple* 3.20.** — Soit α un réel. Considérons les fonctions

$$f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1-3x)^\alpha$$

et

$$g\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1-3x^2}.$$

Donnons un développement limité de f en 0 à l'ordre 3. Rappelons que $]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ admet pour développement limité en 0 à l'ordre 3

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. En prenant $k=-3$ nous obtenons via le premier résultat :

$$(1-3x)^\alpha = 1-3\alpha x+\frac{9}{2}\alpha(\alpha-1)x^2-\frac{27}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3+x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Donnons un développement limité de g en 0 à l'ordre 6.

D'après ce qui précède nous avons en particulier ($\alpha=-\frac{1}{2}$)

$$\sqrt{1-3x} = 1-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\frac{27}{16}x^3+x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Alors d'après le second résultat (avec $m=2$) nous obtenons

$$\sqrt{1-3x^2} = 1-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{8}x^4-\frac{27}{16}x^6+x^6\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

***Exemple* 3.21.** — Soit α un réel. Considérons les fonctions

$$f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (1-x)^\alpha$$

et

$$g\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1-x^2}.$$

- ◇ Donnons un développement limité de f en 0 à l'ordre n.

  Rappelons que

  $$]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (1+x)^\alpha$$

  admet pour développement limité en 0 à l'ordre n

  $$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

  avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. En prenant $k=-1$ nous obtenons via le premier résultat,

  $$(1-x)^\alpha = 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

  avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

◇ Donnons un développement limité de g en 0 à l'ordre 6.
D'après ce qui précède nous avons en particulier ($\alpha = -\frac{1}{2}$)

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$$

avecc $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors d'après le second résultat (avec $m = 2$) nous obtenons

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + x^6\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3.6. Développement limité et composition d'applications.

Soient α, β, γ et δ quatre réels tels que $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$. Posons $I =]\alpha, \beta[$ et $J =]\gamma, \delta[$. Soient $a \in I$, $b \in J$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y)$.

Supposons que $b = f(a)$ et que pour $x \in I$ nous avons $f(x) \in J$. Nous pouvons alors considérer

$$g \circ f\colon I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

***Proposition* 3.22.** — *Supposons que*

◇ *f admet un développement limité en a à l'ordre n de partie régulière*

$$F(x) = b + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

◇ *g admet un développement limité en b à l'ordre n de partie régulière*

$$G(x) = b_0 + b_1(y-b) + b_2(y-b)^2 + \ldots + b_n(y-b)^n$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière s'obtient en conservant les monomes en $(x-a)^k$ avec $k \leq n$ dans le développement de $G(F(x))$:

$$\begin{aligned} b_0 &+ b_1\Big(a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n\Big) \\ &+ b_2\Big(a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n\Big)^2 \\ &+ \ldots + b_n\Big(a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n\Big)^n \end{aligned}$$

***Exemples* 3.23** (Exemples d'applications). — Soient u et v deux réels tels que $u < v$. Posons $I =]u, v[$. Soit $a \in I$. Considérons une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que $h > 0$ sur I et que h admette un développement limité en a d'ordre n.

Soit

$$f\colon I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \frac{h(x) - h(a)}{h(a)}.$$

On remarque que $f(a) = 0$ et $f(x) > -1$ pour $x \in I$.

Soit α un réel.

- développement limité de $h(x)^\alpha$ en a.
  Soit
  $$g\colon]-1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad y\mapsto g(y)=h(a)^\alpha(1+y)^\alpha.$$
  Remarquons que $g\circ f$ a bien un sens : si x appartient à I, alors $f(x)$ appartient à $]-1,+\infty[$. De plus g admet un développement limité en 0 d'ordre n (donné par Newton). Considérons
  $$g\circ f\colon I\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto g\circ f(x)=g(f(x))=h(x)^\alpha;$$
  la Proposition 3.22 assure que $h(x)^\alpha$ admet un développement limité en a d'ordre n que l'on calcule à partir de celui de h.
- développement limité de $\ln(h(x))$ en a. Soit
  $$g\colon]-1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad y\mapsto g(y)=\ln(h(a))+\ln(1+y).$$
  Remarquons que $g\circ f$ a bien un sens : si x appartient à I, alors $f(x)$ appartient à $]-1,+\infty[$. De plus g admet un développement limité en 0 d'ordre n. Considérons
  $$g\circ f\colon I\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto g\circ f(x)=g(f(x))=\ln(h(x));$$
  la Proposition 3.22 assure que $\ln(h(x))$ admet un développement limité en a d'ordre n que l'on calcule à partir de celui de h.

***Remarque* 3.24** (Remarque pour $\alpha=-1$)**.** — Pour $\alpha=-1$, alors $h(x)^\alpha=\frac{1}{h(x)}$. Nous obtenons un moyen de déterminer un développement limité de $\frac{1}{h(x)}$ en a à l'ordre n. Un autre moyen est de calculer le quotient de la division en puissances croissantes de $(x-a)$ de 1 par h.

plus détaillé chez Philippe

***Exemple* 3.25.** — Donnons le développement limité de
$$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$$
en 0 à l'ordre 4.

Considérons les fonctions
$$f\colon x\mapsto x^2 \qquad g\colon x\mapsto \frac{1}{1+x};$$
notons que $h=g\circ f$. Nous avons
$$f(x)=x^2+x^4\varepsilon_1(x)$$
où $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. Comme ce développement limité commence par du x^2 il nous suffit d'avoir le développement limité de g en $0=f(0)$ d'ordre 2
$$g(x)=1-x+x^2-x^3+x^4+x^4\varepsilon_2(x)$$
où $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$. La partie régulière du développement limité de f en 0 à l'ordre 4 est $F(x)=x^2$. La partie régulière du développement limité de g en 0 à l'ordre 2 est $G(x)=1-x+x^2$. Nous avons $G(F(x))=1-x^2+x^4$. La Proposition 3.22 assure que
$$g(f(x))=\frac{1}{1+x^2}=1-(x^2)+(x^2)^2+x^4\varepsilon_3(x)=1-x^2+x^4+x^4\varepsilon_3(x)$$
où ε_3 est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0$.

***Exemple* 3.26.** — Donnons le développement limité de

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \exp(\sin(x))$$

en 0 à l'ordre 4.

Rappelons les développements limités en 0 à l'ordre 4 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_1(x) \qquad \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x)$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions définies au voisinage de 0 telles que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. De plus $\sin(0) = 0$. D'après la Proposition 3.22 la partie entière du développement limité de h en 0 à l'ordre 4 est

$$1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{3!}\right) + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}.$$

Il en résulte le développement limité de $\exp(\sin(x))$ en 0 à l'ordre 4 :

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_3(x)$$

où ε_3 est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

***Exemple* 3.27.** — Donnons le développement limité de

$$h\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

au voisinage de 0 à l'ordre 6. Écrivons h sous la forme $g \circ f$ avec $g(u) = \frac{1}{1-u}$ et $f(x) = 1 - \cos(x)$. D'une part

$$g(u) = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u)$$

d'autre part

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon(x).$$

De plus $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ d'où

$$\begin{aligned}
h(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^3 + x^6\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{8} + x^6\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)x^6 + x^6\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + x^6\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

***Exemple* 3.28.** — Déterminons le développement limité de $h(x) = \ln(\cos x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 6. On peut écrire $h = g \circ f$ avec $g(u) = \ln(1-u)$ et $f(x) = 1 - \cos x$. D'une part le développement limité de f en 0 à l'ordre 6 est

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon(x).$$

D'autre part le développement limité de g en $f(0)=0$ à l'ordre 3 est

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} h(x) &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^3 + x^6\varepsilon(x) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{3}\frac{x^6}{8} + x^6\varepsilon(x) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + x^6\varepsilon(x) \end{aligned}$$

***Exemple* 3.29.** — Donnons le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction

$$h\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1-\sin(x)}.$$

Considérons

$$f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin(x)$$

et

$$g\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \frac{1}{1-y}$$

Notons que $f(0)=0$ et que si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, alors $-1 < \sin x < 1$ de sorte que $g \circ f$ est défini sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Nous constatons que

$$g \circ f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad (g\circ f)(x) = g(f(x)) = h(x)$$

i.e. $g \circ f = h$. La fonction h est dérivable à tout ordre comme composée de telles fonctions. Par suite h admet un développement limité en 0 à tout ordre. Donnons deux solutions.

Solution 1

Le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 est

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. La partie régulière de ce développement limité est $F(x) = x - \frac{x^3}{3!}$.

Le développement limité de g en 0 à l'ordre 3 est

$$g(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^3\varepsilon(y)$$

avec $\lim_{y\to 0} \varepsilon(y) = 0$. La partie régulière de ce développement limité est $G(y) = 1 + y + y^2 + y^3$. Ainsi $h(x) = g \circ f(x)$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 3 dont la partie régulière s'obtient en conservant les monomes x^k, $k \leq 3$, dans le développement de

$$G(F(x)) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3.$$

Nous obtenons
$$1 + x - \frac{x^3}{3!} + x^2 + x^3 = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3.$$
Par conséquent
$$\frac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$
avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

<u>*Solution 2*</u>

Nous passerons par une division en puissance croissante. Le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $1 - \sin(x)$ est
$$1 - x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$
avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. De plus $1 - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$. Donc $\frac{1}{1-\sin(x)}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 dont la partie régulière est le quotient de 1 par $1 - x + \frac{x^3}{3!}$ en puissances croissantes à l'ordre 3. Il s'en suit que
$$\frac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$
avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

***Exemple* 3.30.** — Donnons un développement limité de
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto 1 - \cos(2x)$$
au voisinage de 0 à l'ordre 5.

La fonction f est dérivable à tout ordre. D'après le Théorème de Taylor-Young f admet un développement limité en tout réel à tout ordre. Donnons trois solutions.

<u>*Solution 1*</u>

Le théorème de Taylor-Young assure que le développement limité de f en 0 à l'ordre 5 est
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$
avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Calculons $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$. Rappelons que $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin u(x)$ et $(\sin u(x))' = u'(x)\cos u(x)$. Ainsi
$$f(x) = 1 - \cos(2x) \qquad f'(x) = -(-2\sin(2x)) = 2\sin(2x) \qquad f''(x) = 4\cos(2x)$$
$$f^{(3)}(x) = -8\sin(2x) \qquad f^{(4)}(x) = -16\cos(2x) \qquad f^{(5)}(x) = 32\sin(2x)$$
donc
$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 4 \qquad f^{(3)}(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = -16 \qquad f^{(5)}(0) = 0$$
et
$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad \frac{f''(0)}{2!} = 2 \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 0 \qquad \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = 0.$$
Il en résulte que
$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

<u>*Solution 2*</u>
À partir de

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} cos(2x) & = & 1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}+(2x)^5\varepsilon(2x) \\ & = & 1-2x^2+\dfrac{16}{24}+x^5\varepsilon_1(x) \\ & = & 1-2x^2+\dfrac{2}{3}x^4+x^5\varepsilon_1(x) \end{array}$$

avec $\varepsilon_1(x)=2^5\varepsilon(2x)$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. Finalement

$$\begin{array}{rcl} 1-\cos(2x) & = & 1-\Big(1-2x^2+\dfrac{2}{3}x^4+x^5\varepsilon_1(x)\Big) \\ & = & 1-1+2x^2-\dfrac{2}{3}x^4-x^5\varepsilon_1(x) \\ & = & 2x^2-\dfrac{2}{3}x^4+x^5\varepsilon_2(x) \end{array}$$

avec $\varepsilon_2(x)=-\varepsilon_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$.

<u>*Solution 3*</u>
Notons que $1-\cos(2x)=2\sin^2(x)=f(g(x))$ avec $f(x)=2x^2$ et $g(x)=\sin(x)$. D'une part le développement limité de g en 0 à l'ordre 1 est $x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)$, d'autre part le développement limité de f en 0 à l'ordre 5 est f. De plus $g(0)=\sin(0)=0$. Par suite le développement limité de $f(g(x))$ en 0 est

$$2x^2-\frac{2}{3}x^4+x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

3.7. Développement limité d'une primitive. Soient α et β deux réels tels que $\alpha<\beta$, $I=\,]\alpha,\beta[$ et $a\in I$. Considérons la fonction

$$f\colon I\to\mathbb{R},\qquad\qquad x\mapsto f(x).$$

***Proposition* 3.31.** — *Soit n un entier. Supposons que f admette*
- *un développement limité en a d'ordre n*

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

  avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.
- *une primitive.*

Alors toute primitive F de f admet un développement limité en a d'ordre $n+1$. Ce développement limité est

$$F(x) = \underbrace{F(a) + a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}}_{\text{primitive de la partie régulière du développement limité de } f \text{ qui vaut } F(a) \text{ en } a} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

***Corollaire* 3.32.** — *Supposons que f admette un développement limité en a d'ordre n*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Si f' admet un développement limité en a à l'ordre $n-1$, alors le développement limité de f' est

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\varepsilon_3(x)$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon_3(x) = 0$.

***Exemple* 3.33.** — Considérons

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction h est dérivable à tout ordre donc admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

Notons H la primitive de h nulle en 0 :

$$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Soit

$$g\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Le développement limité de g en 0 à l'ordre n est

$$g(x) = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Par suite pour tout réel

$$g(x^2) = h(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x^2)$$

avec $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x^2)$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Ainsi le développement limité de h en 0 à l'ordre $2n$ est

$$h(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. D'après la Proposition 3.31 la fonction H admet un développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$

$$H(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \ + x^{2n+1}\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Rappel : la fonction

$$\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tan(x)$$

est une bijection dérivable.

Son application inverse ou réciproque est

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

De plus arctan est dérivable et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction H est la fonction arctan.

***Exemple* 3.34.** — Soit

$$F\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad F(x) = \ln(\cos x) \qquad F(0) = 0.$$

La fonction F est dérivable à tout ordre. Donnons le développement limité de F en 0 à l'ordre 6.

$$F'\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad F'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Ainsi $F = -\int_0^x \tan(t)\,dt$.

Nous avons vu que le développement limité de tan en 0 à l'ordre 5 est

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. La Proposition 3.31 assure que le développement limité de $\int_0^x \tan(t)\,dt$ à l'ordre 6 est

$$\int_0^x \tan(t)\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + x^6\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Nous en déduisons le développement limité de $\ln(\cos(x)) = -\int_0^x \tan(t)\,dt$:

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + x^6\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Autre méthode : $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1)$ et on voit alors cette fonction comme une fonction composée.

***Exemple* 3.35.** — Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$; la fonction f est dérivable au voisinage de 0 et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. On a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. La Proposition 3.31 assure que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + x^n \widetilde{\varepsilon}(x)$$

où $\widetilde{\varepsilon}$ est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$.

***Exemple* 3.36.** — Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1-x)$; la fonction f est dérivable au voisinage de 0 et $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$. On a

$$-\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. D'après la Proposition 3.31

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + x^n \widetilde{\varepsilon}(x)$$

où $\widetilde{\varepsilon}$ est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$.

***Exemple* 3.37.** — La fonction $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière

$$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Sa dérivée $f'\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ donc f' admet des développements limités à tout ordre en 0. Par conséquent la partie régulière du développement limité de f' à l'ordre $n-1$ en 0 est

$$-1 + 2x + \ldots + (-1)^n n x^{n-1}.$$

4. Utilisation des développements limités

4.1. Pour le calcul de limites.

***Lemme* 4.1.** — *Soient λ et μ deux réels non nuls. Soient ℓ, m dans $\mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons*

$$h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\lambda(x-a)^\ell}{\mu(x-a)^m} = \frac{\lambda}{\mu}(x-a)^{\ell-m}$$

Alors

- ◇ *si $\ell = m$, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \dfrac{\lambda}{\mu}$;*
- ◇ *si $\ell > m$, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$;*
- ◇ *si $\ell < m$ et $\ell - m$ est pair, alors*
  - *si $\frac{\lambda}{\mu} > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = +\infty$;*
  - *si $\frac{\lambda}{\mu} < 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$;*
- ◇ *si $\ell < m$ et $\ell - m$ est impair, alors*

- *si* $\frac{\lambda}{\mu} > 0$, *alors* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} h(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} h(x) = -\infty$;
- *si* $\frac{\lambda}{\mu} < 0$, *alors* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} h(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} h(x) = +\infty$.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Posons $I =]\alpha, \beta[$. Soient $a \in I$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ et $g \colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g ont comme développement limité en a à l'ordre n

$$\begin{aligned} f(x) &= a_\ell (x-a)^\ell + a_{\ell+1}(x-a)^{\ell+1} + \ldots + a_n (x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \\ g(x) &= b_m (x-a)^m + b_{m+1}(x-a)^{m+1} + \ldots + b_n (x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$. Nous supposons $a_\ell \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

***Proposition* 4.2.** — *Il existe $r > 0$, $]a-r, a+r[\subset I$ tels que g ne s'annule pas sur $]a-r, a+r[\smallsetminus \{a\}$. La fonction*

$$\frac{f}{g} \colon]a-r, a+r[\smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}, \qquad\qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

est bien définie et $\frac{f(x)}{g(x)}$ et $\frac{a_\ell (x-a)^\ell}{b_m (x-a)^m}$ ont même limite quand x tend vers a. Ces limites sont donnés par le Lemme 4.1.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. Nous avons

$$f(x) = a_\ell (x-a)^\ell \left(1 + \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell}(x-a) + \frac{a_{\ell+2}}{a_\ell}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_\ell}(x-a)^{n-\ell} + (x-a)^{n-\ell}\frac{\varepsilon_1(x)}{a_\ell}\right)$$

en particulier $u \colon I \to \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$. Ainsi

$$f(x) = a_\ell (x-a)^\ell u(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$; de même

$$g(x) = b_m (x-a)^m v(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} v(x) = 1$. □

***Exemple* 4.3.** — Considérons la fonction

$$h \colon]-1, +\infty[\smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1 + \frac{3}{2}x}}{x^2 + x^3}$$

Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

Rappelons que pour α réel

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. En particulier

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt[3]{1+x} &= (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x} &= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + x^2\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

avec dans chacun des cas $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Le numérateur de h s'écrit alors

$$\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x} = \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Le dénominateur de h s'écrit alors

$$x^2 + x^3 = x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. La Proposition 4.2 assure que

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{8}x^2}{x^2} = \frac{1}{8}.$$

***Exemple* 4.4.** — Considérons la fonction f donnée par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x}$$

Déterminons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x} &= \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \\
&= x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} \\
&= x\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

Or nous avons pour $h > -1$:

$$\sqrt[3]{1+h^3} = 1 + \frac{h^3}{3} + h^3\varepsilon_1(h)$$

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon_2(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$. Nous avons donc :

$$\sqrt[3]{1+h^3} - \sqrt{1+h} = -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon_3(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$. Il en résulte pour $x > 0$ assez grand :

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Nous en déduisons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

***Exemple* 4.5.** — Calculons la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(3x)-\sin(2x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. Nous utilisons le développement limité à l'ordre 2 des fonctions $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$: nous avons $\sin(3x) = 3x + x^2\varepsilon(x)$ et $\sin(2x) = 2x + x^2\eta(x)$ où ε et η sont deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Nous obtenons alors pour tout x réel

$$\frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{x} = \frac{3x + x^2\varepsilon(x) - 2x - x^2\eta(x)}{x} = 1 + x\big(\varepsilon(x) - \eta(x)\big).$$

Nous pouvons ainsi conclure : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{x} = 1$.

4.2. Pour l'étude des propriétés locales de la représentation graphique d'une fonction.

4.2.1. *Courbes représentatives.*

Soit $\alpha < \beta$ deux réels et I l'intervalle $]\alpha, \beta[$. Considérons une application $f\colon I \to \mathbb{R}$. Considérons $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous identifions un couple de réels (x, y) avec le point M de coordonnées (x, y). Nous désignons par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f :

$$\mathcal{C}_f = \big\{(x,y) \,|\, x \in I \text{ et } y = f(x)\big\}.$$

La courbe représentative de f définit deux sous-ensembles du plan. Les points $\mathcal{C}_f^+$ au-dessus du graphe de f définis par :

$$\mathcal{C}_f^+ = \big\{(x,y) \,|\, x \in I \text{ et } y \geq f(x)\big\}.$$

Les points $\mathcal{C}_f^-$ au-dessus du graphe de f définis par :

$$\mathcal{C}_f^- = \big\{(x,y) \,|\, x \in I \text{ et } y \leq f(x)\big\}.$$

Soit g une deuxième application $g\colon I \to \mathbb{R}$. Nous dirons que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ si $\mathcal{C}_g \subset \mathcal{C}_f^+$ et nous dirons que $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ si $\mathcal{C}_g \subset \mathcal{C}_f^-$. Si J est un intervalle contenu dans I, nous dirons que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur J si

$$\big\{(x,y) \,|\, x \in J \text{ et } y \geq g(x)\big\} \subset \mathcal{C}_f^+.$$

Nous dirons que $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ sur J si

$$\big\{(x,y) \,|\, x \in J \text{ et } y \geq g(x)\big\} \subset \mathcal{C}_f^-.$$

Remarquons que demander que $\mathcal{C}_g$ soit au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur J équivaut à demander pour tout $x \in J$ $g(x) \geq f(x)$ ou encore que $g(x) - f(x) \geq 0$. De même demander que $\mathcal{C}_g$ soit en-dessous de $\mathcal{C}_f$ sur J équivaut à demander pour tout $x \in J$ $g(x) \leq f(x)$ ou encore que $g(x) - f(x) \leq 0$.

Faisons quelques remarques sur les sécantes d'une courbe représentative et les tangentes en un point à une courbe représentative. Soient $a \neq b \in I$, $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

i) La droite AB est appelée sécante à $\mathcal{C}_f$. Son équation est

$$y = f(a) + f(b) - f(a)(x-a) \quad (AB).$$

ii) Supposons f dérivable en a. Lorsque b tend vers a, B tend vers A et la droite AB tend vers une droite T d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (T)$$

appelée tangente en a à $\mathcal{C}_f$.

Notons que $y = f(a) + k(x-a)$ est l'équation d'une droite D passant par A. Cette droite est aussi la courbe représentative de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(a) + k(x-a)$. Ainsi, dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en a sur J signifie que pour tout $x \in J$ on ait : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Et dire que $\mathcal{C}_f$ est en-dessus de sa tangente en a sur J signifie que pour tout $x \in J$ on ait : $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$.

4.2.2. *Position locale relative de deux courbes locales représentatives.*

Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Posons $I =]\alpha, \beta[$. Soient $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

***Lemme* 4.6.** — *Soit $h\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant comme développement limité en a d'ordre n*

$$h(x) = a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $a_p \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$ et h est du signe de $a_p(x-a)^p$ sur $]a-r, a+r[$.

Démonstration. À partir de

$$h(x) = a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

nous obtenons

$$h(x) = (x-a)^p\Big(\underbrace{a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-p} + (x-a)^{n-p}\varepsilon(x)}_{u(x)}\Big)$$

Notons que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = a_p$. Par définition de la limite nous obtenons l'existence de $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$ et h est du signe de $a_p(x-a)^p$ sur $]a-r, a+r[$. Ainsi h est du signe de $a_p(x-a)^p$ sur $]a-r, a+r[$. □

***Proposition* 4.7.** — *Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons que f et g admettent comme développement limité en a d'ordre n*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$. Supposons enfin que

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad \ldots, \qquad a_{p-1} = b_{p-1}, \qquad \text{et } a_p \neq b_p,\ p \leq n$$

en particulier $a_p - b_p \neq 0$.

Alors il existe $r > 0$ avec $]a-r, a+r[\subset I$ tel que si

- ◇ *p est pair et $a_p - b_p > 0$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessus de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $]a-r, a+r[$;*
- ◇ *p est pair et $a_p - b_p < 0$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessous de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $]a-r, a+r[$;*
- ◇ *p est impair et $a_p - b_p > 0$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessus de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $[a, a+r[$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessous de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $]a-r, a]$;*
- ◇ *p est impair et $a_p - b_p < 0$, alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessous de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $[a, a+r[$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessus de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g sur $]a-r, a]$;*

***Remarque* 4.8.** — Supposons que $n \geq 2$ et que $f(a) = g(a)$. Si $\mathcal{C}_f$ est soit au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]a-r, a+r[$, soit au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]a-r, a+r[$, alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont même tangente en a.

DÉMONSTRATION. Supposons donc que $n \geq 2$ et $f(a) = g(a)$ autrement dit $a_0 = b_0$. De plus $a_1 = f'(a)$ et $b_1 = g'(a)$. Si $f'(a) \neq g'(a)$, alors la Proposition 4.7 aboutit à une contradiction.

Comme l'équation des tangentes en a à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{et} \qquad y = g(a) + g'(a)(x-a)$$

nous obtenons que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont même tangente en a. □

***Proposition* 4.9.** — *Supposons que f admette un développement limité en a d'ordre $n \geq 2$. Alors f est dérivable en a et le développement limité de f en a d'ordre 1 est*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

Supposons que f admette comme développement limité en a à l'ordre $n \geq 2$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et supposons $a_p \neq 0$.

Alors il existe $r > 0$ avec $]a-r, a+r[\subset I$ tel que si

- ◇ *p est pair et $a_p > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente en a à $\mathcal{C}_f$ sur $]a-r, a+r[$;*
- ◇ *p est pair et $a_p < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la tangente en a à $\mathcal{C}_f$ sur $]a-r, a+r[$;*
- ◇ *p est impair et $a_p > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente en a à $\mathcal{C}_f$ sur $[a, a+r[$ et au-dessous sur $]a-r, a]$;*
- ◇ *p est impair et $a_p < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la tangente en a à $\mathcal{C}_f$ sur $[a, a+r[$ et au-dessus sur $]a-r, a]$;*

Lorsque p est impair, nous disons que a est un point d'inflexion de f.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la Proposition 4.7 si on se souvient que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

et est donc la courbe représentative de

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a).$$

$\square$

***Exemple* 4.10.** — Considérons

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \exp(x).$$

La fonction f est dérivable à tout ordre et $f(0) = f'(0) = 1$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a donc pour équation $y = 1 + x$. De plus

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Il en résulte que $\exp(x) - 1 - x \geq 0$ sur un intervalle $]-r, r[$ avec r petit. Par conséquent sur cet intervalle $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente.

***Exemple* 4.11.** — Considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 1 - 2x - \sin(x).$$

La fonction f est dérivable à tout ordre au voisinage de $x = 0$. Nous avons $f(0) = 1$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 2x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)\right) \\ &= 1 - 3x + \frac{x^3}{3!} - x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe $r > 0$ tels que
- ◇ $f(x) - 1 + 3x \geq 0$ sur $[0, r[$;
- ◇ $f(x) - 1 + 3x \leq 0$ sur $]-r, 0]$.

L'équation de la tangente en $x = 0$ à $\mathcal{C}_f$ est $y = 1 - 3x$.

Par suite
- ◇ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en $x = 0$ sur $[0, r[$;
- ◇ $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente en $x = 0$ sur $]-r, 0]$.

Notons que 0 est un point d'inflexion de f.

Pour l'étude des branches infinies

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite infinie au point $+\infty$ (resp. $-\infty$) de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Il peut arriver qu'un développement asymptotique de la fonction f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) aide à la construction des asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$.

***Exemple* 4.12.** — Considérons $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Étudions la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Posons $g(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2}$ et $h(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ de sorte qu'il faut travailler un peu plus pour avoir le comportement de $f(x)$ pour $x > 0$ grand. Nous avons

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2} = \sqrt[4]{x^4\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x\left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}\right).$$

Nous avons pour $h \in]-1,1[$:

$$\sqrt[4]{1+h^2} = 1 + \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon(h)$$
$$\sqrt[3]{1+h} = 1 + \frac{h}{3} - \frac{h}{9}\frac{h^2}{3} + h^2\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Il en résulte que

$$\sqrt[4]{1+h^2} - \sqrt[3]{1+h} = -\frac{h}{3} + \frac{13h^2}{36} + h^2\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Par suite pour $x > 0$ grand nous avons

$$f(x) = x\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right) = x\left(-\frac{1}{3x} + \frac{13}{36x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi

$$f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{36x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous obtenons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{3}$. Cela montre que $\mathcal{C}_f$ est asymptote à la droite horizontale d'équation $y = -\frac{1}{3}$ en $x = +\infty$.

Prolongement de fonctions

Les développements limités peuvent permettre de prolonger une fonction qui n'est pas définie au point a.

***Exemple* 4.13.** — Donnons un prolongement sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante :

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{\exp(x)-1} - \frac{1}{x}.$$

Pour tout $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1+x-\exp(x)}{x(\exp(x)-1)}.$$

Pour tout x réel

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$$
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$$

Nous obtenons pour tout x réel

$$1 + x - \exp(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3\varepsilon_1(x) = x^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{6} - x\varepsilon_1(x)\right)$$
$$x(\exp(x)-1) = x\left(x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right) = x^2\left(1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon_2(x)\right).$$

Posons pour tout x réel : $u(x) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{6} - x\varepsilon_1(x)$ et $v(x) = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon_2(x)$. Ce sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Nous avons $v(0) = 1$ et la fonction v ne s'annule pas. Ces deux fonctions admettent des développements limités d'ordre 1 en 0. En fait comme $1+x-\exp(x)$ et $x(\exp(x)-1)$, ces fonctions u et v admettent des développements limités de tout ordre en 0. La fonction

$$h = \frac{u}{v}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

admet donc un développement limité de tout ordre en 0. Nous avons

$$h(x) = \frac{x^2 u(x)}{x^2 v(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{x}{6} - x\varepsilon_1(x)}{1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon_2(x)} \text{ pour } x \neq 0, \qquad h(0) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi f se prolonge donc par h en 0. La division en puissance croissante de $-\frac{1}{2} - \frac{x}{6}$ par $1 + \frac{x}{2}$ s'écrit :

$$-\frac{1}{2} - \frac{x}{6} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{12}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{24}.$$

Le développement limité de h à l'ordre 1 en 0 est donc

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{12} + x\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Nous pouvons en déduire que h est dérivable en 0 et que $h'(0) = \frac{1}{12}$.