Calcul intégral

Table des matières

1. Primitives et intégrales

Soit $a < b$ deux réels, $I =]a, b[$, $I =]a, +\infty[$, $I =]-\infty, b[$ ou $I = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

***Définition* 1.1.** — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Nous appelons **primitive de** f toute application $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Rappelons qu'une fonction numérique dérivable sur I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. Il en résulte

***Conséquence* 1.2.** — *Supposons que $F : I \to \mathbb{R}$ soit une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $G : I \to \mathbb{R}$ une application. Alors G est une primitive de f si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$.*

Les primitives de la fonction nulle sur I sont les fonctions constantes sur I.

***Conséquence* 1.3.** — *Si $f : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ admet une primitive, alors pour $\alpha \in I$ il existe une unique primitive de f s'annulant en α.*

***Définition* 1.4.** — Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ admettant une primitive. Nous notons : $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ la valeur en x de la primitive de f s'annulant en α. Pour tout $x \in I$ et pour toute primitive F de f nous avons alors

$$\begin{aligned} \int_\alpha^x f(t)\,dt &= F(x) - F(\alpha) \\ &= [F(t)]_\alpha^x \end{aligned}$$

Dans la notation $\int_\alpha^x f(t)dt$ lu « intégrale de α à x de $f(t)dt$ », α et x sont appelés bornes de l'intégrale, t est une variable muette qui peut être remplacée par les lettres u, v, y, ...

***Notation* 1.5.** — Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive, alors la notation $\int f(t)dt = F(t) + k$ signifie que $F : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t)$ est une primitive de f et que k est une constante arbitraire.

Opérations sur les primitives. Supposons que f, resp. $g : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive F, resp. G. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$ et λf admettent des primitives et

$$\begin{aligned} \int (f+g)(t)\,dt &= \int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt \\ \int (\lambda f)(t)\,dt &= \lambda \int f(t)\,dt \end{aligned}$$

Plus précisément pour α et x dans I

$$\begin{aligned} \int_\alpha^x (f+g)(t)\,dt &= \int_\alpha^x f(t)\,dt + \int_\alpha^x g(t)\,dt \\ \int_\alpha^x (\lambda f)(t)\,dt &= \lambda \int_\alpha^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

***Remarque* 1.6.** — Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ admettant une primitive. Soient α, β, γ dans I. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = -\int_\beta^\alpha f(t)\,dt \qquad\qquad \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt.$$

***Théorème* 1.7.** — *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive.*

Commentaire sur la démonstration : une démonstration classique repose sur la théorie de l'intégration au sens de Riemann. Dans ce cas la première étape consiste à montrer qu'une fonction continue est intégrable au sens de Riemann. Soit $\alpha \in I$, la deuxième étape consiste à montrer que la fonction qui associe à $x \in I$ l'intégrale au sens de Riemann de f entre α et x est une primitive de f nulle en α.

Ainsi si f est continue, si α, x appartiennent à I, alors $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ la valeur en x de la primitive de f s'annulant en α est l'intégrale au sens de Riemann de f entre α et x.

***Conséquence* 1.8.** — *Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue et si $f \geq 0$ sur $]\alpha, \beta[\subset I$, alors $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ mesure l'aire de la surface $\mathcal{A}$ formée des points d'ordonnée positive sous la courbe représentative de f et d'abscisse comprises entre α et β.*

Primitives usuelles

I	$g\colon I \to \mathbb{R}$ f'	$\int g(t)dt$ $f\colon I \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$]0, +\infty,]-\infty, 0[$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	λ, $\lambda \in \mathbb{R}$	λx
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$,	$\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

$a \in \mathbb{R}$, $I =]-\infty, a[$, $I =]a, \infty[$	$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$
I	$g\colon I \to \mathbb{R}$ f'	$\int g(t)dt$ $f\colon I \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\exp(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$\frac{\exp(\lambda x)}{\lambda}$
$]0, +\infty[$	x^a, $a \in \mathbb{R}\smallsetminus\{-1\}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\mathbb{R}$	a^x, $a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$\frac{1}{-n+1}\frac{1}{x^{n-1}}$

***Exemple* 1.9.** — Vérifions que pour $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln\lvert x\rvert$. Par définition la fonction logarithme

$$\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(x)$$

est dérivable : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Donc, sur $]0, +\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$.

Considérons

$$f\colon]-\infty, 0[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(-x)$$

On peut écrire $f(x) = \ln(u(x))$ où

$$u\colon]-\infty, 0[\to]0, \infty[\qquad x \mapsto -x$$

La fonction f est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables et

$$f'(x) = u'(x)\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Donc, sur $]-\infty, 0[$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(-x)$. Ainsi sur $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$ nous avons $\int \frac{dt}{t} = \ln\lvert x\rvert + k$.

***Exemple* 1.10.** — Vérifions que pour $a > 0$ réel et $a \neq 1$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de a^x est $\frac{1}{\ln(a)}a^x$. Considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x.$$

Par définition de x^a nous avons $f(x) = \frac{1}{\ln(a)}\exp(x\ln(a))$. Ainsi $f(x) = \frac{1}{\ln(a)}\exp(u(x))$ où

$$u\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x\ln(a)$$

La fonction f est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)}(\exp(u(x)))' = \frac{1}{\ln(a)}u'(x)\exp(u(x)) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(a)\exp(x\ln(a)) = \exp(x\ln(a)) = a^x.$$

Par conséquent $\int a^t dt = \frac{1}{\ln(a)}a^t$.

***Exemple* 1.11.** — Soient c et x des réels calculons $\int_c^x (t^3+2t^2+4t+2)\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_c^x (t^3+2t^2+4t+2)\,dt &= \int_c^x t^3\,dt + 2\int_c^x t^2\,dt + 4\int_c^x t\,dt + 2\int_c^x dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4}\right]_c^x + 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_c^x + 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_c^x + 2\,[t]_c^x\\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 2x - \left(\frac{c^2}{4} + \frac{2c^3}{3} + 2c^2 + 2c\right)\end{aligned}$$

***Remarque* 1.12.** — **Primitive sur une réunion disjointe d'intervalles**. Si Ω est une réunion disjointe d'intervalles, nous pouvons appeler primitive d'une fonction numérique f définie sur Ω une fonction dérivable sur Ω de dérivée f. Se donner une primitive de f revient à se donner une primitive de f sur chaque intervalle définissant Ω. Par exemple, considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto f(x)=17.$$

La fonction $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 17x-2$ pour $x<0$ et $g(x) = 17x+3$ pour $x>0$ est une primitive de f.

2. Intégration par parties

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Supposons que $I =]a,b[$ ou $I =]a,+\infty[$ ou $I =]-\infty,b[$ ou $I = \mathbb{R} =]-\infty,\infty[$.

Si $w\colon I\to\mathbb{R}$ et si α, x appartiennent à I, nous notons $[w(t)]_\alpha^x = w(x)-w(\alpha)$.

***Proposition* 2.1.** — *Soient u, $v\colon I\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $u'v$ admet une primitive si et seulement si uv' admet une primitive. Dans ce cas pour tous α, x dans I nous avons*

$$\begin{aligned}\int_\alpha^x u'(t)v(t)\,dt &= [u(t)v(t)]_\alpha^x - \int_\alpha^x u(t)v'(t)\,dt\\ &= u(x)v(x)-u(\alpha)v(\alpha) - \int_\alpha^x u(t)v'(t)\,dt\end{aligned}$$

Autrement dit si B est une primitive sur I de $u(x)v'(x)$ nous obtenons que $A(x) = u(x)v(x)-B(x)$ est une primitive sur I de $u'(x)v(x)$.

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned}
\left[u(t)v(t)\right]_a^b &= \left[(uv)(t)\right]_a^b \\
&= \int_a^b (uv)'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (u'v+uv')(t)\,dt \\
&= \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b u(t)v'(t)\,dt
\end{aligned}$$

$\square$

***Exemple* 2.2.** — Considérons $\ln\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \ln(x)$. La fonction ln est continue sur $]1,+\infty[$ et admet donc une primitive sur $]1,+\infty[$. Calculons la primitive de ln qui s'annule en 1 par intégration par parties. Les autres primitives s'en déduisent par ajout d'une constante. Nous observons que pour $x\in]0,+\infty[$

$$\ln(x)=u'(x)v(x) \quad \text{où } u'(x)=1,\ v(x)=\ln(x).$$

Pour $x\in]0,+\infty[$

$$u(x)=x, \quad v'(x)=\frac{1}{x}, \quad u(x)v(x)=x\ln(x), \quad u(x)v'(x)=1.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\int_1^x \ln(t)\,dt &= \int_1^x u'(t)v(t)\,dt \\
&= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= [t\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\times t\,dt \\
&= [t\ln t]_1^x - \int_1^x dt \\
&= x\ln x - x + 1.
\end{aligned}$$

Les primitives de $\ln(x)$ sont donc les fonctions $x\ln(x)-x+k$ où k est une constante réelle.

***Exemple* 2.3.** — La fonction $x\mapsto x\exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit $c\in\mathbb{R}$, calculons $\int_c^x t\exp(t)\,dt$ la primitive de $x\exp(x)$ sur $\mathbb{R}$ nulle en c. Nous observons que pour $x\in\mathbb{R}$:

$$x\exp(x)=u'(x)v(x) \quad \text{où } u'(x)=\exp(x),\ v(x)=x.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$

$$u(x)=\exp(x), \quad v'(x)=1, \quad u(x)v(x)=x\exp(x), \quad u(x)v'(x)=\exp(x).$$

Nous en déduisons la primitive de $x\exp(x)$ sur $\mathbb{R}$ nulle en c :

$$\begin{aligned}\int_c^x t\exp(t)\,dt &= \int_c^x u'(t)v(t)\,dt\\ &= \big[u(t)v(t)\big]_c^x - \int_c^x u(t)v'(t)\,dt\\ &= \big[t\exp(t)\big]_c^x - \int_c^x \exp(t)\,dt\\ &= \big[t\exp(t)\big]_c^x - \big[\exp(t)\big]_c^x\\ &= \exp(x)(x-1) - \exp(c)(c-1).\end{aligned}$$

Autrement dit $\exp(x)(x-1)$ est une primitive de $x\exp(x)$ et les primitives de $x\exp(x)$ sont les fonctions $\exp(x)(x-1)+k$ où k est une constante réelle.

***Exemple* 2.4.** — La fonction $x\mapsto x\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit $c\in\mathbb{R}$, calculons $\int_c^x t\sin(t)\,dt$ la primitive de $x\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ nulle en c. Nous observons que pour $x\in\mathbb{R}$:

$$x\sin(x) = u'(x)v(x) \quad \text{où } u'(x)=\sin(x),\ v(x)=x.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$

$$u(x) = -\cos(x), \quad v'(x)=1, \quad u(x)v(x) = -x\cos(x), \quad u(x)v'(x) = -\cos(x).$$

Nous en déduisons la primitive de $x\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ nulle en c :

$$\begin{aligned}\int t\sin(t)\,dt &= \int u'(t)v(t)\,dt\\ &= \big[u(t)v(t)\big] - \int_c^x u(t)v'(t)\,dt\\ &= [-t\cos(t)] - \int 1\cdot(-\cos t)\,dt\\ &= [-t\cos(t)] + \int \cos t\,dt\\ &= [-t\cos t + \sin t]\end{aligned}$$

Autrement dit une primitive de $x\sin(x)$ est $\sin x - x\cos x$ et les primitives de $x\sin(x)$ sont les fonctions $\sin x - x\cos x + k$ où k est une constante réelle.

3. Changement de variables

Soient a, b, c, d quatre réels, éventuellement $\pm\infty$. Posons $I=]a,b[$ et $J=]c,d[$.

***Proposition* 3.1.** — *Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F. Soit $\varphi\colon J\to I$ une fonction dérivable. Alors $(F\circ\varphi)'=\varphi' f\circ\varphi$ donc*

$$\int \varphi'(u)f(\varphi(u))\,du = F\circ\varphi(u) = F(\varphi(u)).$$

En particulier pour α, x dans J

$$\int_\alpha^x \varphi'(u)f(\varphi(u))\,du = F(\varphi(x)) - F(\varphi(\alpha)).$$

DÉMONSTRATION. Les fonctions

$$f \circ \varphi \colon J \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$$
$$F \circ \varphi \colon J \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x))$$

sont définies. Les fonctions F et φ sont dérivables donc $F \circ \varphi$ est dérivable et pour $x \in J$:

$$(F \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) f(\varphi(x)).$$

Ainsi $\varphi'(x) f(\varphi(x))$ est une primitive de $(F \circ \varphi)'(x)$. □

Soit $\psi \colon I \to J$, $x \mapsto y = \psi(x)$ une application bijective et soit $\varphi = \psi^{-1} \colon J \to I$, $x \mapsto y = \varphi(x)$ son application réciproque. Rappelons que

$$\forall\, x \in I \qquad \varphi(\psi(x)) = x \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \forall\, y \in J \qquad \psi(\varphi(y)) = y.$$

Nous dirons que ψ est un **changement de variables**.

Soit $h \colon I \to \mathbb{R}$; il existe $\ell \colon J \to \mathbb{R}$ unique telle que $h(x) = \ell(y)$ pour tous $x \in I$ et $y = \psi(x)$ (ℓ n'est autre que $h \circ \varphi$).

***Proposition* 3.2** (Formule de changement de variables)**.** — *Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive. Soit $\psi \colon I \to J$, $t \mapsto u = \psi(t)$ un changement de variables dérivable et de fonction inverse dérivable. Soit $g \colon J \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{f(t)}{\psi'(t)} = g(u)$ pour $t \in I$ et $u = \psi(t)$.*
La fonction g admet une primitive sur J. Soit G une primitive de g sur J. Alors $G(\psi(x))$ est une primitive de f sur I :

$$\int f(t)\, dt = G(\psi(x)) + k.$$

En particulier pour α, x dans I nous avons

$$\int_\alpha^x f(t)dt = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(x)} g(u)\, du = G(\psi(x)) - G(\psi(\alpha)).$$

DÉMONSTRATION. Si φ est la réciproque de ψ, on a $\psi(\varphi(y)) = y$ et $\varphi'(y)\psi'(\varphi(y)) = 1$. Nous obtenons ainsi la formule bien connue donnant la dérivée de ϕ :

$$\phi'(y) = \frac{1}{\psi'(\varphi(y))}.$$

Pour $y = \psi(x)$, nous avons $x = \varphi(y)$ et

$$\frac{f(x)}{\psi'(x)} = \frac{f(\varphi(y))}{\psi'(\varphi(y))} = f(\varphi(y))\varphi'(y) = g(y).$$

Si F est une primitive de f sur I, alors $F(\varphi(y))' = f(\varphi(y))\varphi'(y)$ et $F(\varphi(y))$ est donc une primitive de g sur J. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(y) = F(\varphi(y)) + k$. Il en résulte que $G(\psi(x))$ est une primitive de f sur I. □

***Remarque* 3.3** ("Recette autorisée")**.** — Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ une fonction admettant une primitive. Si vous disposez de $\psi \colon I \to J$, $x \mapsto y = \psi(x)$ un bon changement de variables : ψ bijective dérivable de fonction inverse dérivable, la procédure suivante vous donne $\int f(t)\, dt$ une primitive de f sur I :

a) Écrire $u = \psi(t)$,

b) Dériver pour obtenir $du = \psi'(t)dt$,
c) Nous obtenons formellement : $f(t)\,dt = \frac{f(t)}{\psi'(t)}\,du$
d) Écrire $\frac{f(t)}{\psi'(t)} = g(u)$ en fonction de u lorsque $u = \psi(t)$.
e) Chercher une primitive G de g sur J.

Conclure $F(x) = G(\psi(x))$ est une primitive de f sur I.

***Exemples* 3.4** (Exemples de changement de variables)**.** — Soient a, b, c, d des réels éventuellement $\pm\infty$. Nous allons donner des exemples de couples $\varphi\colon]a,b[\to]c,d[$ et $\psi\colon]c,d[\to]a,b[$ bijectives, dérivables et inverses l'une de l'autre.

$\varphi\colon]a,b[\to]a+k,b+k[,\ k\in\mathbb{R}$ $\varphi(x) = x+k$ $\varphi'(x) = 1$	$\psi\colon]a+k,b+k[\to]a,b[$ $\psi(x) = x-k$ $\psi'(x) = 1$
$\varphi\colon]a,b[\to]ka,kb[,\ k\in\mathbb{R}^*$ $\varphi(x) = kx$ $\varphi'(x) = k$	$\psi\colon]ka,kb[\to]a,b[$ $\psi(x) = \frac{x}{k}$ $\psi'(x) = \frac{1}{k}$
$\varphi\colon \mathbb{R}\to]0,+\infty[$ $\varphi(x) = \exp(x)$ $\varphi'(x) = \exp(x)$	$\psi\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\psi(x) = \ln(x)$ $\psi'(x) = \frac{1}{x}$
$\varphi\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ $\varphi(x) = \tan(x)$ $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\psi\colon \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\psi(x) = \arctan(x)$ "l'unique $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = x$" $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\varphi\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$ $\varphi(x) = \sin(x)$ $\varphi'(x) = \cos(x)$	$\psi\colon]-1,1[\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\psi(x) = \arcsin(x)$ "l'unique $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin(\alpha) = x$" $\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\varphi\colon]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ $\varphi(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$	$\psi\colon \mathbb{R}\to]-\pi,\pi[$ $\psi(x) = 2\arctan(x)$ $\psi'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

Ainsi la formule de changement de variables pour le calcul de primitives peut s'appliquer avec les changements de variables φ et ψ du tableau précédent.

***Exemple* 3.5.** — Nous nous proposons de calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sin^2(x)\cos(x).$$

Les fonctions

$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \psi(x) = \sin(x)$$

et

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = x^2$$

jouent un rôle et nous avons puisque $(\sin(x))' = \cos(x) f(x) = \sin^2(x)\cos(x) = (\sin(x))' h(\sin(x))$. La fonction $H(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. Par suite $f(x) = (\sin(x))' H'(\sin(x))$. Il en résulte que

$$F(x) = H(\sin(x)) = \frac{1}{3}\sin^3(x)$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Calculons maintenant par exemple $\int_0^{3\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)\, dt$:

$$\int_0^{3\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)\, dt = \left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_0^{3\pi/2} = \frac{\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} - \frac{\sin^3(0)}{3} = -\frac{1}{3}.$$

***Exemple* 3.6.** — Nous nos proposons de calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x) + 1}}.$$

Solution 1 :

Les fonctions

$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \psi(x) = \exp(x)$$

et

$$h\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

jouent un rôle et nous avons pour tout x réel puisque $\psi'(x) = \exp(x)$: $f(x) = \psi'(x) h(\psi(x))$. Or la fonction $H(x) = 2\sqrt{x+1}$ est une primitive de h sur $]0, +\infty[$. Donc $f(x) = \psi'(x) h(\psi(x))$. Or la fonction $H(x) = 2\sqrt{x+1}$ est une primitive de h sur $]0, +\infty[$; donc $f(x) = \varphi'(x) H(\varphi(x))$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que

$$F(x) = H(\varphi(x)) = 2\sqrt{\exp(x) + 1}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution 2 :

Considérons le changement de variable

$$\psi\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \quad x \mapsto y = \psi(x) = \exp(x).$$

Appliquons notre recette pour calculer $\int f(t)\, dt$:

a) Écrire $u = \exp(t)$.
b) Dériver pour obtenir $du = \exp(t)\, dt$,
c) Nous obtenons formellement : $f(t)\, dt = \frac{f(t)}{\exp(t)}\, du$.
d) $\frac{f(x)}{\exp(x)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(x)+1}} = \frac{1}{\sqrt{y+1}} = g(y)$ lorsque $y = \exp(x)$.

e) Chercher une primitive G de $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y+1}}$ sur $]0, +\infty[$: $G(y) = 2\sqrt{y+1}$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est alors

$$F(x) = G(\exp(x)) = 2\sqrt{\exp(x)+1}.$$

Calculons maintenant par exemple $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\,dt$:

$$\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\,dt = \left[2\sqrt{\exp(t)+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{\exp(1)+1} - 2\sqrt{2}.$$

***Exemple* 3.7.** — Nous nous proposons de calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \big(\sin^3(x)+1\big)\cos(x).$$

Solution 1 :

Considérons les fonctions

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x) = \sin(x)$$

et

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = x^3+1.$$

Puisque $\varphi'(x) = \cos(x)$ pour tout x réel nous avons

$$f(x) = \cos(x)\big((\sin(x))^3+1\big) = \varphi'(x)h(\varphi(x)).$$

Or la fonction $H(x) = \frac{x^4}{4} + x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. Par suite $f(x) = \varphi'(x)H'(\varphi(x))$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que

$$F(x) = H(\varphi(x)) = \frac{1}{4}\sin^4(x) + \sin(x)$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution 2 :

Posons le changement de variable

$$\psi\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[, \quad x \mapsto y = \psi(x) = \sin(x).$$

Appliquons notre recette pour calculer $\int f(t)\,dt$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

a) Écrire $u = \sin(t)$.
b) Dériver pour obtenir $du = \cos(t)\,dt$.
c) Nous obtenons formellement : $f(t)\,dt = \frac{f(t)}{\cos(t)}\,du$.
d) $\frac{f(x)}{\cos(x)} = \sin^3(x)+1 = y^3+1 = g(y)$ lorsque $y = \sin(x)$.
e) Chercher une primitive G de $g(y) = y^3+1$ sur $]-1,1[$: $G(y) = \frac{y^4}{4} + y$.
Une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est alors

$$F(x) = G(\sin(x)) = \frac{1}{4}\sin^4(x) + \sin(x)$$

Cette méthode ne donne pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Par contre, il se trouve que la fonction $\frac{1}{4}\sin^4(x) + \sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est $(\sin^3(x)+1)\cos(x)$. Donc, $\frac{1}{4}\sin^4(x) + \sin(x)$ est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.8. — Nous nous proposons de calculer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction

$$f\colon]0,+\infty[\to]0,+\infty[, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Considérons le changement de variable

$$\psi\colon]0,+\infty[\to]0,+\infty[, \quad x \mapsto y = \frac{1}{x}.$$

Appliquons notre recette pour calculer $\int f(t)\,dt$ sur $]0,+\infty[$:

a) Écrire $u = \frac{1}{t}$.

b) Dériver pour obtenir $du = -\frac{1}{t^2}\,dt$.

c) Nous obtenons formellement : $f(t)\,dt = -t^2 f(t)\,du$.

d) Ainsi pour $y = \frac{1}{x}$ et $x > 0$ nous obtenons

$$-x^2 f(x) = -\frac{x^2}{x\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\frac{1}{y^2+1} = g(y).$$

e) Le tableau des primitives usuelles nous apprend que $G(y) = -\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ est une primitive de $g(y) = -\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f sur $]0,+\infty[$ est alors

$$F(x) = G\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) = \ln(x) - \ln(1+\sqrt{x^2+1}).$$

4. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 4.1. — *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant pour n entier une dérivée $(n+1)$ième continue. Alors pour tous a, $x \in I$*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Démonstration (par récurrence). Pour toute application φ admettant une dérivée continue sur I on a

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)\,dt$$

Supposons que pour toute application φ admettant pour n entier une dérivée $(n+1)$-ième continue sur I

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant pour n entier une dérivée $(n+2)$-ième continue alors elle admet une dérivée $(n+1)$-ième continue. Ainsi l'hypothèse de récurrence assure que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Calculons $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties. Posons

$$u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} \qquad\qquad v(t) = f^{(n+1)}(t).$$

Alors

$$u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad\qquad v'(t) = f^{(n+2)}(t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt &= \int_a^x u'(t)v(t)\,dt \\
&= \big[u(t)v(t)\big]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
&= f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Application. Montrons que pour x réel nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Commençons par deux remarques qui nous seront utiles.

Remarque 4.2. — Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ des applications admettant des primitives. Si $\alpha < \beta \in I$ alors

$$f \leq g \text{ sur } [\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \leq \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Démonstration. Si F est une primitive de f, G est une primitive de g, alors $(G-F)' = g-f \geq 0$ sur $[\alpha,\beta]$ donc $G-F$ est croissante et $(G-F)(\alpha) \leq (G-F)(\beta)$, *i.e.* $F(\beta)-F(\alpha) \leq G(\beta)-G(\alpha)$. □

***Remarque* 4.3.** — Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $|f|\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$ ont des primitives pour $\alpha < \beta \in I$ alors

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \right| \le \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt$$

DÉMONSTRATION. Découle de la Remarque 4.2 avec $-f \le |f|$ et $f \le |f|$ sur $[\alpha, \beta]$. □

Appliquons maintenant la formule de Taylor à $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \exp(x)$. La fonction f admet une dérivée $(n+1)$-ième continue : $f^{(n+1)}(x) = \exp(x)$. La formule donne pour x réel

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)\,dt$$

Ainsi

$$\left| \exp(x) - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\Big) \right| \le \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)\,dt \right|$$

Supposons $x > 0$. Pour tout $t \in [0, x]$ nous avons

$$0 \le \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t) \le \frac{x^n}{n!} \exp(t).$$

Par conséquent

$$\left| \exp(x) - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\Big) \right| \le \int_0^x \frac{x^n}{n!} \exp(t)\,dt = \frac{x^n}{n!}\big(\exp(x) - 1\big).$$

Posons $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Notons que $u_n \ge 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \le \frac{1}{2}$ pour n assez grand. Nous en déduisons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(\exp(x) - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\Big)\Big) = 0.$$

Ainsi pour $x > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = \exp(x).$$

Pour $x < 0$ un raisonnement analogue donne le même résultat.

Pour $x = 0$ le résultat est clair.

***Exemple* 4.4.** — Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a l'inégalité $\ln(1+x) \le x$.

Considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(1+x).$$

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction f admet une dérivée seconde continue sur $[0, t]$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 assure que

$$f(x) = \ln(1+x) = f(0) + x f'(0) + \int_0^x (x-t)\, f''(t)\,dt. \tag{4.1}$$

Or $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ donc (4.1) se réécrit

$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,dt. \tag{4.2}$$

Comme $t \in [0, x] \mapsto \frac{x-t}{(1+t)^2}$ est strictement positive sur $]0, x[$, la Remarque 4.2 assure que

$$\int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}\,dt \geq 0.$$

Il résulte de (4.2) que $\ln(1+x) \leq x$.

5. Intégration des fonctions rationnelles

5.1. Fonctions rationnelles.

***Définition* 5.1.** — Une **fonction ou fraction rationnelle** F sur $\mathbb{R}$ est le quotient de deux fonctions polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, Q étant non identiquement nulle. Nous avons donc $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$. Posons $F = \frac{P}{Q}$.

- ◇ Notons $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$.
- ◇ On dit que la fraction F est **réductible** lorsque les polynômes P et Q admettent un facteur commun de degré ≥ 1, *i.e.* lorsqu'il existe un polynôme R de degré ≥ 1 et des polynômes P_1 et Q_1 tels que $P = P_1 R$ et $Q = Q_1 R$. Nous avons alors $F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$. Dans le cas contraire on dit que F est **irréductible**.

***Définition* 5.2.** — Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction irréductible.

- ◇ On appelle **partie entière** de F la fonction polynôme **quotient** de la division euclidienne de P par Q.
- ◇ On appelle **pôle** de F toute racine du dénominateur Q dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle alors **multiplicité** d'un pôle de F sa multiplicité en tant que racine de Q.

5.2. Exemples préliminaires. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fonction rationnelle réelle.

L'objectif de ce paragraphe est de calculer une primitive de F sur $\mathbb{R}$. On commence par présenter quelques exemples avant de décrire une méthode générale.

***Exemple* 5.3.** — Soit $F(x) = \frac{2x-5}{(x-1)(x-2)}$.

- ◇ La fonction rationnelle F admet deux pôles simples réels 1 et 2. L'idée est de séparer les facteurs du dénominateur $(x-1)$ et $(x-2)$.
- ◇ Pour cela nous cherchons des réels a et b (s'il existent) tels que $F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$:
  — nous réduisons au même dénominateur : $F(x) = \frac{(a+b)x-(2a+b)}{(x-1)(x-2)}$,
  — nous identifions avec l'expression initiale de F : $a + b = 2$ et $2a + b = 5$,
  — nous résolvons le système et nous trouvons $a = 3$ et $b = -1$, soit $F(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2}$.
  ou
  — nous isolons a en multipliant par $(x-1)$: $(x-1)F(x) = a + (x-1)\frac{b}{(x-2)}$ et nous faisons tendre x vers 1 : $a = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-5}{x-2} = 3$,
  — nous isolons b en multipliant par $(x-2)$: $(x-2)F(x) = (x-2)\frac{a}{x-1} + b$ et nous faisons tendre x vers 2 : $b = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)F(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-5}{x-1} = -1$.

Les fractions élémentaires $\frac{3}{x-1}$ et $-\frac{1}{x-2}$ s'appellent « éléments simples », ce sont les « parties polaires » de F relatives aux pôles 1 et 2.

◇ Il devient facile de calculer une primitive de F :
$$\int F(x)\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx = 3\ln|x-1| - \ln|x-2| + \text{cst}.$$

***Exemple* 5.4.** — Soit $F(x) = \frac{2x-5}{x^2(x-1)}$.

◇ La fonction rationnelle F admet deux pôles réels : un pôle simple 1 et un pôle double 0. L'idée est de « séparer » les facteurs du dénominateur x^2 et $(x-1)$.

◇ Pour cela on cherche des nombres réels a, b et c tels que $F(x) = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$:

— nous réduisons au même dénominateur : $F(x) = \frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}$,

— nous identifions avec l'expression initiale de F : $a+c=0$, $b-a=2$ et $-b=-5$,

— nous résolvons le système et nous trouvons $a=3$, $b=5$ et $c=-3$, soit
$$F(x) = \frac{3x+5}{x^2} - \frac{3}{x-1} = \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{3}{x-1}.$$

ou

— nous isolons c en multipliant par $(x-1)$: $(x-1)F(x) =$ et nous faisons tendre x vers 1 : $c = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2x-5}{x^2} = -3$,

— nous isolons b en multipliant par x^2 : $x^2F(x) =$ et nous faisons tendre x vers 0 :
$$b = \lim_{x\to 0} x^2F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2x-5}{x-1} = 5,$$

— nous multiplions par x : $xF(x) =$ et nous faisons tendre x vers ∞ :
$$a+c = \lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x(x-1)} = 0$$
d'où $a=-c=3$.

Nous avons ainsi obtenu
$$F(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{3}{x-1}.$$

Les fractions élémentaires $\frac{3}{x}$, $-\frac{3}{x-1}$ et $\frac{5}{x^2}$ s'appellent « éléments simples » et $\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x}$ et $-\frac{3}{x-1}$ sont les « parties polaires » de F relatives aux pôles 0 et 1.

◇ Il devient alors possible de calculer une primitive de F :
$$\int F(x)\,dx = 5\int\frac{dx}{x^2} + 3\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{dx}{x-1} = 3\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{5}{x} + \text{cst}.$$

◇ Calcul d'une intégrale définie. En notant que
$$\lim_{x\to+\infty}(3\ln|x| - 3\ln|x-1|) = \lim_{x\to+\infty} 3\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$
nous obtenons
$$\int_2^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{y\to+\infty}\int_2^y F(x)\,dx = \frac{5}{2} - 3\ln 2.$$

***Exemple* 5.5.** — Soit $F(x) = \frac{3}{x^3-1}$.

◇ Recherche des pôles de la fraction.

Le dénominateur se décompose comme suit : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

La fonction rationnelle F admet donc trois pôles simples : un pôle réel 1 et deux pôles complexes conjugués $\mathbf{j} = \frac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathbf{j}} = \frac{-1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$.

L'idée consiste alors à

— travailler d'abord sur $\mathbb{C}$: $x^3 - 1 = (x-1)(x-\mathbf{j})(x-\bar{\mathbf{j}})$,

— puis de « séparer » les facteurs du dénominateur $(x-1)$, $(x-\mathbf{j})$, $(x-\bar{\mathbf{j}})$,

— enfin de revenir à $\mathbb{R}$.

Remarquons que les pôles de F sur $\mathbb{C}$ sont les racines complexes de l'équation $z^3 = 1$. On peut résoudre directement cette équation en recherchant z sous la forme $z = \rho e^{\mathbf{i}\vartheta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\vartheta \in [0, 2\pi[$, alors

$$z^3 = 1 \Longleftrightarrow \rho^3 e^{\mathbf{i}3\theta} = 1 \Longleftrightarrow \rho = 1 \text{ et } 3\vartheta \in \{0,\, 2\pi,\, 4\pi\} \Longleftrightarrow \rho = 1 \text{ et } \vartheta \in \left\{0,\, \frac{2\pi}{3},\, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

Nous obtenons ainsi trois racines ;

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} = \mathbf{j}, \qquad z_3 = e^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} = \bar{\mathbf{j}}.$$

Les nombres 1, $\mathbf{j}$ et $\bar{\mathbf{j}}$ sont les racines cubiques complexes de 1. Notons que $\mathbf{j}^3 = 1$, $\mathbf{j}^2 = \bar{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j}\bar{\mathbf{j}} = 1$ et $1 + \mathbf{j} + \bar{\mathbf{j}} = 0$.

◇ Décomposition sur $\mathbb{C}$.

Cherchons des nombres complexes a, b et c tels que $F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-\mathbf{j}} + \frac{c}{x-\bar{\mathbf{j}}}$.

— Nous isolons a en multipliant par $(x-1)$: $(x-1)F(x) = a + (x-1)\left(\frac{b}{x-\mathbf{j}} + \frac{c}{x-\bar{\mathbf{j}}}\right)$ et nous faisons tendre x vers 1

$$a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3}{x^2+x+1} = 1,$$

— nous isolons b en multipliant par $(x-\mathbf{j})$: $(x-\mathbf{j})F(x) = b + (x-\mathbf{j})\left(\frac{a}{x-1} + \frac{c}{x-\bar{\mathbf{j}}}\right)$ et nous faisons tendre x vers $\mathbf{j}$

$$b = \lim_{x\to \mathbf{j}}(x-\mathbf{j})F(x) = \lim_{x\to \mathbf{j}} \frac{3}{(x-1)(x-\bar{\mathbf{j}})} = \mathbf{j},$$

— rappelons que la fonction F est réelle, en conséquence pour tout x réel

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-\mathbf{j}} + \frac{c}{x-\bar{\mathbf{j}}} = \frac{\bar{a}}{x-1} + \frac{\bar{b}}{x-\bar{\mathbf{j}}} + \frac{\bar{c}}{x-\mathbf{j}}$$

En admettant l'unicité d'une telle décomposition nous pouvons identifier les coefficients deux à deux : $\bar{a} = a$ et $c = \bar{b}$. Le nombre a est donc réel et les nombres complexes b et c sont conjugués donc $c = \bar{\mathbf{j}}$,

— à titre de vérification nous multiplions par x :

$$xF(x) = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx}{x-\mathbf{j}} + \frac{cx}{x-\bar{\mathbf{j}}}$$

et nous faisons tendre x vers $+\infty$: $a+b+c = \lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^3-1} = 0$ d'où $a+b+c=0$.
Ainsi la décomposition de F sur $\mathbb{C}$ est

$$F(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{\mathbf{j}}{x-\mathbf{j}} + \frac{\bar{\mathbf{j}}}{x-\bar{\mathbf{j}}}.$$

Les fractions élémentaires $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{x-\mathbf{j}}$ et $\frac{1}{x-\bar{\mathbf{j}}}$ s'appellent « éléments simples de première espèce », ce sont les « parties polaires » de F relatives aux pôles 1, $\mathbf{j}$ et $\bar{\mathbf{j}}$.

◇ Décomposition sur $\mathbb{R}$.

— Nous rassemblons les parties polaires conjuguées :

$$\frac{\mathbf{j}}{x-\mathbf{j}} + \frac{\bar{\mathbf{j}}}{(x-\bar{\mathbf{j}})} = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$$

d'où la décomposition sur $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Les fractions élémentaires $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{x+2}{x^2+x+1}$ s'appellent respectivement « éléments simples de première espèce » et « de deuxième espèce ».

— Au vu des résultats précédents nous aurions pu directement rechercher des nombres réels a, b' et c' tels que

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b'x+c'}{x^2+x+1}.$$

Nous isolons a comme précédemment en multipliant par $(x-1)$ et en faisant tendre x vers 1. Nous isolons b' et c' en multipliant $F(x)$ par (x^2+x+1)

$$(x^2+x+1)F(x) = b'x + c' + (x^2+x+1)\left(\frac{a}{x-1}\right)$$

et en faisant tendre x vers $\mathbf{j}$

$$b'\mathbf{j} + c' = \lim_{x\to\mathbf{j}} (x^2+x+1)F(x) = \lim_{x\to\mathbf{j}} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{\mathbf{j}-1} = -\frac{3+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Nous en déduisons le système

$$\begin{cases} -\frac{b'}{2} + c' = -\frac{3}{2} \\ b'\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

duquel nous tirons $b' = -1$ et $c' = -2$.

◇ Calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int F(x)\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cst}. \end{aligned}$$

◇ Calcul d'une intégrale définie :

En notant que $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right)=0$, $\lim_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{5}{\sqrt{3}}=\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}$ nous obtenons que

$$\int_2^{+\infty}F(x)dx=\lim_{y\to+\infty}\int_2^y F(x)dx=\frac{1}{2}\ln(7)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right).$$

5.3. Décomposition en éléments simples. Soit $F=\frac{P}{Q}\in\mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle réelle irréductible. Notons

◇ α_1, α_2, …, α_p ses pôles réels distincts de multiplicités respectives μ_1, μ_2, …, μ_p ;

◇ ζ_1, $\overline{\zeta_1}$, ζ_2, $\overline{\zeta_2}$, …, ζ_q, $\overline{\zeta_q}$ ses pôles complexes non réel deux à deux conjugués distincts de multiplicités respectives ν_1, ν_2, …, ν_q.

Le dénominateur Q se factorise donc sur $\mathbb{R}$ (en le choisissant de coefficient dominant égal à 1) comme suit

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{\mu_i}\prod_{j=1}^{q}\left(x^2+\beta_jx+\gamma_j\right)^{\nu_j}$$

où $\beta_j=-2\mathrm{Re}(\zeta_j)$ et $\gamma_j=|\zeta_j|^2$ sont des réels tels que $\beta_j^2-4\gamma_j<0$.

***Théorème* 5.6** (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$). — *La fraction rationnelle F se décompose de manière unique sous la forme suivante :*

$$F(x)=E(x)+\sum_{i=1}^{p}G_i(x)+\sum_{j=1}^{q}H_j(x)$$

où

◇ *E est la partie entière de F ;*

◇ *$G_i(x)=\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{a_{ik}}{(x-\alpha_i)^k}$ est la partie polaire relative au pôle réel α_i ;*

◇ *$H_j(x)=\sum_{\ell=1}^{\nu_j}\frac{b_{j\ell}x+c_{j\ell}}{(x^2+\beta_jx+\gamma_j)^\ell}$ est la partie polaire relative aux pôles complexes conjugués ζ_j et $\overline{\zeta_j}$.*

Dans les quantités précédentes

◇ *les coefficients a_{ik}, $b_{j\ell}$ et $c_{j\ell}$ sont des nombres réels ;*

◇ *les fractions élémentaires $\frac{a_{ik}}{(x-\alpha_i)^k}$ s'appellent **éléments simples de 1ère espèce** ;*

◇ *les fractions élémentaires $\frac{b_{j\ell}x+c_{j\ell}}{(x^2+\beta_jx+\gamma_j)^\ell}$ s'appellent **éléments simples de 2ème espèce**.*

Autrement dit toute fraction rationnelle réelle se décompose en somme d'un polynôme et d'éléments simples de 1ère et 2ème espèce.

5.4. Intégration des éléments simples. On propose une méthode pratique de calcul de certains éléments simples.

***Proposition* 5.7** (Éléments simples de 1ère espèce). — *Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle réelle irréductible.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un pôle réel de F d'ordre de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$. Le dénominateur Q se factorise donc selon $Q(x) = (x-\alpha)^\mu Q_1(x)$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_1(\alpha) \neq 0$.

- *La partie polaire de F relative à α est de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu} \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}$ où les a_k sont des réels. En particulier $a_\mu = \displaystyle\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^\mu F(x) = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.*
- *Si α est un pôle simple (i.e. $\mu = 1$), la partie polaire de F relative à α est donnée par $\frac{a}{x-\alpha}$ où*

$$a = \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)F(x) = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

***Remarque* 5.8.** — Il est possible de déterminer tous les coefficients a_1, a_2, …, a_μ simultanément en effectuant une division suivant les puissances croissantes de $P(y+\alpha)$ par $Q_1(y+\alpha)$ à l'ordre $\mu - 1$, puis en divisant le quotient obtenu par y^μ, puis en remplaçant y par $x - \alpha$ …

On propose une méthode pratique de calcul de certains éléments simples.

***Proposition* 5.9** (Éléments simples de 2ème espèce). — *Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle réelle irréductible.*

Soit $(\zeta, \overline{\zeta}) \in \mathbb{C}^2$ des pôles complexes non réels conjugués de F de multiplicité $\nu \in \mathbb{N}^*$. Le dénominateur Q se factorise donc comme suit : $Q(x) = (x^2+\beta x+\gamma)^\nu Q_1(x)$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_1(\zeta) \neq 0$, $\beta = -2\mathrm{Re}(\zeta)$ et $\gamma = |\zeta|^2$.

- *La partie polaire de F relative à $(\zeta, \overline{\zeta})$ est de la forme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\nu} \frac{b_\ell x + c_\ell}{(x^2+\beta x+\gamma)^\ell}$ où les b_ℓ et c_ℓ sont des réels. En particulier $b_\nu\zeta + c_\nu = \displaystyle\lim_{x\to\zeta}(x^2+\beta x+\gamma)^\nu F(x) = \frac{P(\zeta)}{Q_1(\zeta)}$.*
- *Si ζ est un pôle simple (i.e. $\nu = 1$), la partie polaire de F relative à $(\zeta, \overline{\zeta})$ est donnée par $\frac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$ où $b_\nu\zeta + c_\nu = \frac{P(\zeta)}{Q_1(\zeta)}$.*

***Remarque* 5.10.** — Il est possible de déterminer tous les coefficients b_1, c_1, b_2, c_2, …, b_ν, c_ν en effectuant une décomposition en éléments simples (de 1ère espèce) d'abord sur $\mathbb{C}$, puis en rassemblant les parties polaires 2 à 2 conjuguées pour obtenir des éléments simples de 2ème espèce.

***Proposition* 5.11** (Primitives des éléments simples de 1ère espèce). — *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel α la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^n}$ admet des primitives sur tout intervalle ne contenant pas α données par*

- *pour $n = 1$, $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln(|x-\alpha|) + cst$;*
- *pour $n > 1$, $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + cst$;*

***Proposition* 5.12** (Primitives des éléments simples de 2ème espèce)**.** — *Pour tous réels a, b, c, d tels que $c^2 - 4d < 0$ un changement de variable de la forme $u = Ax + B$ permet de trouver des réels α et β tels que*

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx &= \int \frac{\alpha u+\beta}{u^2+1}\,du \\
&= \alpha \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \beta \int \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln(u^2+1) + \beta\arctan(u) + cst \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln(x^2+cx+d) + \beta\arctan(Ax+B) + cst.
\end{aligned}$$

Il est utile de connaître la primitive suivante : pour tous réels a, b tels que $b \neq 0$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + cst.$$

5.5. Synthèse de la méthode d'intégration. Soit F une fonction rationnelle définie sur un intervalle I.

Pour déterminer une primitive de F sur I nous procédons de la manière suivante :

- ◇ nous déterminons la partie entière de F à l'aide d'une division euclidienne (si le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière est nulle) ;
- ◇ nous déterminons tous les pôles de F ou nous factorisons le dénominateur au maximum ;
- ◇ nous écrivons la décomposition en éléments simples de F en faisant apparaître les éléments simples de 1ère et 2ème espèces.
- ◇ nous intégrons chaque terme de la décomposition.

***Remarque* 5.13.** — Il est possible de calculer des primitives pour tous les éléments simples de 2ème espèce de la forme $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Nous nous ramenons tout d'abord à l'aide d'un changement de variable $x = Au + B$ à des éléments simples de 2ème espèce de la forme $\frac{u}{(u^2+1)^n}$ et $\frac{1}{(u^2+1)^n}$ puis

- ◇ $\int \frac{u}{(u^2+1)^n}\,du = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(u^2+1)^{n-1}} + \text{cst}$ pour $n > 1$;
- ◇ nous pouvons calculer $\int \frac{du}{(u^2+1)^n}\,du$ par récurrence ou à l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$ en conduisant à un calcul de primitive d'un polynôme trigonométrique.

5.6. Exemples de synthèse.

***Exemple* 5.14.** — Soit $F(x) = \frac{x^6}{(x^2-1)^2}$.

- ◇ Factorisation du dénominateur et pôles de la fraction.
  Le dénominateur de F se factorise de la façon suivante $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$. La fonction rationnelle F admet donc deux pôles réels doubles 1 et -1.
- ◇ Calcul de la partie entière.
  Effectuons la division euclidienne de x^6 par $(x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$:

  $$x^6 = (x^4 - 2x^2 + 1)(x^2 + 2) + (3x^2 - 2);$$

la partie entière de F est donc $E(x) = x^2 + 2$.

◇ Forme de la décomposition.
La fonction rationnelle F admet une décomposition de la forme $F = E + G_1 + G_2$ avec

$$G_1(x) = \frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{b_1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad G_2(x) = \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{b_2}{x+1}$$

les coefficients a_1, b_1, a_2 et b_2 étant réels.

Les fractions élémentaires G_1 et G_2 sont les parties polaires relatives aux pôles 1 et -1. Remarquons que F (et donc E) est une fonction paire ; l'identité $F(x) = F(-x)$ conduit à

$$\frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{b_2}{x+1} = \frac{a_1}{(x+1)^2} - \frac{b_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} - \frac{b_2}{x-1}.$$

Par unicité de la décomposition nous pouvons identifier les éléments simples deux à deux d'où les relations entre coefficients : $a_2 = a_1$ et $b_2 = -b_1$.

◇ Calcul des coefficients.

— Nous trouvons a_1 en multipliant $F(x)$ par $(x-1)^2$ et en faisant tendre x vers 1 : $a_1 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 F(x) = \dfrac{1}{4}$.

— Puis avec $a_2 = a_1$ nous trouvons $a_2 = \frac{1}{4}$.

— Pour calculer b_1 (et b_2) nous utilisons une valeur particulière de x, par exemple $x = 0$: d'une part nous avons directement $F(0) = 0$, d'autre part en utilisant la forme $F = E + G_1 + G_2$ nous obtenons

$$F(0) = 2 + a_1 - b_1 + a_2 + b_2 = 2 + 2a_1 - 2b_1$$

d'où nous tirons l'équation $b_1 = a_1 + 1$ soit $b_1 = \frac{5}{4}$.

— Enfin avec $b_2 = -b_1$ nous trouvons $b_2 = -\frac{5}{4}$.

◇ La décomposition de F en éléments simples est :

$$F(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{5}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{5}{4(x+1)}.$$

◇ Nous en déduisons une primitive de F sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int F(x)\,dx &= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{5}{4}\ln|x+1| + \text{cst} \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \text{cst}.\end{aligned}$$

***Exemple* 5.15.** — Considérons la fonction $F(x) = \frac{x^8}{x^4+1}$.

◇ Recherche des pôles de la fraction.

Les pôles de F sur $\mathbb{C}$ sont les racines complexes de l'équation $z^4 = -1$. Nous pouvons résoudre directement cette équation en cherchant z sous la forme $z = \rho e^{\mathbf{i}\vartheta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$

et $\vartheta \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} z^4 = -1 &\iff \rho^4 e^{\mathbf{i}(4\vartheta)} = -1 \\ &\iff \rho = 1 \text{ et } 4\vartheta \in \{\pi,\, 3\pi,\, 5\pi,\, 7\pi\} \\ &\iff \rho = 1 \text{ et } \vartheta \in \left\{\frac{\pi}{4},\, \frac{3\pi}{4},\, \frac{5\pi}{4},\, \frac{7\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi quatre racines :

$$z_1 = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \qquad z_2 = e^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \qquad z_3 = e^{\mathbf{i}\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \qquad z_4 = e^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}.$$

Les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont les racines quatrièmes complexes de -1 ; elles sont deux à deux conjuguées : $z_4 = \overline{z_1}$ et $z_3 = \overline{z_2}$.

La fonction rationnelle F admet donc quatre pôles simples complexes non réels deux à deux conjugués.

◇ Factorisation du dénominateur.

Nous écrivons la factorisation de $x^4 + 1$ sur $\mathbb{C}$:

$$(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4)$$

de laquelle nous déduisons celle sur $\mathbb{R}$

$$\Big((x - z_1)(x - \overline{z_1})\Big)\Big((x - z_2)(x - \overline{z_2})\Big) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

◇ Calcul de la partie entière.

En effectuant la division euclidienne de x^8 par x^4+1 nous obtenons $x^8 = (x^4+1)(x^4-1)+1$. La partie entière de F est donc $E(x) = x^4 - 1$.

◇ Forme de la décomposition.

La fonction rationnelle F admet une décomposition de la forme $F = E = H_1 + H_2$ avec

$$H_1 = \frac{a_1 x + b_1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \qquad \text{et} \qquad H_2 = \frac{a_2 x + b_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2 étant réels.

Les fractions élémentaires H_1 et H_2 sont des éléments simples de 2ème espèce. Remarquons que F est une fonction paire ; l'identité $F(x) = F(-x)$ conduit à

$$x^4 + 1 + \frac{a_1 x + b_1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{a_2 x + b_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = x^4 + 1 + \frac{-a_1 x + b_1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{-a_2 x + b_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Par unicité de la décomposition nous pouvons identifier les éléments simples deux à deux d'où les relations entre coefficients : $a_2 = -a_1$ et $b_2 = b_1$.

Notons également que la parité de F entraîne celle de sa partie entière E.

◇ Calcul des éléments simples.

— Pour calculer a_1 et b_1 nous multiplions F par $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ et nous faisons tendre x vers z_1 :

$$az_1 + b_1 = \lim_{x \to z_1} (x^2 - \sqrt{2}x + 1)F(x) = \lim_{x \to z_1} \frac{x^8}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{z_1^8}{z_1^2 + \sqrt{2}z_1 + 1}.$$

Rappelons que $z_1^4 = -1$ et $z_1^2 - \sqrt{2}z_1 + 1 = 0$; ainsi $z_1^8 = 1$ et $z_1^2 + \sqrt{2}z_1 + 1 = 2\sqrt{2}z_1$ d'où $a_1 z_1 + b_1 = \frac{\overline{z_1}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\mathbf{i}}{4}$.

Nous en déduisons le système

$$\begin{cases} \frac{a_1}{\sqrt{2}} + b_1 = \frac{1}{4} \\ \frac{a_1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

duquel nous tirons $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$. L'élément simple correspondant est donc :

$$H_1(x) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

— La parité de F fournit l'autre élément simple : $H_2(x) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$.

◇ La décomposition de F en éléments simples est donc :

$$F(x) = x^4 + 1 + \frac{1}{4}\frac{-\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

◇ Calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$.

— Nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\, dx + \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \text{cst} \end{aligned}$$

— De manière analogue

$$\int \frac{-\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x - 1) + \text{cst}.$$

— En intégrant la partie entière nous trouvons :

$$\int F(x)\, dx = \frac{x^5}{5} + x + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1)\right) + \text{cst}.$$

◇ Un calcul d'intégrale définie est le suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x)\, dx &= \frac{6}{5} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2} + 1) + \arctan(\sqrt{2} - 1)\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{6}{5} + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$