

Étude locale de fonctions

Table des matières

Étude locale de fonctions	1
1. Prépondérance	4
2. Equivalence	5

Dans tout ce qui suit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. Prépondérance

Définition 1.1. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

La fonction f est définie au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que f soit définie sur $\mathcal{V} \setminus \{x_0\}$.

Exemple 1.2. — La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie au voisinage de 0 mais pas sur un voisinage de 0.

Exemple 1.3. — La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est définie au voisinage de 0 mais pas sur un voisinage de 0.

Définition 1.4. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

La fonction f est négligeable devant ϕ au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une application ε définie sur $\mathcal{V} \setminus \{x_0\}$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\} & f(x) = \varepsilon(x)\phi(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Notation. On note alors « $f = o_{x_0}(\phi)$ » ou encore « $f = o(\phi)$ au voisinage de x_0 ».

Remarque 1.5. — La seule fonction négligeable devant la fonction nulle est la fonction nulle.

Exemple 1.6. — Nous avons $\ln|x| = o_0\left(-\frac{1}{|x|}\right)$; en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous pouvons écrire $\ln|x| = -\frac{\varepsilon(x)}{|x|}$ avec $\varepsilon(x) = -|x|\ln|x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 1.7. — Nous avons $\sin(x) = o_0(\cos(x))$; en effet pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nous pouvons écrire $\sin(x) = \varepsilon(x)\cos(x)$ avec $\varepsilon(x) = \tan(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 1.8. — Nous avons $\sin(x) = o_0(\sqrt{|x|})$; en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous pouvons écrire $\sin(x) = \varepsilon(x)\sqrt{|x|}$ avec $\varepsilon(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 1.9. — Nous avons $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$; en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous pouvons écrire $\ln(x) = x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 1.10. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Considérons deux fonctions f et ϕ définies au voisinage de x_0 .

Si ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0 , alors $f = o_{x_0}(\phi)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0$.

Proposition 1.11. — Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient f, g, ϕ et ψ quatre fonctions définies au voisinage de x_0 .

- Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ et $g = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$, alors $f + g = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$.
- Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$, alors $\lambda f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$.
- Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ et $g = \mathcal{O}_{x_0}(\psi)$, alors $fg = \mathcal{O}_{x_0}(\phi\psi)$.
- Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ et $\phi = \mathcal{O}_{x_0}(\psi)$, alors $f = \mathcal{O}_{x_0}(\psi)$.

Remarque 1.12. — Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ et si f et ϕ ne s'annulent pas au voisinage de x_0 , alors $\frac{1}{f} = \mathcal{O}_{x_0}\left(\frac{1}{\phi}\right)$.

Remarque 1.13. — Si $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ et $g = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$, alors $-f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ et $g - f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ soit $g = f + \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$.

Exemple 1.14. — Soient α et β deux réels.

Si $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha = \mathcal{O}_{+\infty}(x^\beta)$.

Si $\alpha > \beta$, alors $x^\alpha = \mathcal{O}_{0+}(x^\beta)$.

Exemple 1.15. — Soient α et β dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$(\ln x)^\alpha = \mathcal{O}_{+\infty}(x^\beta) \quad \text{et} \quad |\ln x|^\alpha = \mathcal{O}_{0+}\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

Exemple 1.16. — Soient α et β dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$x^\beta = \mathcal{O}_{+\infty}(\exp(\alpha x)) \quad \text{et} \quad |x|^\beta = \mathcal{O}_{-\infty}(\exp(-\alpha x)).$$

2. Equivalence

2.1. Définitions et propriétés.

Définition 2.1. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soient f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

La fonction f est équivalente à ϕ au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une application Λ définie sur $\mathcal{V} \setminus \{x_0\}$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\} & f(x) = \Lambda(x)\phi(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \Lambda(x) = 1 \end{cases}$$

Notation. On écrit alors « $f \sim_{x_0} \phi$ ».

Remarque 2.2. — La seule fonction équivalente à la fonction nulle est la fonction nulle.

Exemple 2.3. — Nous avons $\sin(x) \sim_0 x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous pouvons écrire $\sin(x) = \Lambda(x)x$ avec $\Lambda(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \Lambda(x) = 1$.

Exemple 2.4. — Nous avons $\exp(x) - 1 \sim_0 x$; en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous pouvons écrire $\exp(x) - 1 = \Lambda(x)x$ avec $\Lambda(x) = \frac{\exp(x)-1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \Lambda(x) = 1$.

Exemple 2.5. — Nous avons $x^3 + 2x^2 - 1 \sim_{+\infty} x^3$; en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ nous pouvons écrire $x^3 + 2x^2 - 1 = \Lambda(x)x^3$ avec $\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Lambda(x) = 1$.

Proposition 2.6. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Considérons f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

Si ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0 , alors $f \sim_{x_0} \phi$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 1$.

Corollaire 2.7. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Considérons f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

S'il existe un réel ℓ non nul tel que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \ell \end{cases}$$

alors $f \sim_{x_0} \phi$.

Proposition 2.8. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Considérons f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

Supposons que ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0 . Alors $f \sim_{x_0} \phi$ si et seulement si $f - \phi = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$.

2.2. Utilisation des développements limités pour la recherche d'équivalents.

Proposition 2.9. — Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en x_0 de partie régulière $\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$ non nulle.

Alors

$$f(x) \sim_{x_0} a_\nu(x - x_0)^\nu$$

où $\nu = \min\{\ell \mid a_\ell \neq 0\}$.

Exemple 2.10. — Il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$; autrement dit $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}_0(x^4)$. Alors

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}_0(x^4)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}_0(x^3)}.$$

Or

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \mathcal{O}_0(u^3)$$

donc

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}_0(x^3) \right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \mathcal{O}_0(x^2).$$

Par suite $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \sim_0 \frac{x}{6}$.

2.3. Opérations sur les équivalents.

Proposition 2.11. — Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Considérons f, g, ϕ, ψ quatre fonctions définies au voisinage de x_0 sur un ensemble D et ne s'annulant pas sur D .

Alors

- ◇ $f \sim_{x_0} f$;
- ◇ si $f \sim_{x_0} \phi$, alors $\phi \sim_{x_0} f$;
- ◇ si $f \sim_{x_0} \phi$ et $\phi \sim_{x_0} \psi$, alors $f \sim_{x_0} \psi$;
- ◇ si $f \sim_{x_0} \phi$ et $g \sim_{x_0} \psi$, alors $fg \sim_{x_0} \phi\psi$;
- ◇ soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $f \sim_{x_0} \phi$, alors $f^n \sim_{x_0} \phi^n$;
- ◇ si $f \sim_{x_0} \phi$, alors $\frac{1}{f} \sim_{x_0} \frac{1}{\phi}$.

Attention ! En général $f \sim_{x_0} \phi$ et $g \sim_{x_0} \psi$ n'impliquent pas $f + g \sim_{x_0} \phi + \psi$. Par exemple on a

$$x + x^2 \sim_0 x \qquad -x + x^3 \sim_0 -x$$

mais

$$(x + x^2) + (-x + x^3) = x^2 + x^3 \sim_0 x^2.$$

2.4. Composition de fonctions équivalentes.

Proposition 2.12. — Soient f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que f et ϕ ne s'annulent pas au voisinage de y_0 .

Soit h une application définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f \sim_{y_0} \phi$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = y_0$, alors $f(h(x)) \sim_{x_0} \phi(h(x))$.

Exemple 2.13. — Considérons $h: x \mapsto \sin(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. Comme $\exp(x) - 1 \sim_0 x$, on a $\exp(h(x)) - 1 \sim_0 h(x)$, i.e. $\exp(\sin(x)) - 1 \sim_0 \sin(x)$.

Exemple 2.14. — Considérons $h: x \mapsto x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. À partir de $\text{sh}(x) \sim_{+\infty} \text{ch}(x)$ on obtient $\text{sh}(x^2) \sim_{+\infty} \text{ch}(x^2)$.

2.5. Équivalents aux fonctions usuelles. Soit f une fonction dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, cette égalité se réécrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = 1$$

autrement dit

$$f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x - x_0).$$

En particulier

$\exp(x) - 1 \sim_0 x$	$\ln(1 + x) \sim_0 x$	$\arcsin(x) \sim_0 x$
$\sin(x) \sim_0 x$	$(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$	$\operatorname{argth}(x) \sim_0 x$
$\tan(x) \sim_0 x$	$\operatorname{sh}(x) \sim_0 x$	$\operatorname{argsh}(x) \sim_0 x$
$\arctan(x) \sim_0 x$	$\operatorname{th}(x) \sim_0 x$	

En utilisant

$$1 - \cos(x) = 2 \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) - 1 = 2 \left(\operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2$$

nous obtenons

$$1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}.$$

De plus

- ◇ toute fonction polynomiale est équivalente en $\pm\infty$ à son monome de plus haut degré ;
- ◇ toute fonction rationnelle est équivalente en $\pm\infty$ au quotient des monomes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

2.6. Changement de variable.

Proposition 2.15. — Soient f et ϕ deux fonctions définies au voisinage de 0.

Soit h une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f \sim_0 \phi$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$, alors $f(h(x)) \sim_{x_0} \phi(h(x))$.

Exemple 2.16. — Donnons un équivalent de $g: x \mapsto \ln(x - 1)$ en 2. Posons $h(x) = x - 2$. D'une part $\ln(1 + x) \sim_0 x$, d'autre part $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$. Ainsi $\ln(x - 1) \sim_2 (x - 2)$.

Exemple 2.17. — Donnons un équivalent de $f: x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}$ en $+\infty$. Posons $h(x) = \frac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned} f(h(x)) &= \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x} (1 + \sqrt{x})} + \sqrt{\frac{1}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x}} (\sqrt{1 + \sqrt{x}} + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{1 + \sqrt{x}} + 1) \end{aligned}$$

donc $f(h(x)) \sim_{0+} \frac{2}{\sqrt{x}}$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. Il en résulte que $f(h(h(x))) \sim_{+\infty} 2\sqrt{x}$ soit $f(x) \sim_{+\infty} 2\sqrt{x}$ puisque $f(h(h(x))) = f(x)$.

2.7. Application au calcul de limites.

Proposition 2.18. — Deux fonctions équivalentes en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ont ou bien même limite en x_0 , ou bien pas de limite en x_0 .

Exemple 2.19. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ où $f: x \mapsto \frac{\ln(1+2\tan(x))}{\sin(x)}$. D'une part $\sin(x) \sim_0 0$, d'autre part $\ln(1+2\tan(x)) \sim_0 2\tan(x) \sim_0 2x$. Par conséquent $f \sim_0 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Exemple 2.20. — Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ où $f: x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Rappelons que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

On a $\ln(1+u) \sim_0 u$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'où $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. Par suite $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue en 1, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp(1).$$

2.8. Suites équivalentes.

Rappel. Une suite réelle est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.21. — Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. La suite $(u_n)_n$ est équivalente à la suite $(v_n)_n$ (lorsque n tend vers $+\infty$) s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et une suite $(\Lambda_n)_n$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_n = 1 \quad \forall n \geq p \quad u_n = \Lambda_n v_n.$$

Notation. On écrit alors « $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ».

Exemple 2.22. — Nous avons $(2n+1)^2 \sim_{+\infty} 4n^2$; en effet posons $\Lambda_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+1)^2 = 4n^2 \Lambda_n.$$

Exemple 2.23. — Nous avons $\ln(n+1) \sim_{+\infty} \ln(n)$; en effet si $\Lambda_n = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_n = 1 \quad \ln(n+1) = \Lambda_n \ln(n).$$

Remarque 2.24. — Si la suite $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Les propriétés de la relation d'équivalence pour les fonctions réelles au voisinage de $+\infty$ sont également vraies pour la relation d'équivalence des suites.

Proposition 2.25. — Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes. Alors

- ◇ ou bien les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$;
- ◇ ou bien $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ n'ont pas de limite.

Exemple 2.26. — La suite $(u_n)_n = \left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ car $u_n \sim_{+\infty} n$.

Exemple 2.27. — La suite $(u_n)_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{(2n+1)^2}\right)_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car $u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{4n^2}$.