Rappels, Analyse de la variable réelle

Table des matières

1. Généralités sur les fonctions de la variable réelle

1.1. Introduction : qu'est ce qu'une fonction ? Lorsqu'on cherche à utiliser les mathématiques pour modéliser un problème physique, chimique, économique, ou de la vie courante, la modélisation la plus simple est la *modélisation discrète*. Disons qu'on cherche à comprendre l'évolution d'une quantité en fonction du temps, alors la mesure de la quantité à des intervalles de temps réguliers conduit à un tableau de données : on note u_n la valeur obtenue à la n-ième mesure. Cette méthode de modélisation correspond à étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les mesures successives. Cette première approche peut permettre d'avoir une idée du comportement asymptotique. Par exemple si on mesure la quantité de réactifs présents au cours d'une réaction chimique, les mesures successives vont permettre d'avoir une idée des quantités présentes à l'équilibre de la réaction. Ce type de modélisation est également très bien adapté à des processus qui apparaissent naturellement comme discrets ; on peut ainsi penser à mesurer par exemple la hauteur d'une bille roulant dans un escalier, ou le nombre de voitures produites dans une journée par une usine. Dans ce cas l'idée que l'on pourra se faire du processus dépend étroitement de l'intervalle choisi et de la précision de la mesure. On modélise en effet dans ce système la quantité comme étant constante entre la mesure au temps n et la mesure au temps $n+1$. On voit donc l'intérêt à avoir la possibilité de réduire l'intervalle de temps entre deux mesures. Par ailleurs dans de nombreux cas, le processus apparaît plus naturellement comme un processus continu que comme un procédé discret : si on fait tomber une balle du haut de la tour Eiffel, on voit que la modélisation discrète conduit à considérer que la balle descend « en sautant » de la hauteur h_n à la hauteur h_{n+1} ce qui peut être « vrai » si les mesures ne sont pas trop précises et l'intervalle de temps très court, mais ne correspond pas nécessairement à l'intuition que l'on peut avoir du processus. Dans ce cas, on aimerait naturellement avoir une modélisation plus raffinée du processus : on peut l'obtenir en faisant une interpolation linéaire entre les points des mesures. Ceci conduit à ne plus modéliser le processus de façon discrète : on considère que la quantité mesurée évolue continument et linéairement entre deux mesures. Cependant dans l'exemple précédent cette modélisation ne donne pas une approximation de bonne qualité si le nombre de mesures n'est pas très grand. Il existe une meilleure approximation de la hauteur de la balle, qui donne une idée globale du processus à l'aide de deux mesures simplement, si l'on considère que la hauteur de la balle se comporte sous la forme $h(t) = h_0 - at^2$ en fonction du temps, avec a une constante. En fait, on peut même raffiner cette expression en prenant en compte le frottement de la balle dans l'air, ce qui conduit à chercher la hauteur sous la forme $h(t) = h_0 - at^2 + bt$, avec a et b des constantes.
On voit donc que la notion de fonction est une notion apparaissant naturellement dans toute tentative de modélisation d'un processus par les mathématiques : celle d'une quantité réelle qui varie lorsque varie un paramètre réel.
En mathématiques, on définit une fonction de la variable réelle de la façon suivante

***Définition* 1.1.** — Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f\colon A \to \mathbb{R}$ où A est une partie de $\mathbb{R}$.

Les fonctions peuvent être définies de multiples façons :

- **Par une expression algébrique** : on peut définir l'application f en donnant une expression explicite qui permet de calculer $f(x)$ en fonction de la variable réelle x pour chaque x. Par exemple : $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ou $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. C'est le cas que nous rencontrerons le plus fréquemment dans le cours de mathématiques.
- **Par un graphe** : on peut prendre le graphique donné par un appareil comme un sismographe, un hygromètre, un électrocardioscope,...
  Dans ce premier cas, par exemple, la courbe produite par le sismographe permet de définir une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui à une valeur du temps compris dans l'intervalle de mesure associe l'accélération verticale du sol.
- **Par une définition verbale** : on peut définir la fonction qui au rayon d'un disque associe l'aire de ce disque. Cela signifie que l'on considère l'application A de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui à la valeur du rayon r associe l'aire $A(r)$ du disque de rayon r. On peut également considérer la fonction qui au poids d'une lettre associe le prix de son affranchissement.
- **Par un tableau de valeurs** : On peut reprendre l'exemple de la fonction qui au poids d'une lettre associe le prix de son affranchissement et dresser le tableau des valeurs :

Poids jusqu'à	$20g$	$50g$	$100g$	$250g$	$500g$	$1kg$	$2kg$	$3kg$
Tarif en euros	$0,58$	$0,97$	$1,45$	$2,35$	$3,15$	$4,15$	$5,40$	$6,25$

  qui permet d'exprimer la fonction « coût de l'affranchissement » en fonction du poids.

Quand on travaille sur la modélisation d'un problème, ces quatre aspects sont bien souvent complémentaires et permettent, par étapes successives, de construire une modélisation raisonnable du problème. Cependant, dans le cadre de ce cours, nous travaillerons essentiellement sur les deux (ou trois) premiers aspects, et en particulier sur la relation entre la donnée algébrique explicite et le graphe d'une fonction.

1.2. Quelques caractéristiques d'une fonction.

- Domaine de définition.
  Il arrive que l'on donne une fonction par une expression algébrique explicite, sans préciser l'espace de départ de l'application. Dans ce cas on appelle **domaine de définition** de la fonction f l'ensemble, noté $\mathcal{D}_f$, des éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels l'expression algébrique a un sens. Exemples : $f(x) = \sqrt{x-1}$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x+1}$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
  Plus généralement, le domaine de définition de la fonction f est l'espace de départ de f vue comme une application de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$.
- Graphe d'une fonction.
  On appelle **graphe** d'une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathcal{D}_f, y = f(x)\}$. On peut représenter graphiquement le

graphe d'une fonction en traçant la courbe $y = f(x)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le graphe d'une fonction intersecte toute droite verticale en au plus un point.

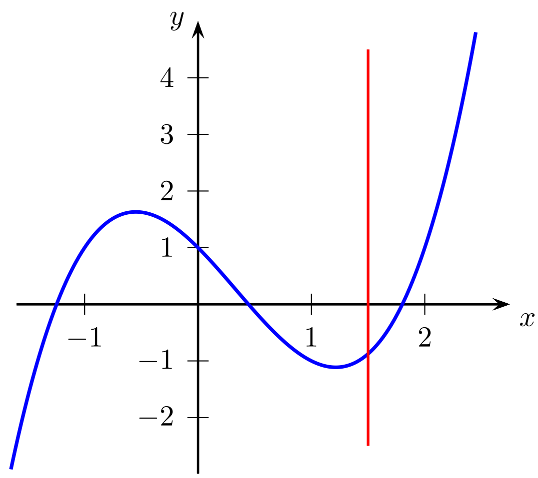


FIGURE 1. Graphe d'une fonction

- ◇ Parité.
  Si le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f est symétrique par rapport à 0 (c'est à dire que si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$), alors on dit que f est
  - **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = f(x)$;
  - **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

  On remarque que le graphe de f est
  - invariant par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) si f est paire ;
  - invariant par la symétrie centrale de centre O si f est impaire.

  On peut donc déterminer le graphe complet de f en le connaissant sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. Exemples : la fonction $f(x) = x^2$ est paire ; la fonction $f(x) = x^3$ est impaire.
- ◇ Périodicité.
  On dit qu'une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $x + T \in \mathcal{D}_f$. Un tel nombre T est appelé **une période** de f. On appelle **la période** d'une fonction périodique f le plus petit réel T strictement positif tel que $f(x+T) = f(x)$, lorsque ce nombre existe. Exemples : $\cos(x)$, $\sin(x)$ sont périodiques, de période 2π, $\tan(x)$ est périodique de période π.
  On remarque que le graphe d'une fonction f périodique de période T est invariant par toute translation de vecteur $(kT, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ un entier. On peut donc déterminer le graphe complet de f en le connaissant sur une période.
- ◇ Injectivité, surjectivité.
  Une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est injective si $f(x) \neq f(x')$ pour tout couple de points $x \neq x'$ dans le domaine de définition. Une fonction est injective si et seulement si l'intersection de son graphe avec toute droite horizontale est au plus égale à

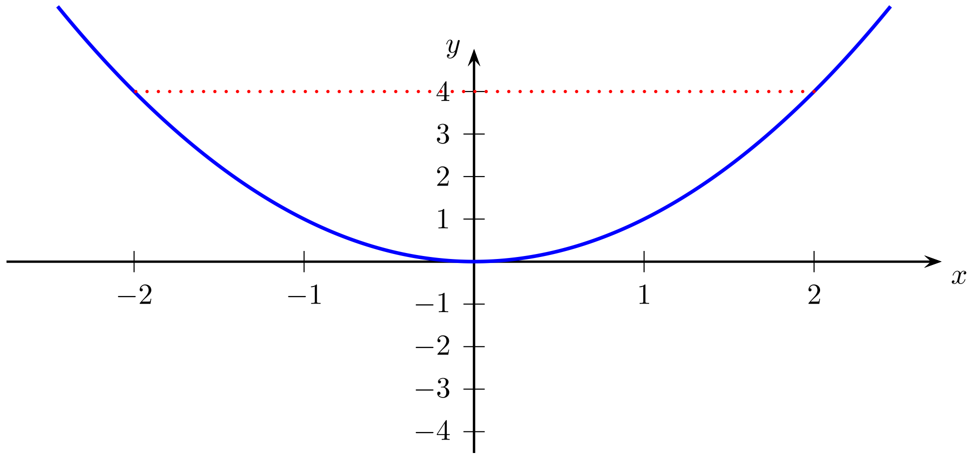


FIGURE 2. Graphe de la fonction x^2

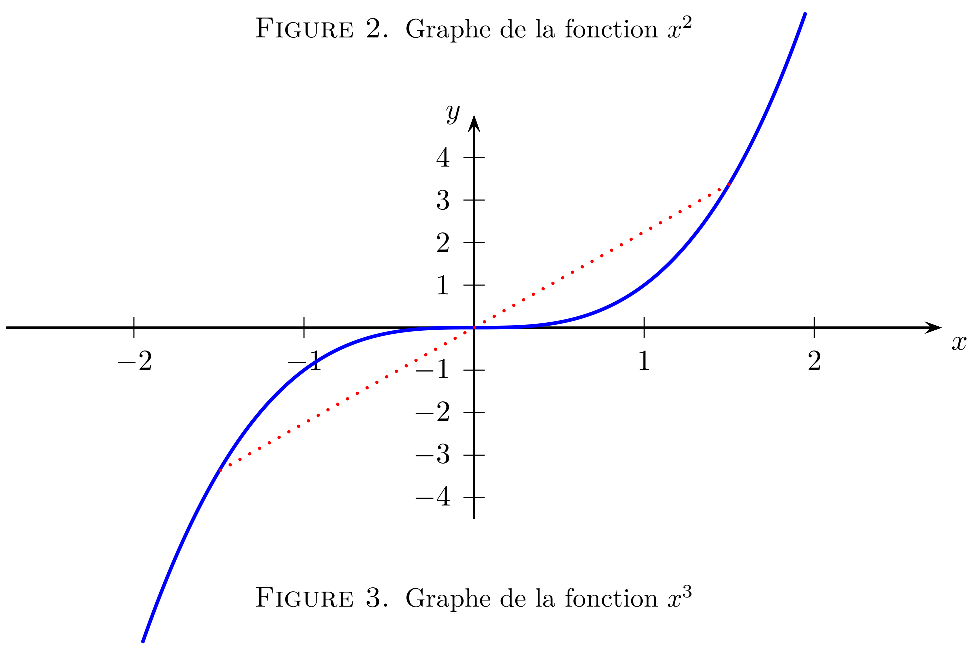


FIGURE 3. Graphe de la fonction x^3

un point. Elle est surjective si et seulement si l'intersection de son graphe avec toute droite horizontale est au moins égale à un point *i.e.* si $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$, et plus généralement la fonction $\tilde{f} \colon \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est surjective. Si une fonction $f \colon \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ est bijective, alors sa bijection réciproque est la fonction $g : f(\mathcal{D}_f) \to \mathcal{D}_f$ dont le graphe est obtenu en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

◇ Translations, dilatations.
Soit $c > 0$. Pour déterminer le graphe de la fonction $g(x)$ dans les cas suivants, il faut effectuer les opérations suivantes sur le graphe de f :

(1) Si $g(x) = f(x) + c$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers le haut.

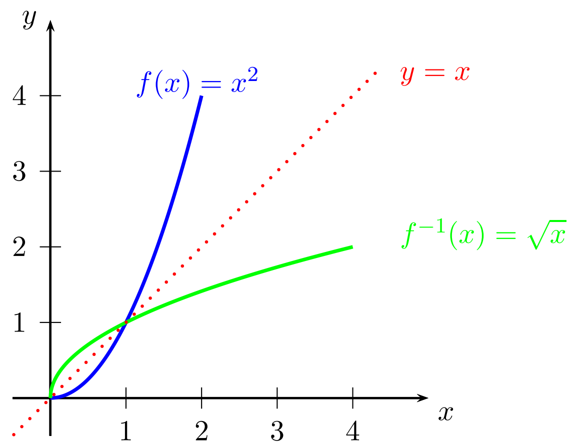


FIGURE 4. Graphe de la fonction x^2 sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction réciproque

(2) Si $g(x) = f(x) - c$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers le bas.

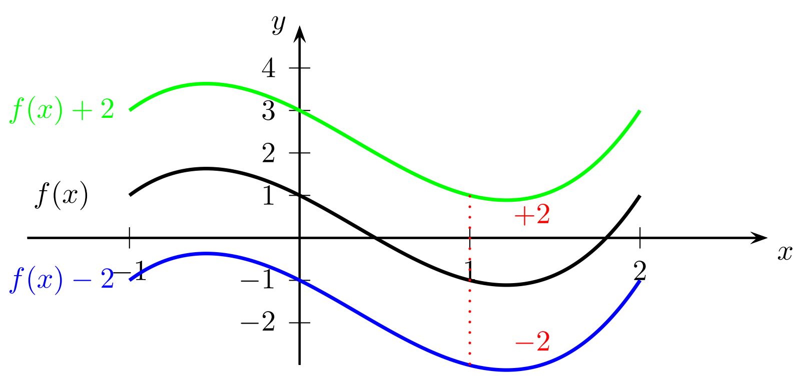


FIGURE 5. Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et des fonctions $f(x) + 2$ et $f(x) - 2$

(3) Si $g(x) = f(x - c)$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers la droite.

(4) Si $g(x) = f(x + c)$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers la gauche.

(5) Si $g(x) = cf(x)$ il faut dilater (ou contracter) verticalement le graphe de $f(x)$ d'un facteur c.

(6) Si $g(x) = f(cx)$ il faut dilater (ou contracter) horizontalement le graphe de $f(x)$ d'un facteur $\frac{1}{c}$.

◇ Monotonie.

Soit $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $A \subset \mathcal{D}_f$ une partie de $\mathcal{D}_f$.

— On dit que f est **croissante** sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

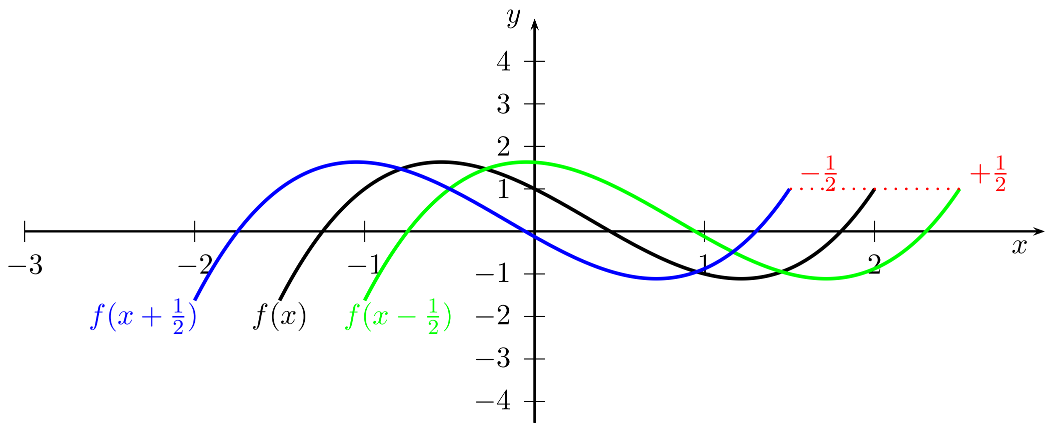


FIGURE 6. Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et des fonctions $f(x - \frac{1}{2})$ et $f(x - +\frac{1}{2})$

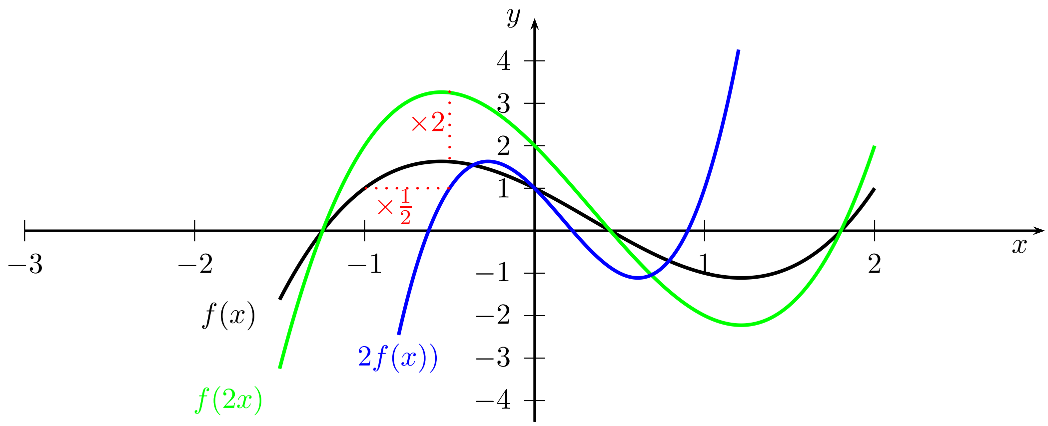


FIGURE 7. Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et des fonctions $2f(x)$ et $f(2x)$

— On dit que f est **strictement croissante** sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

— On dit que f est **décroissante** sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

— On dit que f est **strictement décroissante** sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

— On dit que f est **monotone** sur A si f est croissante sur A ou décroissante sur A.

— On dit qu'elle est strictement monotone sur A si elle est strictement croissante sur A ou strictement décroissante sur A.

◇ Convexité.
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle. On dit que f est **convexe** sur I si les cordes de f sont au-dessus de sa courbe représentative : cela signifie que pour tout couple de points $(x, y) \in I^2$, et tout $t \in [0, 1]$, on a : $f(tx + (1 - t)y) \leq t(f(x)) + (1 - t)f(y)$.
On dit que f est **concave** sur I si les cordes de f sont au-dessous de sa courbe

représentative : cela signifie que pour tout couple de points $(x, y) \in I^2$, et tout $t \in [0, 1]$, on a : $f(tx + (1-t)y) \geq t(f(x)) + (1-t)f(y)$.

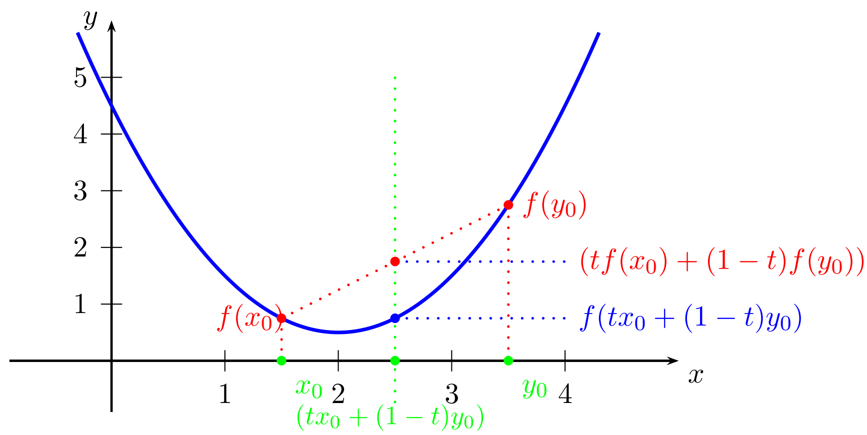


FIGURE 8. Graphe d'une fonction convexe

◇ Extrema.

***Définition* 1.2.** — Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

(1) On dit que f admet un **maximum local** en un point $x_0 \in I$ (respectivement un *minimum local*) s'il existe un voisinage de x_0, de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$, avec $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).

(2) On dit que f admet un **maximum global sur** I en un point $x_0 \in I$ (respectivement un **minimum global sur** I) si $\forall x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).

Il faut remarquer qu'un extremum local n'est pas nécessairement un extremum global et réciproquement.
Regardons la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.
Cette fonction admet un minimum local en $x_1 = 1$ et un maximum local en $x_0 = 0$. Cependant, sur l'intervalle $[-1, 2]$, f admet un minimum global en -1 et un maximum global en 2, qui ne sont pas des extrema locaux, et les points x_0 et x_1 ne sont pas des extrema globaux sur l'intervalle $[-1, 2]$.

***Théorème* 1.3.** — *Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur son domaine $\mathcal{D}_f$. Alors si f est strictement monotone, f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$ et sa bijection réciproque est également strictement monotone* (*de même sens de variation que f*).

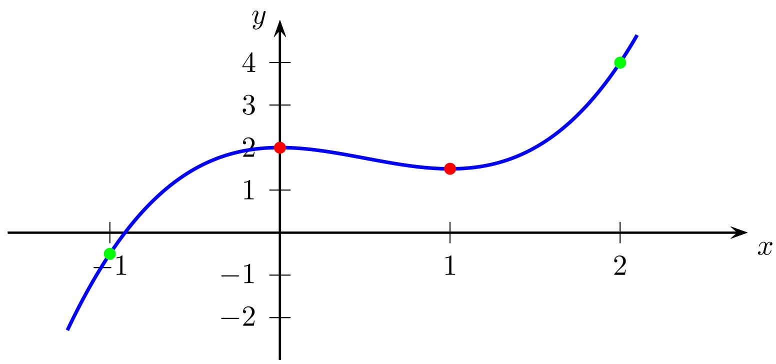


FIGURE 9. Extremas locaux et globaux

DÉMONSTRATION. On sait déjà que, vue comme une application de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$, f est surjective. Si x et y sont deux points distincts de $\mathcal{D}_f$, alors on a $x < y$ ou bien $x > y$, et donc $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$. La fonction f est donc bien injective, et la bijection réciproque est également strictement monotone. □

La réciproque est fausse en général (Voir la Figure 10).

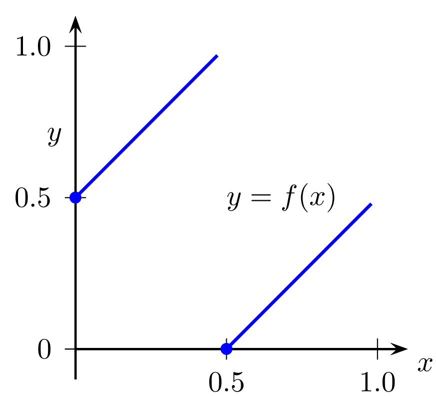


FIGURE 10. Graphe d'une fonction injective et non strictement monotone

1.3. Exemples de fonctions.

Fonctions constantes: Soit $c \in \mathbb{R}$ un nombre réel. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ est dite **constante** car elle attribue à tout réel x la même valeur c. La restriction d'une fonction constante à une partie de $\mathbb{R}$ est encore appelée une fonction constante. (voir Figure 11)

Fonctions affines: Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est appelée **fonction affine**. Son graphe est représentée par une droite de pente a. La restriction d'une fonction affine à un intervalle I de $\mathbb{R}$ est encore appelée une fonction affine.

Un exemple concret d'une telle fonction peut-être donné par la fonction associant à une

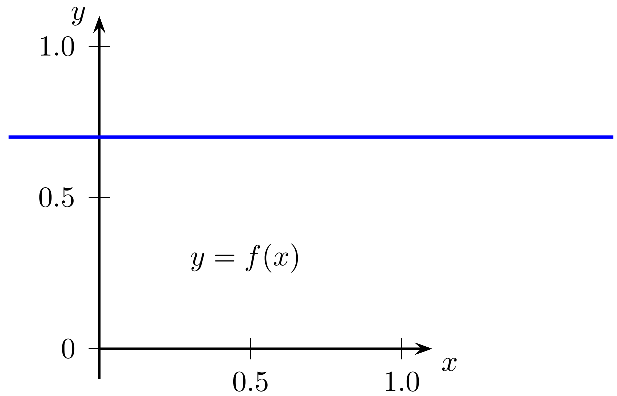


FIGURE 11. Graphe d'une fonction constante

quantité de bois (en stères) le prix à payer, en tenant compte du fait que le marchand facture également un forfait pour la livraison (voir Figure **??**).

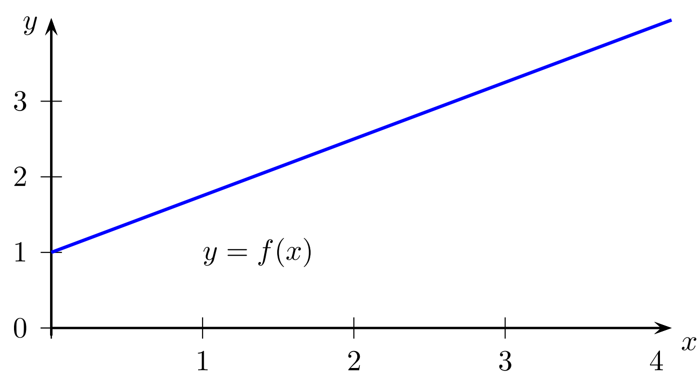


FIGURE 12. Graphe d'une fonction affine

Fonctions en escalier: Une fonction f définie sur un intervalle borné $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe un entier n et des points a_0, a_1, a_2, $\ldots$ a_n tels que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_{n-1} < a_n = b$ tels que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ est une fonction constante : $f_{|]a_i,a_{i+1}[}(x) = c_i$.
Plus généralement, on dit qu'une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est en escaliers si sa restriction à tout intervalle borné est une fonction en escaliers. Un exemple concret d'une telle fonction peut-être donné par la fonction associant à une lettre le tarif de son affranchissement postal (voir Figure 13).

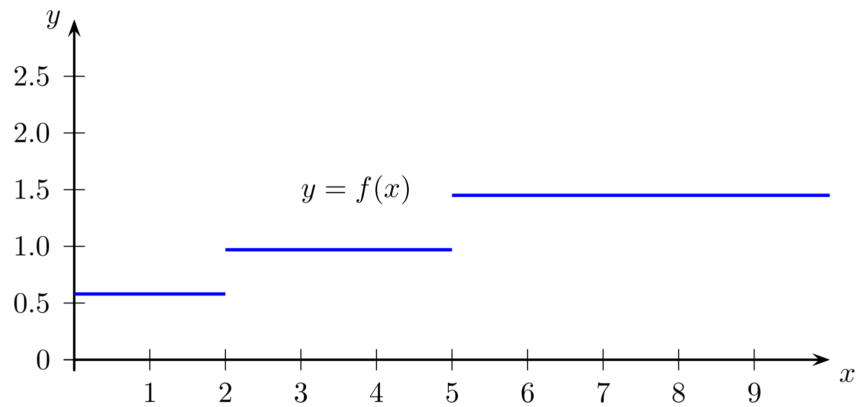


FIGURE 13. Tarif postal en euros par dizaine de grammes

Voici quelques exemples classiques de fonctions en escalier :

(1) La fonction de Heaviside (voir Figure 14)

$$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

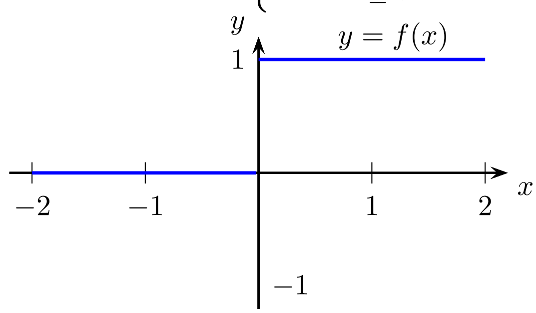


FIGURE 14. Graphe de la fonction de Heaviside

(2) La fonction « signe » (voir Figure 15)

$$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

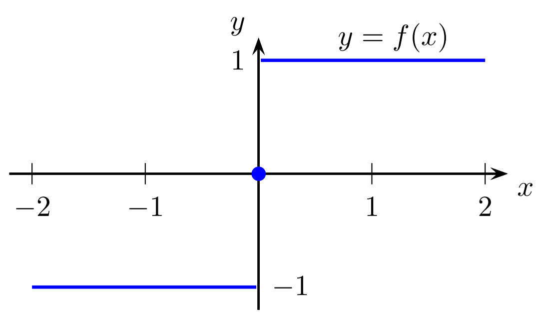


FIGURE 15. Graphe de la fonction « signe »

(3) Comme on l'a vu dans l'introduction, une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être représentée par une fonction en escaliers : on définit la fonction u correspondante sur $\mathbb{R}_+$ par $u(x) = u_n$ pour tout $x \in [n, n+1[$.

Fonctions affines par morceaux: Une fonction f définie sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dite **affine par morceaux** s'il existe un entier n et des points a_0, a_1, a_2, $\ldots$ a_n tels que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_{n-1} < a_n = b$ tels que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ est une fonction affine : $f_{|]a_i,a_{i+1}[}(x) = \alpha_i x + \beta_i$. Un exemple concret d'une telle fonction peut-être donné par la fonction associant à une quantité de bois (en stères) le prix à payer, en tenant compte du fait que le marchand pratique des prix de gros en fonction de la quantité (voir Figure 16).

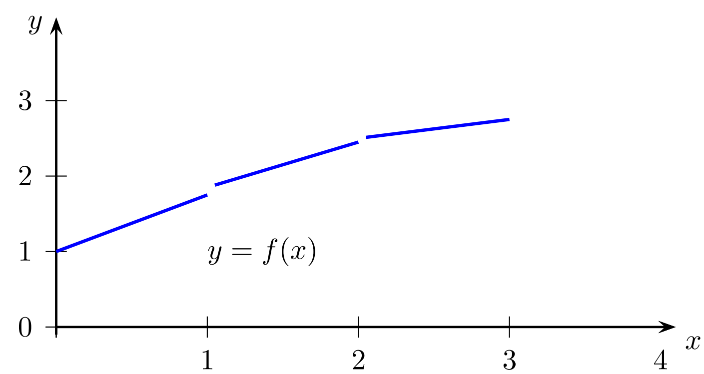


Figure 16. Graphe d'une fonction affine par morceaux

Voici quelques exemples classiques de fonctions affines par morceaux :

(1) La fonction « triangle » $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

On notera cette fonction Λ (voir Figure 17).

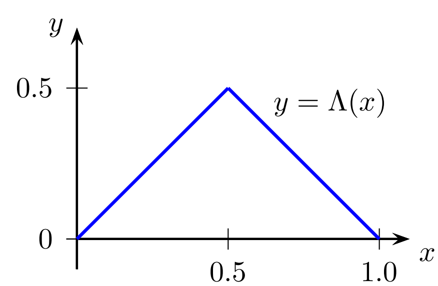


Figure 17. Graphe de la fonction Λ

(2) La fonction valeur absolue $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = |x|.$$

(voir Figure 18)

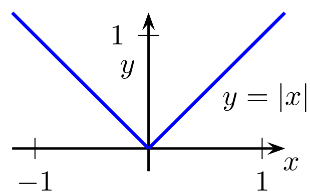


FIGURE 18. Graphe de la fonction $|\cdot|$

Fonctions polynomiales: Soient n un entier et a_0, a_1, $\ldots$, a_n $n+1$ nombres réels. La fonction $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$$

est appelée **fonction polynomiale de degré** n.
Si l'on reprend l'exemple d'une balle lancée depuis le haut de la tour Eiffel, la hauteur en mètres de la balle est donnée, expérimentalement par une fonction de la forme $h(t) = 324 + 0,96t - 4,9t^2$.

Fractions rationnelles: On appelle **fraction rationnelle** une fonction définie comme le quotient de deux fonctions polynomiales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}\cdot$ Cette fonction n'est définie que sur l'ensemble des points sur lesquels la fonction Q est non nulle ; à condition que l'on ne puisse pas réduire la fraction, on a $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) \neq 0\}$

Fonctions exponentielles: Nous admettons ici l'existence de la fonction exponentielle, vue en terminale, et qui repose sur un théorème sur l'existence de solutions pour certaines équations différentielles. Les propriétés essentielles de la fonction exponentielle seront revues en exercice. En deuxième année, une définition explicite et intrinsèque de la fonction exponentielle sera expliquée. On appelle fonction **exponentielle** (de base e) l'unique fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et égale à sa dérivée partout, et dont la valeur en 0 est 1. C'est une fonction strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$, et donc monotone.

Plus généralement, si a est un nombre réel strictement positif, on appelle fonction **exponentielle de base** a la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ qui est dérivable et égale à $\ln(a)$ fois sa dérivée partout, et dont la valeur en 0 est 1 (pour la définition de ln, voir ci-dessous).
Les fonctions exponentielles interviennent naturellement dans la modélisation de certains phénomènes.

- Si l'on considère, en laboratoire, une population de bactéries dont le nombre est multiplié par 2 à chaque fois qu'on laisse passer un intervalle δ de temps. Si l'on cherche à connaître la population de bactéries à un temps t grand par rapport à δ, alors une bonne approximation de ce nombre $p(t)$ est donnée par la fonction exponentielle : $p(t) = 2^t p(0)$, où $p(0)$ désigne la population initiale.
- La demi-vie ou période d'un élément radiaoactif est le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'une quantité donnée d'un élément radioactif se désintègre naturellement. Ainsi le carbone 14, utilisée pour la datation des éléments organiques, a une période de 5700 ans. Cela signifie que si l'on a une quantité initiale

λ de carbone 14, il restera, au bout de x années une quantité approximativement égale à $N(x) = \lambda 2^{-\frac{x}{5700}}$. de carbone 14

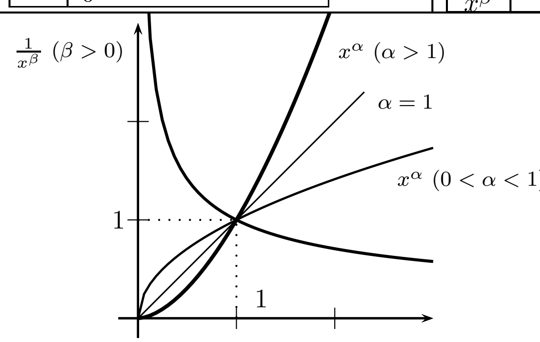
Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad , (a^x)^y = a^{xy} \quad , (ab)^x = a^x b^x.$$

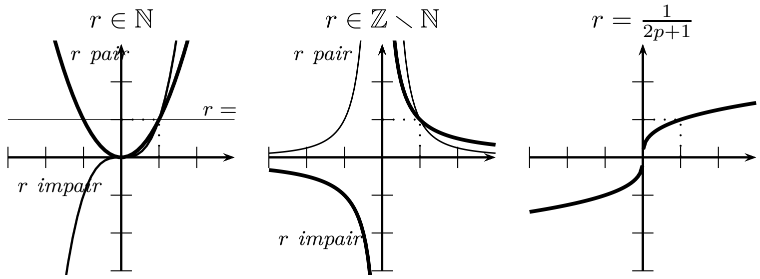
Fonctions logarithmes: On appelle fonction **logarithme népérien** la fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ donnée par la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base e.
Plus généralement, on appelle fonction **logarithme en base a** et on note $\log_a$ la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
On a en fait $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. De plus, on a $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, pour tous a, x, y strictement positifs et $r \in \mathbb{R}$.
Les fonctions logarithmes ont été introduites au début du 17ème siècle sous forme de tableaux de valeurs, qui permettaient de faire des calculs compliqués bien avant la calculatrice ou l'ordinateur (multiplier deux nombres, prendre la puissance n-ième ou la racine carrée d'un nombre, ...) de manière beaucoup plus rapide.

Fonctions puissances: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction **puissance** la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
Si α est un nombre entier positif, cette fonction peut être étendue en une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (c'est une fonction polynomiale).
Si α est un nombre entier négatif, cette fonction peut être étendue en une fonction de $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ (c'est une fraction rationnelle).

fonctions	**puissances**		(cas général)
	$x^\alpha \quad (\alpha > 1)$	$x^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$	$x^\alpha = \dfrac{1}{x^\beta} \quad (\beta > 0)$
domaine	$\mathbb{R}_+$		$\mathbb{R}_+^*$
branches infinies	branche parabolique verticale en $+\infty$	branche parabolique horizontale en $+\infty$	deux asymptotes : - horizontale ($y = 0$) en $+\infty$ - verticale ($x = 0$) en 0^+
concavité	convexe	concave	convexe
dérivée	$\alpha x^{\alpha-1}$		$-\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}$
variations	x : 0 $\quad 1 \quad$ $+\infty$ x^α : $0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$		x : $0 \quad 1 \quad +\infty$ $\frac{1}{x^\beta}$: $+\infty \searrow 1 \searrow 0$



propriétés alg.	$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$	$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$	$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$

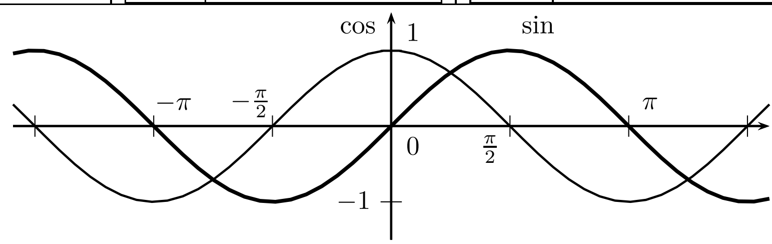


Fonctions trigonométriques:
On peut définir sinus, cosinus et tangente à partir de l'exponentielle complexe par :

$$\sin\theta \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Im}(e^{\mathbf{i}\theta}) \qquad \cos\theta \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Re}(e^{\mathbf{i}\theta}) \text{ et } \tan\theta \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\text{si } \cos\theta \neq 0).$$

z $\lvert z\rvert = 1$	$x + \mathbf{i}y$ $x^2 + y^2 = 1$	$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta, \quad (x = \cos\theta \text{ et } y = \sin\theta)$ $\lvert e^{\mathbf{i}\theta}\rvert = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad (\Rightarrow \sin\theta, \cos\theta \in [-1,1])$	
$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	$\mathrm{Re}(x + \mathbf{i}y) = x$ $\mathrm{Im}(x + iy) = y$	$\dfrac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \dfrac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2i} = \sin\theta$ $\boxed{\text{formules d'Euler}}$	
z'	$x' + \mathbf{i}y'$	$e^{\mathbf{i}\phi} = \cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi$	
zz'	$xx' - yy' + \mathbf{i}(xy' + yx')$	$e^{\mathbf{i}(\theta+\phi)} = e^{\mathbf{i}\theta}e^{\mathbf{i}\phi}$	$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$ $\boxed{\text{formules d'addition des angles}}$
z^2 (zz' avec $z = z'$)	$x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ $\boxed{\text{formules de duplication d'un angle}}$	
z^n	$(x + \mathbf{i}y)^n$	$\left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = e^{\mathbf{i}n\theta}$	$\cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n$ $\boxed{\text{formule de Moivre}}$
		$e^{\mathbf{i}(\theta+2\pi)} = e^{\mathbf{i}\theta}$	$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$ $\boxed{\sin, \cos \textbf{ sont } 2\pi\textbf{-périodiques}}$
$\bar{z}$	$x - \mathbf{i}y$	$e^{-\mathbf{i}\theta}$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\boxed{\sin \textbf{ est impaire}, \cos \textbf{ est paire}}$
$-z$	$-x - \mathbf{i}y$	$e^{\mathbf{i}(\theta+\pi)}$	$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$
$-\bar{z}$	$-x + \mathbf{i}y$	$e^{\mathbf{i}(\pi-\theta)}$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\mathbf{i}z$	$-y + \mathbf{i}x$	$e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$	$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ et $\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$
$\mathbf{i}\bar{z}$	$y + \mathbf{i}x$	$e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$

fonctions	**sinus**	**cosinus**
notations	sin	cos
domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
symétries	périodiques de période 2π	
	impaire	paire
dérivée	cos	$-\sin$
variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi \\ \hline \sin x & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi \\ \hline \cos x & 1 & \searrow & 0 & \searrow & -1 \end{array}$



Formulaire pour tangente

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$$

formules d'addition des angles

$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ *si* $t = \tan\frac{\theta}{2}$

formules de duplication d'un angle

$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$

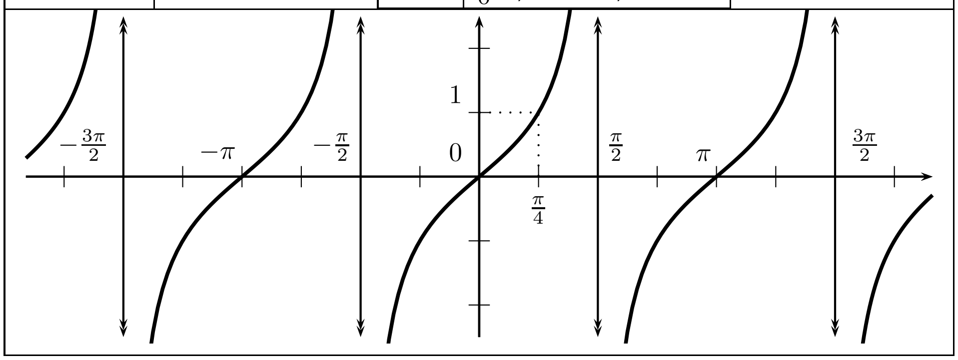
paramétrage rationnel du cercle

$$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$$

tan **est π-périodique**

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

tan **est impaire**

fonction	**tangente**
notation	tan
domaine	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\}$
symétries	période π
	impaire
dérivée	$1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
branches infinies	asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{4} & & \frac{\pi}{2} \\ \hline \tan x & 0 & \nearrow & 1 & \nearrow & +\infty \end{array}$
	

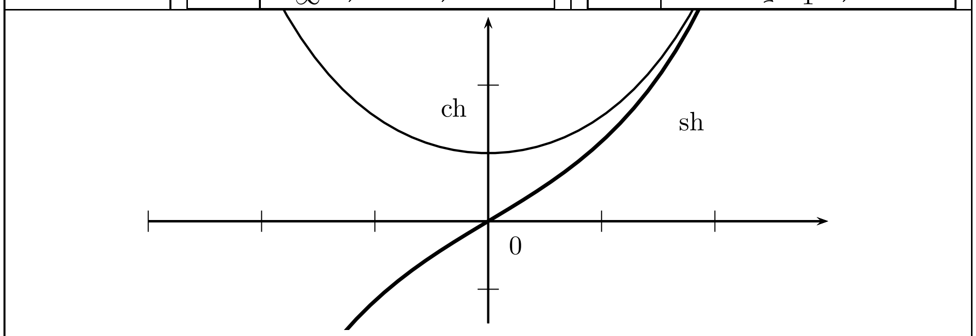
Valeurs particulières

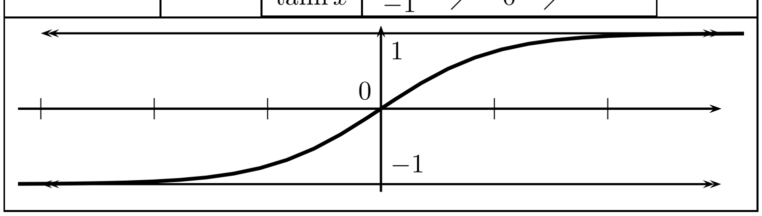
θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$e^{\imath\theta}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}+\imath}{2}$	$\dfrac{1+\imath}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1+\imath\sqrt{3}}{2}$	$\imath$	-1
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*non défini*	0

Fonctions de trigonométrique hyperbolique:

Par analogie avec la définition des fonctions trigonométriques à partir de l'exponentielle complexe, on peut définir des fonctions, sh, ch et tanh, appelées **fonctions de trigonométrique hyperbolique** à partir de l'exponentielle réelle, par :

$$\mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \text{ et } \ \tanh(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

fonctions	**sinus hyperbolique**	**cosinus hyperbolique**
notations	sh	ch
définitions	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
symétries	impaire	paire
branches infinies	branches paraboliques verticales en $-\infty$ et en $+\infty$	branches paraboliques verticales en $-\infty$ et en $+\infty$
dérivée	ch	sh
variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline \operatorname{sh} x & -\infty & \nearrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline \operatorname{ch} x & +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & +\infty \end{array}$
		
propriétés algébriques	$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$	

fonction	**tangente hyperbolique**
notation	tanh
définitions	$\tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
domaine	$\mathbb{R}$
symétries	impaire
dérivée	$1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$
branches infinies	asymptotes horizontales $y = 1$ en $+\infty$ $\quad y = -1$ en $-\infty$
variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline \tanh x & -1 & \nearrow & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$
	

Autres exemples:

(1) La fonction de Dirichlet $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Cette fonction est l'**indicatrice de** $\mathbb{Q}$ ou la **fonction caractéristique de** $\mathbb{Q}$, elle est souvent notée $\chi_{\mathbb{Q}}$, ou $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$.

(2) Une fonction de type Dirichlet mais dont les pics sont d'autant plus petits que les dénominateurs sont grands :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

(3) La fonction de Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

possède une infinité d'oscillations au voisinage de 0.

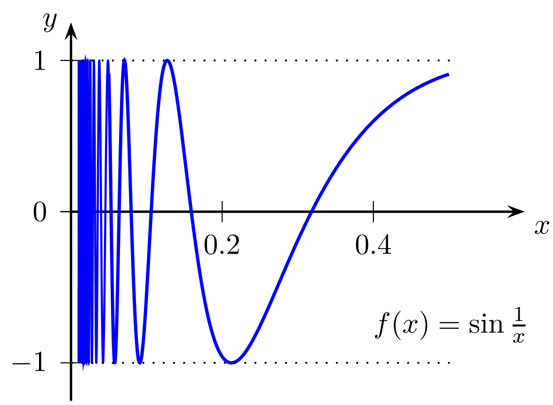


FIGURE 19. Graphe de la fonction de Cauchy

(4) La fonction de Weierstrass

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

possède aussi une infinité d'oscillations au voisinage de 0 mais leurs amplitudes sont moins fortes.

1.4. Opérations sur les fonctions. Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On peut définir de nouvelles fonctions à partir de f et g en utilisant :

(1) Les opérations définies en général sur les applications :

- ◇ Restriction : si $A \subset \mathcal{D}_f$, on définit $f_{|A}$ comme la fonction $f_{|A}\colon A \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in A$ par $f_{|A}(x) = f(x)$.

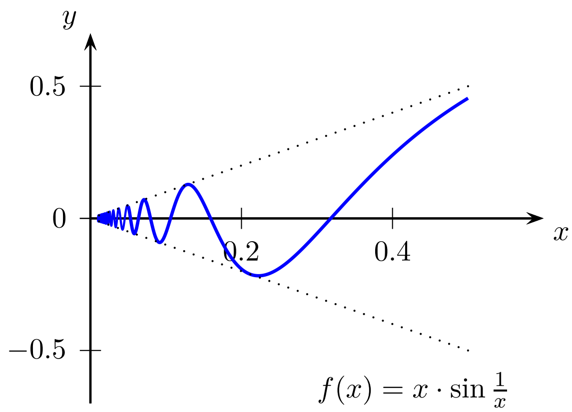


FIGURE 20. Graphe de la fonction de Weierstrass

- ◇ Réunion de fonctions définies sur des domaines disjoints : si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \emptyset$, on définit $f \cup g$ comme la fonction $f \cup g \colon \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$ par $(f \cup g)(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}_f$ et $(f \cup g)(x) = g(x)$ si $x \in \mathcal{D}_g$ (exemple : fonctions en escalier).
- ◇ Composition : si on a $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, on définit $g \circ f$ comme la fonction $g \circ f \colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (exemple : fonctions puissances). **Attention** : pour définir $g \circ f$, il faut que l'image de f soit incluse dans le domaine de définition de g.

(2) Les opérations vectorielles :

- ◇ Addition : si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, on définit $f + g$ comme la fonction $f + g \colon \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- ◇ Multiplication par un scalaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λf comme la fonction $\lambda f \colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

(3) La multiplication de deux fonctions : si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, on définit $f \times g$ (également notée $f.g$)comme la fonction $f \times g \colon \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

2. Limites

2.1. Introduction : limite d'une suite réelle. La notion de limite a déjà été abordée dans le programme de terminale. Une suite de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ peut être utilisée pour décrire un processus d'évolution, par exemple en prenant des mesures à intervalles de temps réguliers ($n = 1, 2, \ldots$) d'une quantité physique, chimique, géologique, économique, etc
Dans ce cas on s'intéresse naturellement au comportement du système quand le paramètre d'évolution (le temps dans notre exemple) devient arbitrairement grand. Plusieurs situations se présentent :

- ◇ Lorsqu'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N, on dit que la suite **converge vers la limite** ℓ.

Cela signifie que tous les termes de la suite (la grandeur mesurée dans notre exemple) sont arbitrairement proches de l à condition de ne considérer que les termes de la suite au delà d'un nombre fini de termes bien choisi.

- Lorsque pour toute borne $A > 0$ les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous plus grands que A à partir d'un certain rang N, on dit que la suite **tend (ou diverge) vers** $+\infty$. Cela signifie que tous les termes de la suite (la grandeur mesurée dans notre exemple) sont arbitrairement grands, à condition de ne considérer que les termes de la suite au delà d'un nombre fini de termes bien choisi.
- Lorsque pour toute borne $A > 0$ les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous plus petits que $-A$ à partir d'un certain rang N, on dit que la suite **tend (ou diverge) vers** $-\infty$. Cela signifie que tous les termes de la suite (la grandeur mesurée dans notre exemple) sont arbitrairement grands (en valeur absolue) et négatifs, à condition de ne considérer que les termes de la suite au delà d'un nombre fini de termes bien choisi.
- Si la suite ne vérifie aucune des situations précédentes, on dit qu'elle est **divergente**. C'est le cas par exemple si ce ne sont pas tous les termes de la suite à partir d'un certain rang qui vérifient la propriété, mais seulement une partie d'entre eux. Pour donner un exemple concret on considère la suite formée par les tirages successifs d'une pièce, à « pile ou face ». On encode la valeur « pile » par 1 et la valeur « face » par -1 et n désigne le numéro du tirage. Si la pièce n'est pas truquée, on sait que l'on obtiendra jamais uniquement l'une des deux valeurs indéfiniment à partir d'un certain tirage. Ainsi cette suite ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ et n'est pas non plus convergente. On peut aller plus loin dans la modélisation en imaginant qu'au delà d'un certain nombre de tirages la valeur du tirage suivant est toujours l'opposée de la valeur du tirage précédent. Cela permet d'écrire qu'à partir d'un certain rang le n-ième terme de la suite, u_n est donné par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est clairement divergente, car elle est donnée par l'alternance de deux suites qui sont convergentes, mais vers des valeurs différentes : la suite des tirages pairs converge vers 1 (« pile »), celle des tirages impairs vers -1 (« face ») de manière évidente puisque ces suites sont constantes à partir d'un certain rang !

On a expliqué précédemment qu'une suite peut-être vue comme un type particulier de fonction. Les concepts de convergence et divergence s'étendent au cadre plus général des fonctions.

2.2. Limites finies/infinies d'une fonction en un point. Nous allons étudier la convergence/divergence d'une fonction f au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. Pour que cela ait un sens, il faut que le domaine de définition de f rencontre le voisinage du point a de manière non triviale.
On dit qu'une fonction f est **définie au voisinage épointé du point** a s'il existe un intervalle ouvert I centré en a de la forme $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ où $\alpha > 0$ tel que I privé du point a est inclus dans le domaine de définition de f. Il faut noter que le fait que la fonction f soit définie au point a lui-même n'est pas exigé ; on s'intéresse au comportement de f pour des valeurs de x très proches de a mais strictement à gauche ou à droite de a.
Soit $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé du point a.

***Définition* 2.1.** — On dit que la fonction f **converge au point** a s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell-\varepsilon$ et $\ell+\varepsilon$, à la condition que x soit différent de a et à distance au plus α de a. On dit alors que la fonction f **converge vers la limite** ℓ au point a.
Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

Exemples 2.2. — ◇ On considère la fonction $f(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

◇ On considère la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^2$. En effet, on a $f(x)-a^2 = x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $C > 0$ tel que $C > \max(|2a+\varepsilon|, |2a-\varepsilon|)$. Alors, pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{C}$, et $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ on a
$$|f(x) - a^2| = |(x-a)(x+a)| \leq C|(x-a)| < C\alpha = \varepsilon.$$

◇ On considère la fonction de Weierstrass $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. En effet, on sait que la fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée en valeur absolue par 1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant définie sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq |x|$. Cela implique en particulier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

◇ La fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ ne converge pas en 0. En effet, pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, et pour tout $\alpha > 0$, on a $H(\frac{\alpha}{2}) = 1$ et $H(-\frac{\alpha}{2}) = 0$. S'il existait une limite ℓ pour H en 0, on aurait $|\ell| \leq \varepsilon$ et $|1-\ell| \leq \varepsilon$, or l'intersection de ces deux parties de $\mathbb{R}$ est vide.

Passons à présent à la définition de la limite infinie pour une fonction en un point a. Soit f une fonction définie au voisinage épointé de a.

Définitions 2.3. — ◇ On dit que la fonction f **tend vers** $+\infty$ **au point** a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que A, à la condition que x soit différent de a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :
$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, f(x) > A.$$
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

◇ On dit que la fonction f **tend vers** $-\infty$ **au point** a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus petites que $-A$, à la condition que x soit différent de a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :
$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, f(x) < -A.$$
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$.

Remarquons que f tend vers $-\infty$ au point a si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$ au point a.

Exemples 2.4. — ◇ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. En effet, pour tout $A > 0$, si l'on pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$ alors si $x \in]-\alpha, \alpha[$ et $x \neq 0$, on a $f(x) > A$. On a donc bien montré que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

◇ Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors on ne peut pas dire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, ni que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. En effet, pour tout $\alpha > 0$, si $x \in]-\alpha, \alpha[-\{0\}$ alors on a $f(x) > \frac{1}{\alpha}$ si $x > 0$ et $f(x) < -\frac{1}{\alpha}$ si $x < 0$.

2.3. Limites à gauche, à droite. Pour traiter le cas de la limite en 0 de la fonction de Heaviside ou de la fonction inverse, on peut remarquer que si ces fonctions n'admettent pas de limite au sens où nous l'avons défini, nous pouvons affiner notre traitement et regarder les valeurs d'une fonction lorsque x varie dans un voisinage du point a mais en restant tout le temps du même coté de a : à gauche ou à droite du point a.
On dit qu'une fonction f est **définie à gauche au voisinage du point** a s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]a-\alpha, a[$ où $\alpha > 0$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f. De même, on dit qu'une fonction f est **définie à droite au voisinage du point** a s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]a, a+\alpha[$ où $\alpha > 0$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f.

***Définitions* 2.5.** — ◇ Soit $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie à gauche au voisinage du point a. On dit que f **admet une limite finie à gauche au point** a s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus petit que a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a[, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^-} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\to} \ell$.

◇ On dit que la fonction f **tend vers** $+\infty$ **à gauche au point** a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que A, à la condition que x soit strictement plus petit a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a[, f(x) > A.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f **tend vers** $-\infty$ **à gauche au point** a.

◇ Soit $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie à droite au voisinage du point a. On dit que f **admet une limite finie à droite au point** a s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus grand que a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a, a+\alpha[, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^+} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\to} \ell$.

◇ On dit que la fonction f **tend vers** $+\infty$ **à droite au point** a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que A, à la condition que x soit strictement plus grand que a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a, a+\alpha[, f(x) > A.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f **tend vers** $-\infty$ **à droite au point** a.

***Exemples* 2.6.** — ◇ La fonction de Heaviside a 0 pour limite à gauche en 0 et a pour limite 1 à droite en 0.

◇ La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim_{0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$.

◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite à gauche ni à droite en 0. On peut remarquer pour commencer que f est une fonction impaire. Il suffit donc d'étudier l'existence d'une limite à droite par exemple. Considérons les suites définies par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$. Ce sont deux suites strictement positives et qui convergent vers 0. Donc tout voisinage à droite de 0 contient tous les termes de ces deux suites, sauf un nombre fini. Or on a $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$. Donc f n'admet aucune limite, finie ou infinie (elle est bornée) à droite en 0.

***Proposition* 2.7.** — *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors f admet une limite, finie ou infinie, au point a si et seulement si f admet cette même limite à gauche en a et à droite en a.*

DÉMONSTRATION. On démontre la proposition dans le cas d'une limite finie. Le même type de raisonnement fonctionne dans le cas d'une limite infinie.

(1) Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Alors, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En particulier, on a, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ si $x \in]a-\alpha, a[$ ou si $x \in]a, a+\alpha[$, ce qui implique que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$.

(2) Réciproquement, supposons que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tel que si $x \in]a-\alpha_1, a[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et si $x \in]a, a+\alpha_2[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors si $x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ donc on a bien $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

□

***Définition* 2.8.** — On dit que f **tend vers** ℓ **au voisinage épointé du point** a **par valeurs supérieures**, et on note $\lim_{x\to a} f(x) = \ell^+$ si la fonction f tend vers ℓ au point a, en étant toujours strictement supérieure à ℓ dans un voisinage épointé de a. Cela revient à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \ell < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Cette définition s'étend naturellement aux limites à gauche, à droite et (on le verra plus tard) aux limites au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.
On définit de même le fait que f **tend vers** ℓ **au voisinage du point** a **par valeurs inférieures**, et cette définition s'étend naturellement aux limites à gauche, à droite et (on le verra plus tard) aux limites au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Si f n'admet pas de limite finie au point a, on dit que f diverge au point a. Nous avons vu cependant qu'il existe différents comportements au voisinage du point a :

Divergence vers l'infini :: On dit que f **diverge vers l'infini au point** a si f admet une limite infinie au point a.

Divergence de première espèce :: On dit que f admet une **divergence de première espèce au point** a si elle n'admet pas de limite (finie ou infinie) mais admet une limite (finie ou infinie) à droite et une limite (finie ou infinie) à gauche au point a.

Divergence de seconde espèce :: On dit que f admet une **divergence de seconde espèce au point** a si elle n'admet pas de limite (finie ou infinie) à gauche ou à droite.

2.4. Limites finies/infinies d'une fonction au voisinage de l'infini. Nous pouvons également tenter de comprendre le comportement d'une fonction au voisinage des bornes infinies de son domaine de définition. On dit qu'une fonction f est **définie au voisinage de** $+\infty$ si elle est définie pour tout réel x assez grand c'est à dire s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f. De même, on dit qu'une fonction f est **définie au voisinage de** $-\infty$ si elle est définie pour tout réel x assez négatif c'est à dire s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f.

***Définitions* 2.9.** —

- ◇ Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f **admet une limite finie en** $+\infty$ s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus grand que A. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$
On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} \ell$.
- ◇ On dit que la fonction f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ si pour toute borne $B > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que B, à la condition que x soit strictement plus grand que A. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :
$$\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x > A, f(x) > B.$$
On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f **tend vers** $-\infty$ **en** $+\infty$.
- ◇ Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f **admet une limite finie en** $-\infty$ s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus petit que $-A$. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x < -A, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$
On note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} \ell$.
- ◇ On dit que la fonction f **tend vers** $+\infty$ **en** $-\infty$ si pour toute borne $B > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que B, à la condition que x soit strictement plus petit que $-A$. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :
$$\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x < -A, f(x) > B.$$
On note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f **tend vers** $-\infty$ **en** $-\infty$.

***Exemples* 2.10.** —

- ◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ vérifie $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- ◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ vérifie $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ n'admet pas de limite finie ou infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$. C'est le cas plus généralement pour toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique et non constante.

2.5. Limites et interprétation graphique. On peut interpréter graphiquement la notion de limite finie ou infinie en un point $a \in \mathbb{R}$, ou en l'infini.
Exemples

(1) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$, une « marge d'erreur ». Alors, par définition de la limite, il existe un $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Si l'on considère le « tube » horizontal centré en $y = \ell$ et de largeur 2ε, cela signifie qu'il existe un « tube » vertical centré en a et de largeur 2α tel que la portion de graphe de la fonction f déterminée par le « tube » vertical est « coincée » dans l'intersection des deux tubes, pour $x \neq a$.

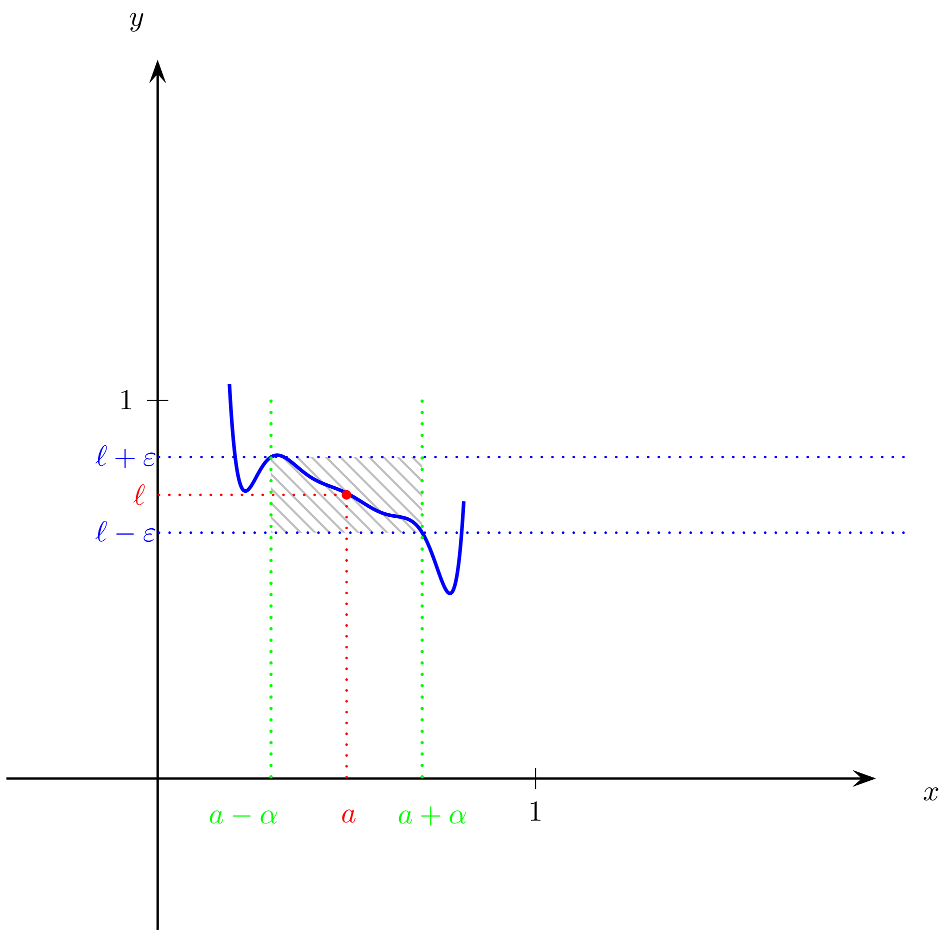


Figure 21. Limite finie d'une fonction en un point a

(2) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$, une « marge d'erreur ». Alors, par définition de la limite, il existe un $A > 0$ tel que si $x > A$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Si l'on considère le « tube » horizontal centré en $y = \ell$ et de largeur 2ε, cela signifie qu'il existe un « seuil » vertical en A tel que la portion de graphe de la fonction f au delà de ce seuil vertical est « coincée » dans le tube horizontal.

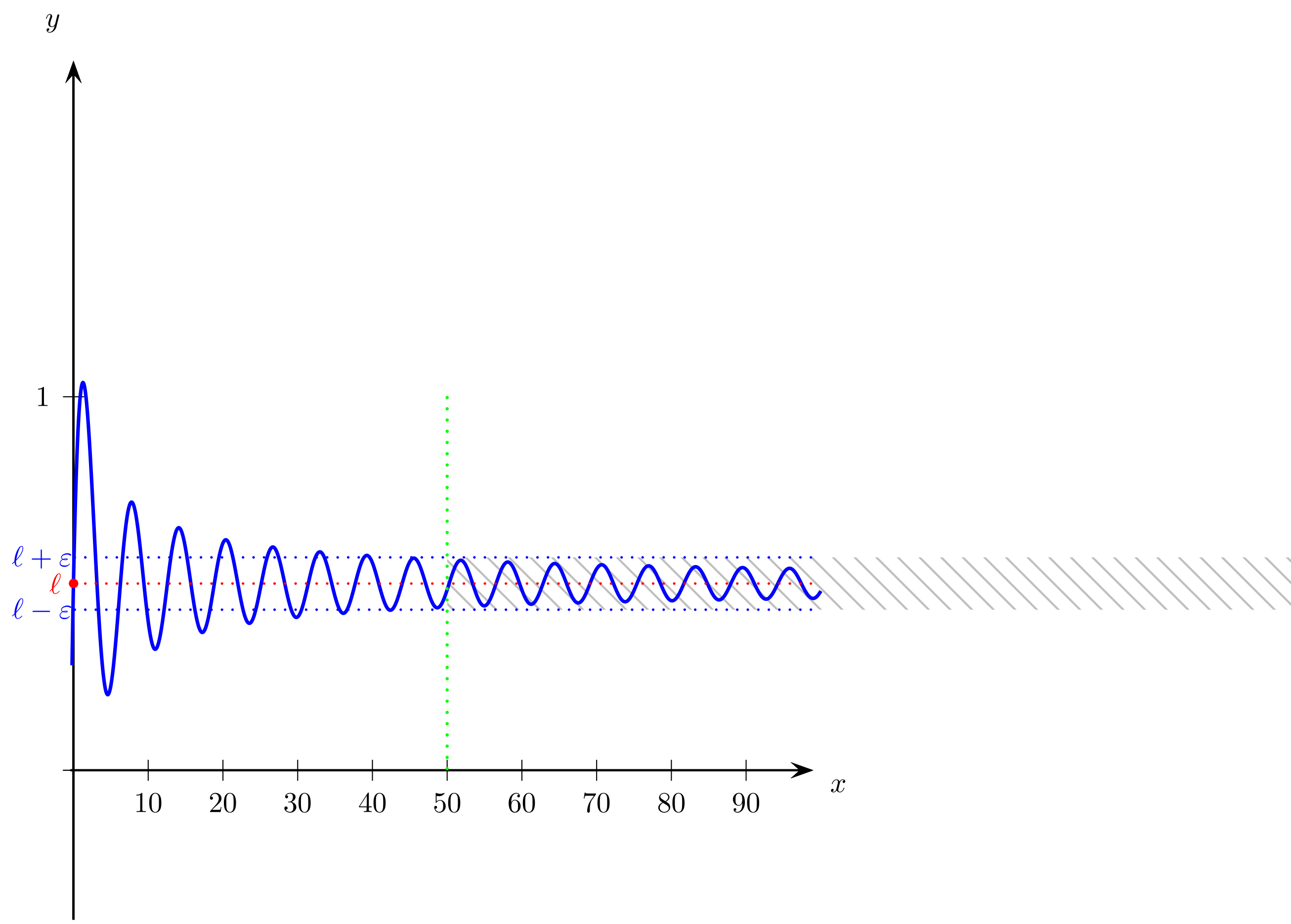


FIGURE 22. Limite finie d'une fonction au voisinage de $+\infty$

A l'aide de ces dessins on peut illustrer le théorème suivant (à condition de confondre, ici, ℓ, ℓ^+ et ℓ^-).

Théorème 2.11. — *Si f admet une limite (finie ou infinie) au voisinage d'un point ou de l'infini, cette limite est unique.*

2.6. Limites et ordre. Nous allons montrer que le passage à la limite respecte l'ordre (supérieur ou égal) sur $\mathbb{R}$. Plutôt que d'étudier les limites suivant que l'on se trouve au voisinage

d'un point a de $\mathbb{R}$, de $+\infty$, de 0^+, ..., on exprime les résultats sur les limites en se servant de la notion de « point généralisé » ω. On entend par cela que ω est un élément choisi parmi $\{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ (ici, a désigne un nombre réel). On rappelle que les voisinages épointés de a^+ et a^- sont respectivement de la forme $]a, a+\alpha[$ et $]a-\alpha, a[$ où $\alpha > 0$.
On alors la caractérisation synthétique suivante de la notion de limite.

***Proposition* 2.12.** — *Soient ω et ω' deux « points généralisés », et f une fonction définie au voisinage épointé de ω. On a alors :*

$\lim_{x\to\omega} f(x) = \omega'$ *si et seulement si*
pour tout voisinage V' du « point généralisé » ω', il existe un voisinage épointé V du « point généralisé » ω tel que $f(V) \subset V'$.

Dans la suite f et g désignent des fonctions définies au voisinage épointé du même « point généralisé » ω.

***Proposition* 2.13.** — *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé du « point généralisé » ω et si f et g admettent toutes deux une limite finie en ω, alors on a $\lim_{x\to\omega} f(x) \leq \lim_{x\to\omega} g(x)$.*

***Remarque* 2.14.** — Attention, il est **FAUX** en général, que sous les mêmes hypothèses sur f et g, si $f(x) < g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé du « point généralisé » alors on ait $\lim_{x\to\omega} f(x) < \lim_{x\to\omega} g(x)$.
Par exemple, la fonction $|x|$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et sur tout voisinage (épointé) de 0, on a $|x| > 0$, et pourtant $\lim_{x\to\omega} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$.

DÉMONSTRATION. Démontrons cette propriété par exemple dans le cas où $\omega = a \in \mathbb{R}$. La démonstration fonctionne de manière identique dans les autres cas. Posons $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $x \in]a-\alpha_0, a+\alpha_0[-\{a\}$, alors $f(x) \leq g(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) \in]\ell_1-\varepsilon, \ell_1+\varepsilon[$ et si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) \in]\ell_2-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon[$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors on obtient, pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}$,

$$\ell_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < \ell_2 + \varepsilon.$$

Les nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 vérifient donc que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$. Cette dernière propriété équivaut au fait que $\ell_1 \leq \ell_2$. En effet, si $\ell_1 \leq \ell_2$, alors, évidemment, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$.
Réciproquement supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2+2\varepsilon$ et montrons, par l'absurde, que $\ell_1 \leq \ell_2$. Si l'on avait $\ell_1 > \ell_2$, alors en choisissant $\varepsilon = \frac{\ell_1-\ell_2}{4} > 0$, on aurait $\ell_2 + 2\varepsilon < \ell_2 + 4\varepsilon = \ell_1$, ce qui est impossible.
On a donc montré que si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$, on ne peut avoir $\ell_1 > \ell_2$, et donc on a nécessairement $\ell_1 \leq \ell_2$. □

De cette proposition on peut tirer le théorème suivant (connu sous le nom de théorème des « gendarmes », ou théorème du « sandwich »)

***Théorème* 2.15.** — *Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage épointé d'un « point généralisé » ω, et telles que, au voisinage de ce point $f \leq g \leq h$. Si f et h admettent une limite* *finie ℓ commune au « point généralisé » ω, alors g admet également ℓ comme limite finie au « point généralisé » ω.*

***Remarque* 2.16.** — Remarquons que le fait que $f \leq g \leq h$ au voisinage épointé du « point » ω et que f et h admettent chacun une limite finie au « point généralisé » ω ne suffit pas à assurer que g admet une limite en ω.
Par exemple, on sait qu'au voisinage de 0, on a $f(x) = -1 \leq g(x) = \sin(\frac{1}{x}) \leq h(x) = 1$ et que la fonction g n'admet pas de limite en 0.

Démonstration. Démontrons ce théorème par exemple pour $\omega = -\infty$. La démonstration est similaire dans les autres cas. Par hypothèse, il existe $A_0 > 0$ tel que si $x < -A_0$, alors on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x < -A_1$, alors $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et si $x < -A_2$, alors $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Posons $A = \max(A_0, A_1, A_2)$, alors pour tout $x < -A$, on a :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ell$. □

On a un théorème analogue dans le cas des limites infinies.

***Théorème* 2.17.** — *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage épointé d'un « point généralisé » ω, et telles que, au voisinage de ce point $f \leq g$.*

- ◇ *Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty$, alors $g(x)$ tend également vers $+\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = +\infty$.*
- ◇ *Si $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = -\infty$, alors $f(x)$ tend également vers $-\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = -\infty$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la première affirmation, la seconde s'en déduisant en considérant les fonctions $-f$ et $-g$. Démontrons ce théorème par exemple pour $\omega = a^-$, avec $a \in \mathbb{R}$. La démonstration est similaire dans les autres cas. Par hypothèse, on sait qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha_0, a[$, alors on a $f(x) \leq g(x)$. Soit $A > 0$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha_1, a[$, alors on a $f(x) > A$. Posons $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1)$. Alors pour tout $x \in]a - \alpha, a[$, on a $A < f(x) \leq g(x)$, ce qui montre bien que $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = +\infty$. □

2.7. Caractérisation séquentielle d'une limite. On a le résultat suivant pour toute fonction f définie au voisinage du « point généralisé » ω :

***Théorème* 2.18.** — *On a $\lim\limits_{\omega} f(x) = \omega'$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \omega$ et telle que $u_n \neq \omega$ (au moins à partir d'un certain rang) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \omega'$.*

Démonstration. Montrons cette propriété par exemple dans le cas où $\omega = a \in \mathbb{R}$ et $\omega' = \ell \in \mathbb{R}$.

(1) *La condition est nécessaire :* en utilisant la définition de la limite de f, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers a, alors pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - a| < \alpha.$$

Il existe de plus $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < |u_n - a| < \alpha$ si $n \geqslant N$. Ainsi

$$|f(u_n) - \ell| < \varepsilon \text{ si } n \geqslant N,$$

ce qui démontre que la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

(2) *La condition est suffisante :* par l'absurde supposons que $\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0\ , \exists x \in \mathbb{R}\ , 0 < |x-a| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, on fait ainsi apparaître une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ , 0 < |u_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a mais la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pourtant pas vers ℓ contrairement à l'hypothèse que l'on a faite.

□

2.8. Opérations sur les limites. Etudions à présent l'effet des opérations sur les fonctions définies au voisinage épointé d'un « point généralisé » ω. On entend par cela que ω est un choisi parmi $\{a,\ a^+,\ a^-,\ +\infty,\ -\infty\}$ (ici, a désigne un nombre réel). Dans la suite f et g désignent des fonctions définies au voisinage épointé du même « point généralisé » ω.

***Proposition* 2.19.** — MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE
Soit λ un nombre réel non nul.

(1) Si f admet une limite finie ℓ au « point généralisé » ω, alors λf tend vers $\lambda\ell$ au « point » ω. On a $\lim_{x\to\omega} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to\omega} f(x)$.

(2) Si f admet une limite infinie au « point généralisé » ω, alors λf admet également une limite infinie au « point généralisé » ω. Le signe de la limite infinie dépend de celui de λ :

- *Si $\lambda > 0$, on a $\lim_{x\to\omega} (\lambda f)(x) = \lim_{x\to\omega} f(x)$.*
- *Si $\lambda < 0$, on a $\lim_{x\to\omega} (\lambda f)(x) = -\lim_{x\to\omega} f(x)$.*

DÉMONSTRATION. Montrons ceci, par exemple dans le cas ou $\omega = a^+$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(1) On suppose que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon'$. En multipliant par $|\lambda|$ les deux cotés de l'inégalité, on obtient bien que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $|\lambda f(x) - \lambda\ell| < \varepsilon$, ce qui montre que $\lim_{x\to a^+} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to a^+} f(x)$.

(2) On suppose que $\lim_{a^+} f(x) = +\infty$. Soit $A > 0$. Posons $A' = \frac{A}{|\lambda|}$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $f(x) > A'$. En multipliant par $|\lambda|$ les deux cotés de l'inégalité, on obtient bien que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $|\lambda| f(x) > A$, ce qui montre que $\lim_{x\to a^+} (|\lambda| f)(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. Si $\lambda > 0$, on a donc $\lim_{x\to a^+} (\lambda f)(x) = \lim_{x\to a^+} (|\lambda| f)(x) = +\infty$ et si $\lambda < 0$, on obtient
$\lim_{x\to a^+} (\lambda f)(x) = -\lim_{x\to a^+} (|\lambda| f)(x) = -\infty$

□

***Proposition* 2.20.** — ADDITION DE DEUX FONCTIONS

(1) Si f admet une limite finie ℓ_1 au « point généralisé » ω et g admet une limite finie ℓ_2 au « point généralisé » ω, alors $f+g$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$ au « point » ω. On a $\lim_{x\to\omega} (f+g)(x) = \lim_{x\to\omega} f(x) + \lim_{x\to\omega} g(x)$.

(2) *Si f admet une limite finie ℓ_1 au « point généralisé » ω et g admet une limite infinie $\varepsilon\infty$, avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, au « point généralisé » ω, alors $f+g$ tend vers $\varepsilon\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x\to\omega}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$.*

(3) *Si f admet une limite infinie $\varepsilon_1\infty$ au « point généralisé » ω et g admet une limite infinie $\varepsilon_2\infty$ au « point généralisé » ω, avec $\varepsilon_1 \in \{-1,+1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1,+1\}$ on a :*
- *Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, alors $f+g$ tend vers $\varepsilon_1\infty$ au « point » ω.*
  On a $\lim\limits_{\omega}(f+g)(x) = \lim\limits_{\omega} f(x) = \lim\limits_{\omega} g(x) = \varepsilon_1\infty$.
- *Si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, alors on ne sait pas si $f+g$ admet une limite au « point » ω, et si celle-ci existe, si elle est finie ou infinie. On parle dans ce cas de **forme indéterminée** et il faut faire une étude particulière pour rechercher la limite éventuelle de la fonction $f+g$ au « point » ω.*

Illustrons ce dernier cas de forme indéterminée avec plusieurs exemples, pris au voisinage du « point généralisé » $+\infty$.

Exemples 2.21. —
- ◇ Si $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Or $f+g$ est la fonction constante égale à 0, donc admet pour limite 0 en $+\infty$.
- ◇ Si $f(x) = 2x$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Or $(f+g)(x) = x$ donc admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- ◇ Si $f(x) = x$ et $g(x) = -2x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Or $(f+g)(x) = -x$ donc admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$.
- ◇ Si $f(x) = x+\sin(x)$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En effet la fonction $\sin(x)$ est bornée par 1 en valeur absolue, donc pour tout $B > 0$, si $x > B+1$, alors $f(x) > B+1+\sin(x) \geq B$ donc on peut en conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $(f+g)(x) = \sin(x)$ qui n'admet pas de limite en $+\infty$.

Démonstration. Montrons ceci, par exemple dans le cas ou $\omega = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(1) Supposons que f admet une limite finie ℓ_1 au point a et que g admet une limite finie ℓ_2 au point a. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \varepsilon/2$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) \in]\ell_1-\varepsilon', \ell_1+\varepsilon'[$ et si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) \in]\ell_2-\varepsilon', \ell_2+\varepsilon'[$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1,\alpha_2)$, alors, en additionnant les inégalités précédentes, on obtient :

$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \quad (f+g)(x) \in]\ell_1+\ell_2-2\varepsilon', \ell_1+\ell_2+2\varepsilon'[=]\ell_1+\ell_2-\varepsilon, \ell_1+\ell_2+\varepsilon[.$$

Cela montre bien que $f+g$ tend vers $\ell_1+\ell_2$ au point a.

(2) Supposons que f admet une limite finie ℓ_1 au point a et que g tend vers $+\infty$ au point a. Soit $A > 0$, posons $A' = A - \ell_1 + 1$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) \in]\ell_1-1, \ell_1+1[$ et si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) > A'$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1,\alpha_2)$, alors, en additionnant les inégalités précédentes, on obtient :

$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \quad (f+g)(x) > A.$$

Cela montre bien que $f+g$ tend vers $+\infty$ au point a.

(3) Supposons par exemple que f et g tendent vers $-\infty$ au point a. Soit $A > 0$, on sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) < -A$ et

si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) < -A$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, alors, en additionnant les inégalités précédentes, on obtient :

$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \quad (f+g)(x) < -2A.$$

Cela montre bien que $f+g$ tend vers $-\infty$ au point a.

□

***Proposition* 2.22.** — PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

(1) Si f admet une limite finie ℓ_1 au « point généralisé » ω et g admet une limite finie ℓ_2 au « point généralisé » ω, alors $f \times g$ tend vers $\ell_1 \times \ell_2$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x\to\omega}(f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to\omega} f(x) \times \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$.

(2) Si f admet une limite infinie $\varepsilon_1\infty$ au « point généralisé » ω et g admet une limite infinie $\varepsilon_2\infty$ au « point généralisé » ω, avec $\varepsilon_1 \in \{-1,+1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1,+1\}$ alors $f\times g$ tend vers $(\varepsilon_1\times\varepsilon_2)\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x\to\omega}(f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to\omega} f(x) \times \lim\limits_{\omega} g(x)$.

(3) Si f admet une limite finie ℓ au « point généralisé » ω et g admet une limite infinie $\varepsilon\infty$, avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, au « point généralisé » ω, on a :

- *Si $\ell > 0$, alors $f\times g$ tend vers $\varepsilon\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x\to\omega}(f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$.*
- *Si $\ell < 0$, alors $f\times g$ tend vers $-\varepsilon\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{x\to\omega}(f\times g)(x) = -\lim\limits_{x\to\omega} g(x)$.*
- *Si $\ell = 0$, alors on ne sait pas si $f\times g$ admet une limite au « point » ω, et si celle-ci existe, si elle est finie ou infinie. On parle dans ce cas de **forme indéterminée** et il faut faire une étude particulière pour rechercher la limite éventuelle de la fonction $f\times g$ au « point » ω.*

Illustrons ce dernier cas de forme indéterminée avec plusieurs exemples, pris au voisinage du « point généralisé » 0^+.

***Exemples* 2.23.** —

- Si $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$. Or $f\times g$ est la fonction constante égale à 1, donc admet pour limite 1 en 0^+.
- Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$. Or $(f\times g)(x) = x$ donc admet pour limite 0 en 0^+.
- Si $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$. Or $(f\times g)(x) = \frac{1}{x}$ donc admet pour limite $+\infty$ en 0^+.
- Si $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$. Or $(f\times g)(x) = \sin(\frac{1}{x})$ qui n'admet pas de limite en 0^+.

DÉMONSTRATION. Montrons ceci, par exemple dans le cas ou $\omega = +\infty$.

(1) Supposons que f admet une limite finie ℓ_1 en $+\infty$ et que g admet une limite finie ℓ_2 en $+\infty$. Posons $\ell = \max(|\ell_1|;|\ell_2|)$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, posons $\varepsilon' = \varepsilon/2(\ell+1)$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x > A_1$ alors $f(x) \in]\ell_1-\varepsilon', \ell_1+\varepsilon'[$ et si $x > A_2$ alors $g(x) \in]\ell_2-\varepsilon', \ell_2+\varepsilon'[$. Choisissons $A = \max(A_1, A_2)$, alors on a, pour $x > A$,

$$\begin{aligned} |(f\times g)(x) - \ell_1\times\ell_2| &= |f(x)\times g(x) - f(x)\times\ell_2 + f(x)\times\ell_2 - \ell_1\times\ell_2| \\ &\leq |f(x)||g(x)-\ell_2| + |\ell_2||f(x)-\ell_1| \\ &\leq (|\ell_1|+\varepsilon')\varepsilon' + (|\ell_2|+\varepsilon')\varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela montre bien que $f \times g$ tend vers $\ell_1 \times \ell_2$ en $+\infty$.

(2) Supposons par exemple que f et g tendent vers $-\infty$ en $+\infty$. Soit $B > 0$, posons $B' = \sqrt{B}$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x > A_1$ alors $f(x) < -B'$ et si $x > A_2$ alors $g(x) < -B'$. Choisissons $A = \max(A_1, A_2)$, alors, en faisant le produit des inégalités précédentes, on obtient :

$$x > A, \quad (f \times g)(x) > B'^2 = B.$$

Cela montre bien que $f \times g$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(3) Supposons que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

- On suppose $\ell > 0$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\ell}{2}[$ et $B > 0$. Posons $B' = \frac{2B}{\ell}$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x > A_1$ alors $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et si $x > A_2$ alors $g(x) > B'$. Choisissons $A = \max(A_1, A_2)$, alors, en faisant le produit des inégalités précédentes, on obtient, pour tout $x > A$, $(f \times g)(x) > \frac{\ell}{2} B' = B$. Cela montre bien que $f \times g$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- On suppose $\ell < 0$. En étudiant $(-f) \times g$, on voit que la limite de $-(f \times g)$ en $+\infty$ est $+\infty$ et donc la limite de $(f \times g)$ en $+\infty$ est $-\infty$

□

***Proposition* 2.24.** — Composition de deux fonctions (1) *Supposons à présent que la fonction f définie au voisinage épointé du « point généralisé » ω admet pour limite (finie ou infinie) ω' et que la fonction g définie au voisinage épointé du « point généralisé » ω' admet pour limite (finie ou infinie) ω''. Si f n'atteint jamais la valeur ω' sur un voisinage épointé de ω, alors on a que $g \circ f$ est définie au voisinage de ω et tend vers ω'' lorsque x tend vers ω. Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \omega'$ et $\lim\limits_{y \to \omega'} g(y) = \omega''$, alors $\lim\limits_{\omega}(g \circ f) = \omega''$.*

Remarquons que pour appliquer cette proposition, on peut être amené à chercher non seulement la limite de la fonction f, mais également la position des valeurs de f par rapport à cette limite. Par exemple, si l'on cherche la limite en 0 de $\frac{1}{|\sin x|}$. On sait que la fonction $|\sin x|$ tend vers 0 en 0. Mais on a vu que la fonction $\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0. Pour pouvoir néanmoins appliquer la proposition, il faut remarquer qu'en fait $|\sin x|$ tend vers 0^+ c'est à dire qu'elle tend vers 0 en étant toujours supérieure ou égale à 0. Or la fonction $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ en 0^+, donc on peut conclure que $\frac{1}{|\sin x|}$ tend vers $+\infty$ en 0^+.

Démonstration. Traitons par exemple le cas de $\omega = +\infty$, $\omega' = 0$, $\omega'' = -\infty$. La preuve est similaire dans les autres cas. Soit $B > 0$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $y \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ alors $g(y) < -B$. On sait également qu'il existe $A > 0$ tel que si $x > A$, alors $f(x) \in]-\alpha, \alpha[$. On a donc bien, pour tout $x > A$, que $g(f(x)) < -B$ d'où l'on conclut que $\lim\limits_{+\infty}(g \circ f) = -\infty$. □

Remarquons également que cette propriété n'est pas toujours satisfaisante. Ainsi, par exemple, on aimerait montrer que $\lim\limits_{x \to 0} e^{x \sin(\frac{1}{x})} = 1$ en utilisant le fait que $\lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$ et que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(\dfrac{1}{x}) = 0$. Il n'est pas possible ici d'utiliser la proposition précédente, car dans tout voisinage épointé de 0, la fonction $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ prend la valeur 0. La proposition suivante permet de remédier à cette situation.

***Proposition* 2.25.** — Composition de deux fonctions (2)
Supposons à présent que la fonction f définie au voisinage épointé du « point généralisé » ω admet pour limite finie ℓ et que la fonction g est définie au voisinage du point ℓ (y compris au point

lui même) et admet pour limite finie $\ell' = g(\ell)$ en ℓ. Alors on a que $g \circ f$ est définie au voisinage épointé de ω et tend vers ℓ' lorsque x tend vers ω. Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{y \to \omega'} g(y) = g(\ell) = \ell'$, alors $\lim\limits_{\omega}(g \circ f) = \ell'$.

Nous pouvons appliquer ce qui précède au quotient de deux fonctions : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage épointé d'un « point généralisé » ω, et telle que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de ω.

***Proposition* 2.26.** — QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

(1) *Supposons que la fonction f admet pour limite finie ℓ_1 au « point » ω et que la fonction g admet une limite finie ℓ_2 au « point » ω. Alors*

- ◇ *Si $\ell_2 \neq 0$ alors $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{\lim_\omega f(x)}{\lim_\omega g(x)}$.*
- ◇ *Si $\ell_2 = 0^+$ et $\ell_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f}{g}(x) = \mathrm{sign}(\ell_1)\infty$ où $\mathrm{sign}(\ell_1)$ désigne le signe de ℓ_1 (1 si $\ell_1 > 0$ et -1 si $\ell_1 < 0$).*
- ◇ *Si $\ell_2 = 0^-$ et $\ell_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f}{g}(x) = -\mathrm{sign}(\ell_1)\infty$ où $\mathrm{sign}(\ell_1)$ désigne le signe de ℓ_1 (1 si $\ell_1 > 0$ et -1 si $\ell_1 < 0$).*
- ◇ *Si $\ell_2 = 0$ ou si ($\ell_2 = 0^+$ et $\ell_1 = 0$) ou si ($\ell_2 = 0^-$ et $\ell_1 = 0$), il s'agit d'une forme indéterminée.*

(2) *Supposons que la fonction f admet pour limite finie ℓ_1 au « point » ω et que la fonction g admet une limite infinie $\varepsilon\infty$ au « point » ω. Alors $\dfrac{f}{g}(x)$ tend vers 0 au « point » ω.*

(3) *Supposons que la fonction f admet une limite infinie $\varepsilon\infty$ au « point » ω et que la fonction g admet pour limite finie ℓ_2 au « point » ω. Alors $|\dfrac{f}{g}(x)|$ tend vers $+\infty$ au « point » ω. Si $\ell_2 \in \{0^+, 0^-\} \cup \mathbb{R}^*$ $\frac{f}{g}(x)$ admet une limite infinie en ω, dont on peut déterminer le signe.*

(4) *Supposons que la fonction f admet une limite infinie $\varepsilon_1\infty$ au « point » ω et que la fonction g admet une limite infinie $\varepsilon_2\infty$ au « point » ω, alors on ne sait pas si le quotient $\frac{f}{g}$ admet une limite en ω : il s'agit d'une forme indéterminée.*

Tableau synthétique Calculs de limites et opérations

$\lim\limits_{\omega}(f+g)$		$\lim\limits_{\omega} f$		
		x_0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\omega} g$	y_0	$x_0 + y_0$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

$\lim\limits_{\omega} \lambda f$	$\lim\limits_{\omega} f$		
	x_0	$+\infty$	$-\infty$
si $\lambda > 0$	λx_0	$+\infty$	$-\infty$
si $\lambda = 0$	$\lambda x_0 = 0$	0	0
si $\lambda < 0$	λx_0	$-\infty$	$+\infty$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$\lim\limits_{\omega} fg$</td><td colspan="5">$\lim\limits_{\omega} f$</td></tr>
<tr><td>$x_0>0$</td><td>$x_0=0$</td><td>$x_0<0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{\omega} g$</td><td>$y_0>0$</td><td colspan="3" rowspan="3">x_0y_0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$y_0=0$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$y_0<0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td rowspan="2"></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="6">$\lim\limits_{\omega} f$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{\omega} \lvert f\rvert = +\infty$</td></tr>
<tr><td>$y_0 \neq 0$</td><td>0^+</td><td>0^-</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\omega} \dfrac{1}{f}$</td><td>$\dfrac{1}{y_0}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$0^+$</td><td>$0^-$</td><td>$\lim\limits_{\omega} \left\lvert \dfrac{1}{f} \right\rvert = +\infty$</td><td>$0$</td></tr>
</table>

$$\boxed{\begin{array}{c} \underset{\omega}{\mathcal{D}f} \underset{f}{\to} \underset{\beta}{\mathcal{D}g} \underset{g}{\to} \underset{\gamma}{\mathbb{R}} \\ \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\omega} f = \beta \\ \lim\limits_{\beta} g = \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\omega} g \circ f = \gamma. \end{array}}$$

***Remarques* 2.27.** — ◇ Pour un quotient, on utilise les théorèmes pour le produit et l'inverse : $\boxed{\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}.}$

— Pour une puissance on utilise les théorèmes pour le produit, la composée et les limites des exp et ln : $\boxed{f^g = \exp(g \ln(f)).}$

◇ On peut composer une suite et une fonction *i.e.* :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \omega \\ \lim\limits_{\omega} f = \beta \\ u_n \neq \omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \beta.$$

Inversement (caractérisation séquentielle de la limite de f) si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \beta$ pour toute suite (u_n) qui tend vers ω (et différente de ω à partir d'un certain rang), alors on a $\lim\limits_{\omega} f = \beta$.

◇ Les cases vides signifient que les théorèmes ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite ni même si une telle limite existe — il faut alors examiner plus précisément la situation. On parle alors de **forme indéterminée** ; ce sont les cas suivants : $\boxed{\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ \infty^0 ou\ 0^0.}$

***Corollaire* 2.28** ((changement de variable)). — *Soient trois points ω, β, γ, une fonction f, et une bijection u d'un voisinage épointé de ω sur un voisinage épointé de β telle que $\lim\limits_{\omega} u = \beta$ et $\lim\limits_{\beta} u^{-1} = \omega$. Alors :*

$$\lim_{\beta} f = \gamma \iff \lim_{\omega} f \circ u = \gamma.$$

En particulier pour se ramener à une limite en 0 :

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty} f(u) = \gamma \iff \lim_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \gamma} \text{ et } \boxed{\lim_{u\to x_0} f(u) = \gamma \iff \lim_{x\to 0} f(x + x_0) = \gamma.}$$

2.9. Fonctions monotones et limites.

***Théorème* 2.29.** — **Théorème de la limite monotone** *Soient I un intervalle ouvert et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors pour tout $x_0 \in I$, les limites $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent.*

DÉMONSTRATION. Supposons f croissante. Soit

$$Y = \{f(x) \mid x \in I \text{ et } x > x_0\}.$$

L'ensemble Y n'est pas vide (car $x_0 \in I$ et I est ouvert) et Y est minoré par $f(x_0)$ (car f est supposée croissante). Il admet donc une borne inférieure ; notons-la $u = \inf Y$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_0 = f(x_0+\alpha) \in Y$ $(\alpha > 0)$ tel que

$$u \leqslant f(x_0+\alpha) < u + \varepsilon.$$

Quel que soit $x \in]x_0, x_0+\alpha[$ on a $u \leqslant f(x) \leqslant f(x_0+\alpha) < u+\varepsilon$. Donc $u = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.
On raisonne de même pour montrer l'existence de la limite à gauche. □

On peut préciser ce qui se passe aux bornes de l'intervalle.

***Théorème* 2.30.** — *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et croissante sur cet intervalle. Posons $\omega = \sup I$. On a alors l'alternative suivante.*

- ⋄ *Ou bien f est majorée sur I et alors $f(x)$ admet une limite finie à gauche en ω.*
- ⋄ *Ou bien f n'est pas majorée sur I et alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ à gauche en ω.*

DÉMONSTRATION.
- ⋄ Supposons que f est majorée sur I. Alors l'ensemble $f(I)$ est non vide est majoré dans $\mathbb{R}$, et admet donc un suprémum. Posons $s = \sup f(I)$, et montrons que $f(x)$ tend vers la limite finie s à gauche en ω. Soit $\varepsilon > 0$, par définition de $\sup f(I)$, on sait qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $s - \varepsilon < f(x_0) \leq s$. Puisque f est croissante, cela signifie que pour tout $x \in [x_0, \omega[$, on a $s \geq f(x) > s - \varepsilon$, et donc $f(x)$ tend vers s à gauche en ω.
- ⋄ Supposons que f n'est pas majorée sur I. Alors pour tout $A > 0$, il existe $x_A \in I$ tel que $f(x_A) > A$. Puisque f est croissante, cela signifie que pour tout $x \in [x_A, \omega[$, on a $f(x) > A$, et donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ à gauche en ω.

□

On peut de même montrer le théorème similaire sur la borne inférieure de l'intervalle :

***Théorème* 2.31.** — *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et croissante sur cet intervalle. Posons $\beta = \inf I$. On a alors l'alternative suivante.*

- ⋄ *Ou bien f est minorée sur I et alors $f(x)$ admet une limite finie à droite en β.*
- ⋄ *Ou bien f n'est pas minorée sur I et alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ à droite en β.*

2.10. Limites des fonctions usuelles, croissances comparées.

Limites en un point fini:

(1) On verra au paragraphe suivant que beaucoup de fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition. Cela signifie que pour tout point a dans le domaine de la fonction f, on a $\lim\limits_{a} f(x) = f(a)$. Cette propriété est vérifiée pour les fonctions suivantes :

- ⋄ constantes,
- ⋄ affines,
- ⋄ polynomiales,
- ⋄ fractions rationnelles,
- ⋄ exponentielles,
- ⋄ logarithmes,
- ⋄ puissances,
- ⋄ trigonométriques,
- ⋄ fonctions de trigonométrie hyperbolique.

(2) En revanche, les fonctions en escalier ou affines par morceaux admettent toujours une limite à gauche et à droite en tout point, mais en général pas de limite aux points de raccord.

(3) La fonction $x \to 1/x$ tend vers $+\infty$ en 0^+.

(4) La fonction $x \to \ln(x)$ tend vers $-\infty$ en 0^+.

(5) La fonction de Cauchy $x \to \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite (finie ou infinie) en 0^+.

Limite en un « point » infini:

(1) On a $\lim\limits_{\varepsilon\infty} x = \varepsilon\infty$, $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$.
On en déduit les limites au voisinage de l'infini suivantes, en utilisant les opérations sur les limites et les propriétés des fonctions monotones :
- ⋄ La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini du terme de plus haut degré (soit $\pm\infty$).
- ⋄ La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des termes de plus haut degré.
- ⋄ On a $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$.
- ⋄ On a $\lim\limits_{+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- ⋄ On a $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$.
- ⋄ On a $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty = -\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh}(x)$.
- ⋄ On a $\lim\limits_{+\infty} \tanh(x) = 1 = -\lim\limits_{+\infty} \tanh(x)$.

(2) Les fonctions trigonométriques : cos, sin n'admettent pas de limite à l'infini (mais restent bornées). Plus généralement, une fonction périodique non constante n'admet jamais de limite à l'infini.

Croissances comparées:

Théorème 2.32. — *On a les limites suivantes (voir la démonstration en exercice) :*

(1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$, on a $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$.

(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$, on a $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^\beta}{\ln(x)^\alpha} = +\infty$.

(3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$, on a $\lim\limits_{0^+} x^\beta \ln(x)^\alpha = 0$.

3. Fonctions continues

Si l'on considère les graphes des fonctions usuelles que nous avons vues dans les exemples, nous pouvons observer que le graphe de certaines d'entre elles (fonctions constantes, polynomiales, exponentielles, logarithmes, puissances, trigonométriques, de trigonométrie hyperbolique,...) peut se dessiner sans lever le crayon de la feuille, c'est à dire dans un mouvement continu de la pointe du crayon, alors que d'autres fonctions ne vérifient pas cette propriété (fonctions en escalier, affines par morceaux, fraction rationnelles, fonction de Dirichlet, ...).
On appelle continuité de la fonction cette propriété.

3.1. Continuité d'une fonction en un point. Continuité à gauche, à droite.

***Définition* 3.1.** — Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage du point a (y compris en a). On dit que la fonction f est **continue au point** a si la fonction f converge vers $f(a)$ au point a c'est à dire si $\lim\limits_{a} f(x) = f(a)$.

***Exemples* 3.2.** —
- ◇ La fonction constante c sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto c$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
- ◇ La fonction identité sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
- ◇ La fonction inverse : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.
- ◇ La fonction de Heaviside n'est pas continue en 0.

Pour prendre en compte plus précisément le cas de la fonction Heaviside précédente, on peut introduire la notion de continuité à gauche ou à droite en un point.

***Définition* 3.3.** —
1. Soit f une fonction définie en a, et au voisinage du « point » a^+. On dit que la fonction f est **continue à droite au point** a si la fonction f converge vers $f(a)$ au « point » a^+ c'est à dire si $\lim\limits_{a^+} f(x) = f(a)$.
2. Soit f une fonction définie en a, et au voisinage du « point » a^-. On dit que la fonction f est **continue à gauche au point** a si la fonction f converge vers $f(a)$ au « point » a^- c'est à dire si $\lim\limits_{a^-} f(x) = f(a)$.

La relation entre limite, limite à gauche et limite à droite en un point a nous permet d'énoncer la proposition suivante :

***Proposition* 3.4.** — *Soit $a \in \mathbb{R}$. Une fonction f définie au voisinage du point a (y compris en a) est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

***Exemples* 3.5.** —
- ◇ La fonction de Heaviside n'est pas continue à gauche en 0, mais continue à droite en 0.
- ◇ La fonction « signe » n'est continue ni à gauche, ni à droite en 0.
- ◇ La fonction valeur absolue est continue à gauche et à droite en 0, donc continue en 0.

On peut définir la notion de continuité sur un intervalle, ou plus généralement sur une réunion d'intervalles, en adoptant la définition locale suivante.

***Définition* 3.6.** — Si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ et A est une partie de $\mathcal{D}_f$ qui est réunion d'intervalles ouverts, on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

On définit la continuité sur un intervalle non ouvert de la façon suivante :

***Définition* 3.7.** — Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point x de I différent des bornes de l'intervalle et si f est continue à gauche en $b = \sup I$ dans le cas où $b \in I$ (*i.e.* $b = \max(I)$) et à droite en $a = \inf I$ dans le cas où $a \in I$ (*i.e.* $a = \min(I)$).

3.2. Caractérisation séquentielle de la continuité. En utilisant la caractérisation séquentielle des limites, on a la proposition suivante.

***Proposition* 3.8.** — *Soit f une fonction définie au point a et au voisinage du point a (respectivement a^+, respectivement a^-), alors f est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{D}_f)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a (respectivement a^+, respectivement a^-), alors $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.*

3.3. Opérations sur les fonctions continues. Des opérations vues sur les limites, on déduit facilement les propositions suivantes :

***Proposition* 3.9.** — *Soit f une fonction définie au voisinage du point a et continue au point a. Soit g une fonction définie au voisinage du point $f(a)$ et continue au point $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue au point a.*

***Proposition* 3.10.** — *Soient f et g deux fonctions définies au point a et au voisinage du point a (respectivement a^+, respectivement a^-), et continues au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche). Alors on a :*

(1) *si A est une partie du domaine de définition de f qui contient a et un voisinage du point a (respectivement a^+, respectivement a^-), alors la restriction de f à A, $f_{|A}$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*

(2) *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*

(3) *la fonction $f + g$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*

(4) *la fonction $f \times g$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*

(5) *si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche).*

Ceci nous permet de construire beaucoup de fonctions continues, à condition de connaître la continuité de fonctions usuelles.

3.4. Continuité des fonctions usuelles.

(1) Les fonctions affines et polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
Cela découle de la continuité des fonctions constantes et de la fonction identité, ainsi

que des règles sur le produit, la multiplication par un scalaire et la somme de fonctions continues en un point.

(2) Les fonctions fractions rationnelles sont continues en tout point de leur domaine de définition.
Cela découle de la continuité du quotient de deux fonctions polynomiales (elles-mêmes continues).

(3) Les fonctions en escalier ou affines par morceaux ne sont en général pas continues aux points de raccords.

(4) Les fonctions exponentielles et logarithmes sont continues en tout point de leurs domaines de définition, par construction (admise).

(5) Les fonctions puissances sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition.

(6) Les fonctions trigonométriques sont continues sur leur domaine de définition.

Démonstration. Pour le voir, commençons par montrer que la fonction sinus est continue en 0. On sait que la fonction sinus est impaire, il nous suffit donc de montrer que $\lim_{0^+} \sin(\theta) = \sin(0) = 0$. Pour ce faire on utilise l'observation géométrique suivante : pour $\theta \in]0, \pi/2[$, θ représente, par définition des radians, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ du cercle trigonométrique (de rayon 1) déterminée par deux segments $[OA]$ et $[OB]$ formant au centre du cercle un angle θ. La valeur $\sin\theta$ représente la longueur du segment $[BC]$, qui forme un angle droit en C avec le segment $[OA]$. Le triangle BCA est un triangle rectangle en C, donc son hypoténuse $[AB]$ est plus longue que le segment $[BC]$. Mais le segment AB est une corde, du cercle trigonométrique, donc sa longueur est inférieure à la longueur de l'arc $\widehat{AB}$. On a ainsi obtenu, pour $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$0 \leq \sin(\theta) = BC \leq AB \leq \left|\widehat{AB}\right| = \theta.$$

Ceci prouve donc bien que $\lim_{0^+} \sin(\theta) = \sin(0) = 0$ et la fonction sinus est donc bien continue en 0.

En utilisant le fait que la fonction cosinus est paire et positive pour $\theta \in [0, \pi/2]$, et la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, on peut écrire $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$ pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, ce qui montre (en utilisant les opérations sur les fonctions continues) que la fonction cosinus est continue en 0. Enfin, les formules d'addition des angles, permettent d'étendre la continuité en 0 des fonctions sinus et cosinus à la continuité en tout point. □

(7) La fonction de Dirichlet $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
En effet, soit a un réel quelconque. Si $a \in \mathbb{Q}$ (resp. $a \notin \mathbb{Q}$), alors pour tout $\alpha > 0$ il existe $x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (resp. $x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap \mathbb{Q}$), dans les deux cas $|\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)| = 1$ ce qui montre que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a.
Cependant, on peut montrer que la fonction de type Dirichlet définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

est continue pour a irrationnel et discontinue pour a rationnel : $\mathrm{Discont}(f) = \mathbb{Q}$ et $\mathrm{Cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

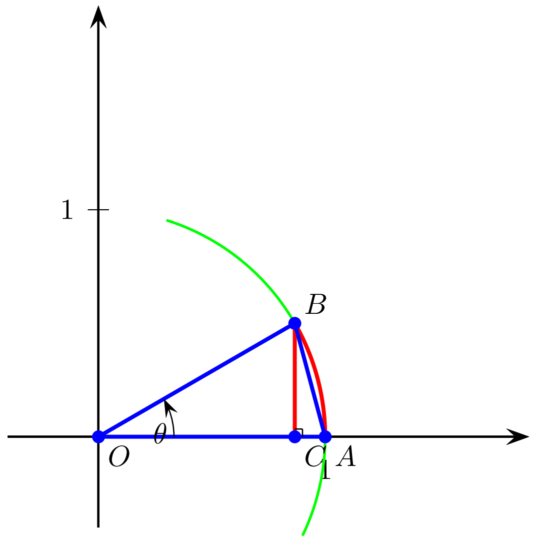


FIGURE 23. Continuité de la fonction sinus en 0

(8) La fonction de Cauchy $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas continue à droite en 0, mais la fonction de Weierstrass $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ l'est.

3.5. Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème* 3.11. — *Théorème des valeurs intermédiaires (*Bolzano*)
Soient a et b deux réels, avec $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) < c$ et $f(b) > c$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi) = c$.

DÉMONSTRATION. Par translation, en considérant la fonction $x \mapsto f(x) - c$ au lieu de f, on se ramène au cas où $c = 0$.
L'ensemble $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$ est non vide (car $a \in X$) et majoré par b. Il admet donc une borne supérieure : $\xi = \sup X$. Montrons que ξ répond à la question et vérifie $f(\xi) = 0$.
Par l'absurde supposons que $f(\xi) = \kappa > 0$ et prenons $\varepsilon = \frac{\kappa}{2} > 0$. La continuité de f en ξ garantie l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$|f(x) - \kappa| < \frac{\kappa}{2} \text{ si } |x - \xi| < \delta$$

de sorte que

$$f(x) > \frac{\kappa}{2} > 0 \text{ si } \xi - \delta < x < \xi$$

ce qui est impossible puisqu'alors $\xi - \delta$ serait un majorant de X et ξ est le plus petit majorant de X.
Supposons à présent $f(\xi) = \kappa < 0$ et prenons $\varepsilon = -\frac{\kappa}{2} > 0$. La continuité de f en ξ garantie l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$|f(x) - \kappa| < -\frac{\kappa}{2} \text{ si } |x - \xi| < \delta$$

de sorte que

$$f(x) < \frac{\kappa}{2} < 0 \text{ si } \xi < x < \xi + \delta$$

ce qui est impossible par définition de $\xi = \sup X$. □

Exemples & applications.

(1) Une *fonction continue ne peut pas changer de signe sans s'annuler* :

***Corollaire* 3.12.** — *Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue prend des valeurs positives et et des valeurs négatives sur $[a, b]$, alors f s'annule au moins une fois, i.e. il existe $x_0 \in [a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x_0) = 0$.*

(2) Existence de solutions d'équations.

a.

***Proposition* 3.13.** — *Une équation polynomiale de degré n impair*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \text{ (avec } a_n \neq 0)$$

admet au moins une solution.

DÉMONSTRATION. Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $a_n = 1$. Comme n est impair, il vient

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Ainsi la fonction polynomiale (donc continue) f prend des valeurs positives et négatives, elle s'annule donc au moins une fois. □

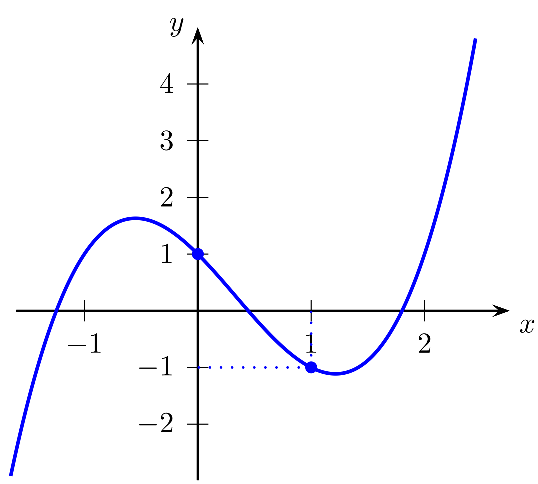


FIGURE 24. Graphe de la fonction $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$

b. Exemple concret. Considérons la fonction polynomiale :

$$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

On constate que $p(0) = 1$ et $p(1) = -1$, grâce au théorème des valeurs intermédiaires on conclut que p s'annule dans $]-\infty, 0[$, dans $]0, 1[$ et dans $]1, +\infty[$ (voir Fig. 24).

(3) Un théorème de point fixe.

***Proposition* 3.14.** — *Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors f possède au moins un point fixe, i.e. il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $f(\xi) = \xi$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$. $\square$

(4) Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?
La réponse est *non*.

Démontrons ceci par l'absurde : supposons qu'une telle fonction f existe. Soit $g : x \mapsto f(x) + x$. La fonction g est continue et $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ce qui est impossible si g n'est pas constante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires puisqu'entre deux irrationnels il existe toujours un rationnel. On aurait alors $f(x) = -x + c$ avec c une constante irrationnelle. Mais dans ce cas, on obtient $f(2c) = -c \in \mathbb{Q}$ d'après les hypothèses, ce qui est impossible.

3.6. Fonctions strictement monotones et continues. On a vu qu'une fonction strictement monotone est toujours injective.
En fait, pour les fonctions *continues* sur un intervalle la réciproque de la propriété précédente est vraie. De plus, on va montrer que dans ce cas, la fonction réciproque f^{-1}, dont on sait déjà qu'elle est strictement monotone, est également continue.
Nous allons commencer pour cela par remarquer plusieurs propriétés caractéristiques des fonctions strictement monotones.

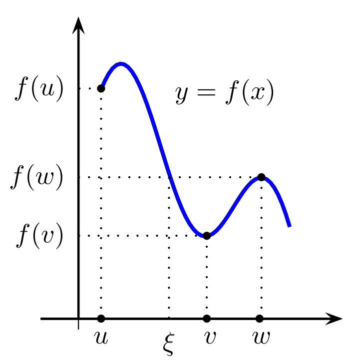


Figure 25. Illustration de la démonstration du lemme 3.15

***Lemme* 3.15.** — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et injective, alors f est strictement monotone.*

DÉMONSTRATION. Soient trois points $u < v < w$. Alors $f(v)$ est nécessairement entre $f(u)$ et $f(w)$ par continuité de f. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas (voir Fig. 25) et que par exemple on ait $f(u) > f(w) > f(v)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $\xi \in [u, v]$ tel que $f(\xi) = f(w)$ ce qui contredit l'injectivité de f. $\square$

Par ailleurs, si une fonction est monotone, on sait qu'elle ne peut être « trop discontinue ».

***Proposition* 3.16.** — *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est fini ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Supposons f croissante et utilisons le théorème de la limite monotone (2.29). Pour tout intervalle fermé borné $[a, b]$, considérons, pour un entier $m > 0$

$$D_m = \left\{ \xi \in [a, b] \mid \lim_{x \to \xi^+} f(x) - \lim_{x \to \xi^-} f(x) > 1/m \right\}.$$

Si $(\xi_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une suite strictement croissante de n points de D_m, alors

$$\frac{n}{m} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\lim_{x \to \xi_j^+} f(x) - \lim_{x \to \xi_j^-} f(x) \right) \leqslant f(b) - f(a),$$

car, en utilisant la propriété vue sur les limites et l'ordre et la croissance de f, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\lim_{x \to \xi_j^+} f(x) - \lim_{x \to \xi_j^-} f(x) \right) &= \lim_{x \to \xi_n^+} f(x) - \lim_{x \to \xi_1^-} f(x) + \sum_{2 \leqslant j \leqslant n} \left(\lim_{x \to \xi_{j-1}^+} f(x) - \lim_{x \to \xi_j^-} f(x) \right) \\
&\leq \lim_{x \to \xi_n^+} f(x) - \lim_{x \to \xi_1^-} f(x) \\
&\leq f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

de sorte que $n \leqslant m(f(b) - f(a))$, donc D_m est nécessairement fini et le nombre de ses éléments n'excède pas $m(f(b) - f(a))$.
Par conséquent, $\mathrm{Discont}(f) \cap [a, b] = \bigcup_{m \geqslant 1} D_m$ est au plus dénombrable. Il en résulte donc que

$$\mathrm{Discont}(f) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{Discont}(f) \cap [-n, n]$$

est aussi au plus dénombrable. $\square$

On a en fait la caractérisation suivante de la continuité pour les fonctions strictement monotones sur un intervalle.

***Proposition* 3.17.** — *Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle $I = [a, b]$. La fonction f est continue sur I si et seulement si elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout c strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(\xi) = c$.*

On a vu que si f est continue, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque est fausse.

DÉMONSTRATION. Supposons que f est strictement croissante et respecte la propriété des valeurs intermédiaires. D'après le théorème de la limite monotone (2.29), on a vu que f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x_0 \in]a, b[$. Si f était discontinue en x_0, on aurait

$\lim_{x_0^-} f(x) \neq \lim_{x_0^+} f(x)$, et donc par croissance de f :

$$\forall x \in]a,b[, \begin{cases} f(x) \leq \lim_{x_0^-} f(x) & \text{si } x < x_0 \\ f(x) \geq \lim_{x_0^+} f(x) & \text{si } x > x_0 \\ \lim_{x_0^-} f(x) < \lim_{x_0^+} f(x) & \end{cases}$$

ce qui contredit la propriété des valeurs intermédiaires pour $c \in]\lim_{x_0^-} f(x), \lim_{x_0^+} f(x)[\subset]f(a), f(b)[$.

□

On en déduit le théorème suivant :

***Théorème* 3.18.** — *Soit $f\colon [a,b] \to [c,d]$ une fonction continue et bijective. Alors la fonction réciproque $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ existe et est aussi continue.*

Démonstration. On sait que f est strictement monotone (supposons f croissante), que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, et que f^{-1} est strictement croissante elle aussi. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $u \in]a,b[$. Posons $f(u) = y$. Alors, on a : $y \in]c,d[$ et $f^{-1}(y) = u$, donc $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, et est bien continue. □

En utilisant le fait que tout intervalle peut s'écrire comme une réunion croissante de segments, on en déduit le théorème suivant :

***Théorème* 3.19.** — *Soit $f\colon I \to J$ une fonction continue et bijective entre deux intervalles. Alors la fonction réciproque $f^{-1}\colon J \to I$ existe et est aussi continue.*

***Exemple* 3.20.** — C'est ainsi que l'on définit la fonction $\ln(x)$, à partir de la fonction e^x (ou réciproquement la fonction exp à partir de la fonction ln).

3.7. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et de trigonométrie hyperbolique. Appliquons le théorème précédent aux fonctions trigonométriques :

La fonction Arcsinus.: La fonction sinus restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante et continue, et $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, qui à une valeur α du sinus comprise entre -1 et 1, associe l'unique angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \alpha$.
Puisque la fonction sin est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction arcsin est impaire également.

La fonction Arccosinus.: La fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0,\pi]$ est strictement décroissante et continue, et $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement décroissante et continue, notée $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, qui à une valeur α du cosinus comprise entre -1 et 1, associe l'unique angle $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \alpha$.

La fonction Arctangente.: La fonction tangente restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est strictement croissante et continue, et $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$. D'après le

théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée arctan: $]-\infty,+\infty[\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, qui à une valeur réelle α de la tangente, associe l'unique angle $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta)=\alpha$.
Puisque la fonction tan est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction arctan est impaire également.

La fonction Argument sinus hyperbolique.: La fonction sinus hyperbolique définie sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ est strictement croissante et continue, et $\text{sh}(]-\infty,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée argsh: $]-\infty,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$, qui à une valeur réelle α du sinus hyperbolique associe l'unique réel θ tel que $\text{sh}(\theta)=\alpha$.
Puisque la fonction sh est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction argsh est impaire également.

La fonction Argument cosinus hyperbolique.: La fonction cosinus hyperbolique restreinte à l'intervalle $[0,+\infty[$ est strictement croissante et continue, et $\text{ch}([0,+\infty[)=[1,+\infty[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée argch: $[1,+\infty[\to[0,+\infty[$, qui à une valeur $\alpha\geq 1$ du cosinus hyperbolique associe l'unique réel positif θ tel que $\text{ch}(\theta)=\alpha$.

La fonction Argument tangente hyperbolique.: La fonction tangente hyperbolique définie sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ est strictement croissante et continue, et $\tanh(]-\infty,+\infty[)=]-1,1[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée argth: $]-1,1[\to]-\infty,+\infty[$, qui à une valeur α comprise entre -1 et 1 de la tangente hyperbolique associe l'unique réel θ tel que $\tanh(\theta)=\alpha$.
Puisque la fonction tanh est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction argth est impaire également.

3.8. Prolongement par continuité.

***Définition* 3.21.** — (1) Soit $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité (à droite) en a s'il existe une fonction continue $g\colon [a,b[\to\mathbb{R}$ telle que $g_{|]a,b[}=f$.

(2) Soit $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité (à gauche) en b s'il existe une fonction continue $g\colon]a,b]\to\mathbb{R}$ telle que $g_{|]a,b[}=f$.

(3) Soit $f\colon]a,c[\cup]c,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité en c s'il existe une fonction continue $g\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ telle que $g_{|]a,c[\cup]c,b[}=f$.

***Proposition* 3.22.** — *Une fonction f admet un prolongement continu en un point c (respectivement à gauche, respectivement à droite) si et seulement si f admet une limite finie au point c (respectivement à gauche, respectivement à droite). Dans ce cas, l'unique fonction continue g prolongeant f en c (respectivement à gauche, respectivement à droite) est la fonction définie en c par $g(c)=\lim\limits_{c} f(x)$ (respectivement $g(c)=\lim\limits_{c^+} f(x)$, respectivement $g(c)=\lim\limits_{c^-} f(x)$).*

***Exemples* 3.23.** — — La fonction $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

— La fonction $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 (on verra pourquoi plus tard).

— La fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

— La fonction de Cauchy $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

— La fonction de Weierstrass $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

3.9. Continuité sur un segment. Voici deux propriétés importantes vérifiées par les fonctions continues sur un segment, c'est à dire un intervalle fermé et borné que nous admettrons.

***Théorème* 3.24.** — **Principe du maximum** *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors il existe c et d deux nombres réel tels que* $c \leq d$ *et* $f([a,b]) = [c,d]$. *Cela signifie que* f *est bornée, et qu'elle admet un maximum et un minimum sur l'intervalle* $[a,b]$.

De plus f possède la propriété d'être *uniformément continue* sur le segment.

***Définition* 3.25.** — On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I est **uniformément continue** sur I si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, (x,y) \in I^2, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

***Théorème* 3.26.** — *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* f *est uniformément continue sur* $[a,b]$.

4. Fonctions dérivables

Pour comprendre le comportement, local (au voisinage d'un point) ou global d'une fonction, une information importante est celle de la variation de la fonction sur un intervalle donné. Nous souhaitons par exemple comprendre si une fonction est localement ou globalement monotone, c'est à dire, si on reprend l'exemple d'une quantité dépendant du temps, que l'on souhaite savoir si cette quantité s'accroit ou décroit en fonction du temps.
Pour cela on s'intéresse naturellement au taux de variation de la quantité

$$T = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nous allons donner ce qui suit des méthodes pour calculer en pratique ce taux de variation, ou sa limite au voisinage d'un point.
Illustrons par un exemple concret de l'intérêt pratique de ce calcul : la police dispose de deux moyens de contrôler la vitesse des automobiles sur l'autoroute.

— Les radars tronçons permettent de calculer le temps qu'un véhicule met à parcourir la distance entre deux points distants de plusieurs kilomètres. On établit alors que la vitesse moyenne du véhicule sur ce tronçon est égale à :

$$V_{moy} = \frac{\text{Longueur du tronçon}}{\text{Temps de parcours}}$$

et apparait donc naturellement comme un taux de variation, et on peut la comparer à la limite de vitesse en vigueur sur le tronçon.

— Les radars instantanés : ils mesurent la vitesse « instantanée » de la voiture à l'instant où celle-ci passe devant le module automatique. Ce que l'on détermine ici c'est le taux de déplacement à un instant précis, c'est à dire la limite du taux d'accroissement de la position du véhicule.

4.1. Taux d'accroissement, tangente, dérivée d'une fonction en un point. Etant donnée une courbe dans le plan, et P un point de la courbe, on appelle **sécantes** passant par P les droites passant par P et un autre point Q de la courbe (la terminologie provient de ce que la droite coupe la courbe en au moins deux points). Lorsque le point Q se rapproche du point P, on peut se demander s'il existe une droite limite. Si une telle droite existe, on voit que l'angle qu'elle forme avec les sécantes tend vers 0. On appelle alors tangente à la courbe au point P cette droite. Géométriquement, on peut y penser comme à la droite qui passe par P et forme avec la courbe un angle qui tend vers 0 lorsque l'on se rapproche du point P.
On peut interpréter cette définition en disant que localement, au point P, la tangente représente la meilleure approximation affine (par une droite) possible de la courbe.

Passons à présent à l'interprétation analytique de cette situation géométrique, dans le cas où la courbe est le graphe d'une fonction f. Appelons $(x_P, f(x_P))$ les coordonnées du point P. Un autre point Q sur la courbe a pour coordonnées $(x_Q, f(x_Q))$ et la sécante passant par P et Q est alors la droite d'équation

$$y = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}(x - x_P) + f(x_P).$$

La pente de cette droite est ainsi exactement donnée par $m_{(P,Q)} = \dfrac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$. La question de savoir si la courbe admet une tangente au point P est donc équivalente, puisque cette droite, si elle existe, passe par P, à la connaissance de sa pente, c'est à dire que la question posée est celle de l'existence de la limite de la pente des sécantes lorsque Q tend vers P.
Ainsi, la courbe $y = f(x)$ admet une tangente au point Q si et seulement si

$$\lim_{Q \to P} m_{(P,Q)} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} \text{ existe.}$$

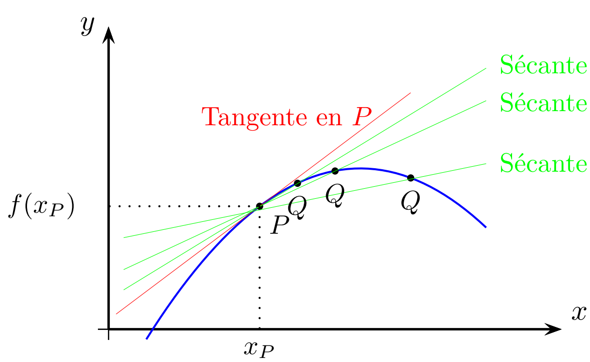


FIGURE 26. La tangente est la droite limite des sécantes

Ceci nous conduit naturellement à la définition suivante.

***Définition* 4.1.** — (Cauchy)
Soit I un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. La fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si la limite :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. La valeur de cette limite est la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.
Si la fonction f est dérivable en chaque point de I, on dit que f est dérivable sur I. Si de plus $f' \colon I \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est continûment dérivable ou de classe C^1.

Nous présentons maintenant deux formulations pratiques équivalentes de la dérivabilité d'une fonction.

***Définition* 4.2.** — Formulation de Weierstrass :
La fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un nombre $f'(x_0)$ et une fonction $r \colon I \to \mathbb{R}$, continue en x_0 et satisfaisant $r(x_0) = 0$, tels que :

$$(\star) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

La formule $(\star)$ a l'avantage de ne pas contenir de limite (remplacée par la condition de continuité de r) et met en évidence l'équation de la tangente au graphe de la courbe $y = f(x)$ au point x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Une formulation alternative est la suivante.

***Définition* 4.3.** — La fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si, et seulement si, il existe une fonction $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ continue en x_0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

La valeur $\varphi(x_0)$ est la dérivée $f'(x_0)$ de f en x_0.

***Exemples* 4.4.** —

- ◇ Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont manifestement dérivables. En écrivant, $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$, on constate (en utilisant la formulation de Weierstrass) que $x \mapsto x^2$ est dérivable.
- ◇ La dérivabilité est une propriété *locale*.
- ◇ La fonction $f \colon x \mapsto |x|$ est dérivable en $x_0 > 0$, et sa dérivée vaut $f'(x_0) = 1$. De même, f est dérivable en $x_0 < 0$ et $f'(x_0) = -1$. Par contre, f n'est pas dérivable en 0, car $f(x)/x = |x|/x$ n'a pas de limite en 0.
- ◇ La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou entier} \\ \frac{1}{q^2} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

  est discontinue en chaque point rationnel x_0, non entier. Toutefois, f est dérivable en $x_0 = 0$. En effet, on a aisément $|f(x)| \leqslant x^2$ pour tout x, ce qui implique que $\lim_{x \to 0} f(x)/x$ existe et vaut 0.

Remarquons que la dérivabilité **implique** la continuité. Il suffit de considérer la formulation de Weierstrass, par exemple.

***Proposition* 4.5.** — *Si une fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

La réciproque est évidemment fausse : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais pas dérivable en 0.

4.2. Dérivée à gauche, à droite. De manière similaire à ce que l'on a vu pour la continuité, on peut définir la dérivée à gauche ou à droite en un point

***Définition* 4.6.** — (1) Soit f une fonction définie en x_0, et au voisinage du « point » x_0^+. On dit que la fonction f est **dérivable à droite au point** x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0.

(2) Soit f une fonction définie en x_0, et au voisinage du « point » x_0^-. On dit que la fonction f est **dérivable à gauche au point** x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0.

La relation entre limite, limite à gauche et limite à droite en un point a nous permet d'énoncer la proposition suivante :

***Proposition* 4.7.** — *Une fonction définie au point x_0 et au voisinage du point x_0 est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0, et que ses dérivées à gauche et à droite sont égales.*

***Exemples* 4.8.** — — La fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0, mais pas dérivable en 0.

◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable à gauche en 0 mais n'est pas dérivable à droite en 0.

◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et dérivable en 0.

4.3. Opérations sur les fonctions dérivables. De l'action des opérations vues sur la continuité et les limites, on déduit facilement les propositions suivantes :

***Proposition* 4.9.** — *Soit f une fonction définie au point x_0 et au voisinage du point x_0 et dérivable au point x_0 . Soit g une fonction définie au point $f(x_0)$ et au voisinage du point $f(x_0)$ et dérivable au point $f(x_0)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable au point x_0, et on a $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.*

DÉMONSTRATION. Utilisons la formulation de la dérivabilité présentée ci-dessus :

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0),$$

$$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y-y_0), \quad \psi(y_0) = g'(y_0).$$

En remplaçant dans la deuxième équation $y - y_0$ par l'expression $f(x) - f(x_0)$ de la première, on obtient :

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))\varphi(x)(x-x_0).$$

La fonction $x \mapsto \psi(f(x))\varphi(x)$ est continue en x_0 et sa valeur en x_0 est égale à $g'(f(x_0))f'(x_0)$.
□

***Proposition* 4.10.** — *Soient f et g deux fonctions définies au point x_0 et au voisinage du point a (respectivement x_0^+, respectivement x_0^-), et dérivables au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche). Alors on a :*

(1) si A est une partie du domaine de définition de f qui contient x_0 et un voisinage du point x_0 (respectivement x_0^+, respectivement x_0^-), alors la restriction de f à A, $f_{|A}$ est dérivable au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche) et $f'_{|A}(x_0) = f'(x_0)$;

(2) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est dérivable au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche) et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$;

(3) la fonction $f+g$ est dérivable au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche) et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

(4) la fonction $f \times g$ est dérivable au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche) et $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$;

(5) si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche) et $(\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Démonstration. Démontrons les deux derniers points.

— En utilisant la formulation de Weierstrass, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_1(x)(x-x_0) \text{ et } g(x) = g(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_2(x)(x-x_0)$$

avec r_1 et r_2 des fonctions continues au voisinage de x_0 et telles que $r_1(x_0) = r_2(x_0) = 0$. En multipliant les deux formules, on obtient :

$$(f \times g)(x) = f(x_0)g(x_0) + [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)](x-x_0) + r(x)(x-x_0)$$

avec

$$r(x) = r_1(x)[g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0)] + r_2(x)(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)) + r_1(x)r_2(x)(x-x_0)$$

qui est une fonction continue et qui s'annule en x_0.
On en déduit que $f \times g$ est dérivable en x_0 , de dérivée $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$.

— Commençons par calculer la dérivée de la fonction $\iota(x) = \frac{1}{x}$ en un point $x_0 \neq 0$. On peut écrire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x-x_0) + \frac{x-x_0}{xx_0^2}(x-x_0)$$

et on en déduit (formulation de Weierstrass) que $\iota(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$ et de dérivée $\iota'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.
Calculons à présent la dérivée de la fonction $h = \frac{1}{g}$. C'est la dérivée de la fonction composée $\iota \circ g$ où $\iota(x) = \frac{1}{x}$. Par le théorème sur la dérivée d'une composée, on sait que si $g(x_0) \neq 0$ la fonction $h = \iota \circ g$ est dérivable en x_0, de dérivée $h'(x_0) = \iota'(g(x_0)) \times g'(x_0)$. En utilisant le fait que $\iota'(x) = -\frac{1}{x^2}$, on obtient $h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0]^2}$.
Enfin, en écrivant $\frac{f}{g} = f \times h$ et utilisant la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions, on obtient bien que si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable au point x_0 et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

□

4.4. Dérivée d'une fonction réciproque.

***Proposition* 4.11.** — *Soient I et J deux intervalles et $f\colon I \to J$ une fonction continue, bijective et dérivable en $x_0 \in I$. Supposons de plus que $f'(x_0) \neq 0$. Alors, la fonction inverse $f^{-1}\colon J \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

DÉMONSTRATION. Si $y \in J$, on sait qu'il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et on sait que, pour toute fonction T définie sur un voisinage épointé de y_0 dans J, $\lim\limits_{y\to y_0} T(y) = \lim\limits_{x\to x_0} T(f(x))$, par bijectivité et continuité de f.
Alors, on a :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

4.5. Dérivées des fonctions usuelles.

(1) Les fonctions affines et polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car la dérivée d'une fonction constante est nulle, et celle de la fonction identité ($x \mapsto x$) est constante égale à 1. En utilisant les propriétés sur le produit, la somme et la multiplication par un scalaire de fonctions dérivables, on en déduit que toute fonction polynomiale $P(x)$ est dérivable et

$$\text{Si } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ alors } P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

(2) Les fonctions fractions rationnelles sont dérivables en tout point de leur domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables, et on a

$$\text{Si } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ alors } f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}.$$

(3) Les fonctions en escalier ou affines par morceaux ne sont en général pas continues, donc pas dérivables aux points de raccords.

(4) Les fonctions exponentielles et logarithmes sont dérivables en tout point de leurs domaines de définition, par construction (admise), et on a

$$\text{Si } f(x) = e^{\alpha x} \text{ et } g(x) = \ln(x) \text{ alors } f'(x) = \alpha e^{\alpha x} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{x}$$

(5) Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, et on a

$$\text{Si } f(x) = x^\alpha \text{ alors } f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(6) Les fonctions trigonométriques sont dérivables sur leur domaine de définition et on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \ , \ \cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

DÉMONSTRATION. (a) Commençons par montrer la dérivabilité de la fonction sinus en 0. On a vu dans le paragraphe 3.4 que les fonctions sinus et cosinus étaient continues en 0. Plus précisément, on avait vu que pour $\theta \in]0, \pi/2[$, θ représente, par définition des radians, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle trigonométrique (de rayon 1) déterminée par deux segments $[OA]$ et $[OB]$ formant au centre du cercle un angle θ (voir figure 27). On obtient dans ce cas l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sin(\theta) = BC \leq AB \leq \left|\widehat{AB}\right| = \theta.$$

Introduisons les points D, situé à l'intersection de la droite (OB) et de la perpendiculaire à la droite (OA) issue de A, et E situé à l'intersection de la droite (OD) et de la perpendiculaire à la droite (OB) issue de B. D'après le théorème de Pythagore, appliqué dans le triangle rectangle OBE, on voit que l'hypoténuse $[OE]$ est plus grande que la longueur du segment $[OB]$. La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est donc inférieure à la somme des longueurs $AE + BE$. Par ailleurs le triangle EBD étant rectangle en B, on sait que $BE \leq ED$. On obtient donc :

$$\left|\widehat{AB}\right| \leq AE + BE \leq AE + ED = AD = \tan(\theta),$$

cette dernière égalité étant due au théorème de Thalès. On a donc finalement obtenu, pour $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta).$$

On en déduit, en inversant cette inégalité, et en la multipliant par le nombre positif $\sin(\theta)$, pour $\theta \in]0, \pi/2[$:

$$0 < \cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1.$$

Nous pouvons à présent utiliser la continuité de cosinus en 0 et le théorème des gendarmes pour montrer que $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos(0) = 1$. La fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ étant paire, ceci implique $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos(0) = 1$.

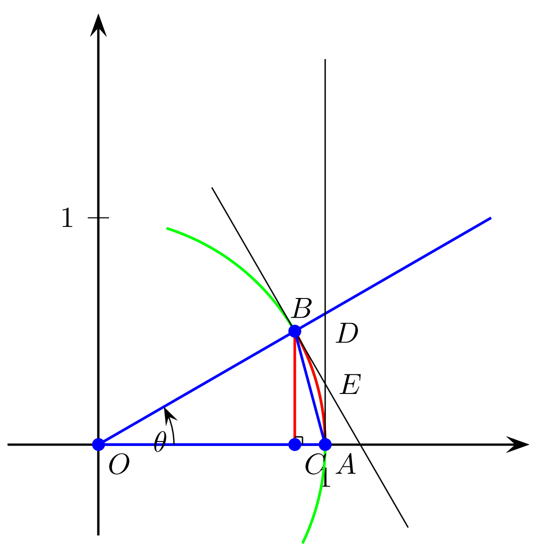


Figure 27. Continuité de la fonction sinus en 0

(b) On déduit de ce qui précède la dérivabilité de la fonction cosinus en 0. En effet, si on utilise la formule $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a :

$$\frac{\cos(\theta)-1}{\theta} = -2\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}.$$

Dans le dernier terme, on sait par ce qui précède que $\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}$ tend vers 1 lorsque θ tend vers 0 et par ailleurs $\lim_{\theta\to 0} -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$. Ce qui montre que la fonction cosinus est dérivable en 0, de dérivée nulle.

(c) Pour montrer la dérivabilité de sinus et cosinus ailleurs qu'en 0, on utilise les règles d'addition des angles : $\sin(x_0+h) = \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)$. Ainsi, on a :

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h}$$

et on obtient donc, lorsque h tend vers 0, $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$.

De même, on obtient $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = -\sin(x_0)$.

(d) Pour la dérivabilité de la fonction tangente, on utilise les propriétés sur les quotients de fonctions dérivables.

□

(7) Les fonctions de trigonométrie hyperbolique sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme ou quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)\ ,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \text{ et } \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x).$$

(8) les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, ou de trigonométrie hyperbolique sont dérivables en tout point de leur intervalle de définition, sauf aux bornes de l'intervalle, et on a :

$$\begin{array}{lll} \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \end{array}$$

4.6. Extrema, TAF, Rolle. Comme indiqué dans l'introduction, la dérivée en un point peut donner une idée du comportement local de la fonction autour de ce point. On a en particulier le théorème suivant.

***Théorème* 4.12.** — *Si $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ et $f'(x_0) > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$f(x) > f(x_0) \text{ pour tout } x \text{ tel que } x_0 < x < x_0 + \delta,$$

$$f(x) < f(x_0) \text{ pour tout } x \text{ tel que } x_0 - \delta < x < x_0.$$

En particulier si la fonction atteint un maximum local (ou un minimum local) en x_0, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. La fonction $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ étant dérivable en x_0, il existe une fonction $\varphi\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ continue en x_0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

Si $f'(x_0) > 0$, alors $\varphi(x_0) > 0$; et par continuité de φ, il existe donc $\delta > 0$ pour lequel $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et les inégalités de l'énoncé suivent sans difficultés.
Si f atteint un maximum en x_0, alors nous avons $f(x) \leqslant f(x_0)$ de part et d'autre de x_0. Ceci n'est possible que si $f'(x_0) = 0$ d'après ce que l'on vient d'établir. □

On rappelle que si une fonction est continue sur un segment, elle vérifie le principe du maximum : elle est bornée et atteint ses bornes. En combinant ceci avec le théorème précédent, on en déduit le théorème de Rolle.

***Théorème* 4.13.** — **Théorème de Rolle** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le principe du maximum, f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$: plus précisément, il existe $u, U \in [a,b]$ tels que

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(U) \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

Deux cas sont alors possibles :

- ◇ Si $f(u) = f(U)$, alors f est constante et par suite sa dérivée est identiquement nulle ;
- ◇ Si $f(u) < f(U)$, alors une des deux valeurs au moins est différente de $f(a) = f(b)$. Sans perte de généralité supposons qu'il s'agisse de $f(U)$, alors $f'(U) = 0$ d'après le théorème traitant des extrema ci-dessus.

□

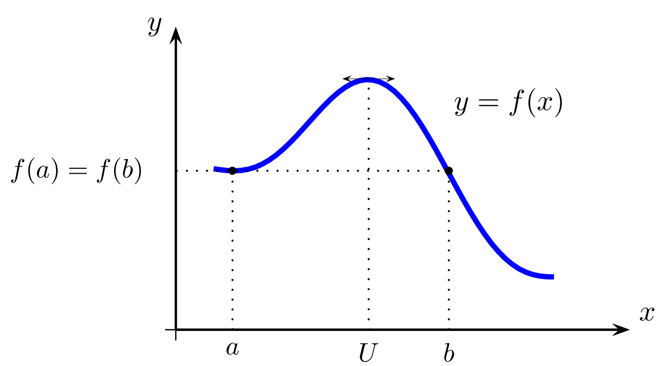


FIGURE 28. Illustration du théorème de Rolle

Du théorème de Rolle, on déduit le théorème des accroissements finis, qui permet d'utiliser les informations sur la dérivée pour donner des informations globales sur le comportement de la fonction f.

***Théorème* 4.14.** — **Théorème des accroissements finis (Lagrange)** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est de retrancher à $f(x)$ l'équation de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, qui a pour pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, puis d'appliquer le théorème de Rolle.

Définissons donc
$$\varphi\colon x \mapsto f(x) - \left(f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right).$$
Observons que φ est dérivable et que
$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$
De plus
$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$, autrement dit ξ vérifie :
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
□

Remarque* 4.15.** — Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont ***faux pour des fonctions à valeurs complexes, ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel.
Par exemple, la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{2\mathbf{i}\pi t}$ est continue sur $[0,1]$ (son image $f([0,1]) = \mathbb{S}^1$ est le cercle unité), dérivable sur $]0,1[$ (et sa dérivée est $f'(t) = 2\mathbf{i}\pi e^{2\mathbf{i}\pi t}$) et vérifie $f(0) = 1 = f(1)$. Toutefois sa dérivée $f'(t) = 2\mathbf{i}\pi e^{2\mathbf{i}\pi t}$ *ne s'annule pas* sur $[0,1]$.

Les assertions suivantes sont des conséquences immédiates du théorème des accroissements finis.

***Corollaire* 4.16.** — *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $f'(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors f est constante.*

***Corollaire* 4.17.** — *Soient $f,\ g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, dérivables sur $]a,b[$. Si $f'(\xi) = g'(\xi)$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors $f(x) = g(x) + C$, pour tout $x \in [a,b]$, avec C constante.*

***Corollaire* 4.18.** — *Inégalité des accroissements finis*
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $|f'(\xi)| \leqslant M$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors
$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'| \text{ pour tous } x, x' \in [a,b].$$

4.7. Dérivée et monotonie, tableau de variations. Le théorème des accroissements finis entraîne également, de manière immédiate, le corollaire suivant, qui permet de relier la monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée.

***Corollaire* 4.19.** — *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors on a*
- ◇ *Si $f'(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors f est strictement croissante.*
- ◇ *Si $f'(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors f est strictement décroissante.*

Ceci permet l'utilisation du tableau de variations dans l'étude d'une fonction définie sur un intervalle. Le tableau de variations d'une fonction dérivable est un tableau construit de la manière suivante.

- ◇ Sur la première ligne, on note dans la première colonne la variable dont dépend la fonction.
  On indique ensuite le domaine de définition en faisant apparaître autant de colonnes

qu'il y a d'intervalles dans le domaine de définition de la fonction, en écrivant les intervalles dans l'ordre croissant de leur bornes.

- ◇ Sur la deuxième ligne, on indique le signe de la fonction $f'(x)$ dans chaque colonne. On divise les colonnes précédentes en autant de sous-colonnes qu'il y a de changements de signes de la dérivée dans chaque intervalle, et on indique le signe de la dérivée dans chacune de ces sous-colonnes (et on indique 0 aux endroits où f' s'annule)
- ◇ Sur la troisième ligne : on porte dans chaque colonne une flèche indiquant le sens de variation de la fonction f une flèche orientée vers le haut indique que le signe de la dérivée est positif (et donc que la fonction est croissante) sur l'intervalle considéré, une flèche orientée vers le bas indique que le signe de la dérivée est négatif (et donc que la fonction est décroissante) sur l'intervalle considéré.
- ◇ On complète le tableau de variations en faisant apparaître sur le trait de séparation entre chaque colonne la valeur (si elle est définie) ou la limite de la fonction en la borne de l'intervalle considéré.

Le tableau de variations est un outil précieux pour aider à représenter graphiquement l'allure du graphe d'une fonction.

***Exemple* 4.20.** — Étudions la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

- ◇ Domaine de définition.
  La fonction ln n'est pas définie pour $x \leq 0$,et la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0, le domaine de définition de la fonction f est donc, a priori, $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. Par les règles de composition, de multiplication, d'addition et de division sur les fonctions dérivables, on sait que la fonction f est dérivable (et donc continue) sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.
- ◇ Etude de la limite au voisinage du point 0.
  Par les règles de composition et de multiplication de fonctions dérivables, on sait que la fonction $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x+1)+1$. Elle l'est en particulier en 0 et sa dérivée en 0 vaut $g'(0) = 1$. Or, par définition, la dérivée de cette fonction en 0 est la limite en 0 du quotient $\frac{g(x)-g(0)}{x}$.
  Puisque $g(0) = 0$, on obtient que $1 = g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
  Ceci montre que la fonction f est prolongeable par continuité, par la valeur 1, au point $x = 0$.
- ◇ Etude de la limite au voisinage du point -1.
  Posons $u = x+1$. Etudier la limite de f en $x = -1^+$ revient à étudier la limite de $h(u) = \frac{u\ln(u)}{u-1}$ lorsque u tend vers 0^+. Le dénominateur tend vers -1, tandis que le numérateur $u\ln(u)$ tend vers 0 en vertu des règles de croissance comparée. On obtient donc que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$. Ceci montre que la fonction f est prolongeable par continuité, par la valeur 0, au point $x = -1$.
- ◇ Etude de la dérivée et de son signe
  On sait que sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, la fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par :
  $$f'(x) = \frac{-(x+1)\ln(x+1) + x(\ln(x+1)+1)}{x^2} = \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}.$$
  Appelons n la fonction $n(x) = x - \ln(x+1)$. La fonction $f'(x)$ est du même signe que $n(x)$. Pour connaitre le signe de cette fonction, nous allons la dériver (elle est dérivable

sur $]-1,+\infty[$) . On a $n'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Dressons le tableau de variation de la fonction $n(x)$. Etudions le signe de $n'(x)$.

— Si $-1 < x < 0$, alors $n'(x) < 0$.

— Si $x > 0$, alors $n'(x) > 0$.

Etudions les limites et les valeurs particulières de $n(x)$.

— Si $x \to -1^+$ alors $n(x) \to +\infty$ car $\lim\limits_{u \to 0^+} \ln(u) = -\infty$.

— Si $x \to +\infty$ alors $n(x) \to +\infty$ car $n(x) = x(1 - \frac{\ln(x+1)}{x})$ et que par les règles de croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

— Si $x = 0$, alors $n(0) = 0$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$n'(x)$		$-$	0	$+$	
$n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

◇ Tableau de variation de la fonction f.
On déduit de ce tableau que la fonction $f'(x)$ est toujours positive ou nulle sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, ce qui permet de dire que f est croissante sur cet intervalle.
Etudions la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$ $f(x) = (1 + \frac{1}{x})\ln(x+1)$ donc à l'aide des règles sur les produits de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Pour compléter le tableau de variation, on peut s'interroger sur la dérivabilité de la fonction f au point 0. Pour ce faire, il faut étudier la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, soit encore $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2}$. Pour cela, nous utiliserons le fait que la fonction $\ln(x+1) - x$ est dérivable en 0 et dérivée nulle. Ainsi, on sait que $\ln(x+1) - x = xr(x)$ avec $r(x)$ une fonction continue qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Appelons $g(x)$ la fonction $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2}$. On sait que $g(x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et de dérivée $\ln(x+1) - x$. Utilisons l'inégalité des accroissements finis, appliquée à cette fonction g. Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| \leq \delta$, alors $|r(x)| < \varepsilon$. On a donc, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$ que

$$|g'(x)| \leq \varepsilon |x|.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0, x]$, on obtient

$$|g(x) - g(0)| = \left| (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} \right| \leq \varepsilon x^2,$$

ce qui montre que la fonction f est dérivable au point 0, de dérivée $\frac{1}{2}$.

On a finalement le tableau de variations suivant.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4.8. Applications de la dérivée : recherche d'extrema, calcul de limites. La dérivée peut-être naturellement utilisée pour la recherche des extrema d'une fonction dérivable. On appelle **points critiques** d'une fonction dérivable les points en lesquels la dérivée de la fonction s'annule. On a vu précédemment le théorème :

***Théorème* 4.21.** — **(Fermat)** *Si une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I admet un extremum local en un point $x_0 \in I$, alors x_0 est un point critique de f, c'est à dire que $f'(x_0) = 0$.*

Ainsi le calcul du tableau de variations d'une fonction permet de déterminer ses valeurs maximales et minimales, et les points où ces valeurs sont atteintes.

Une autre application du calcul de dérivées est de permettre le calcul de limites se présentant sous forme indéterminée comme un quotient quand on utilise les règles de calcul des limites : en interprétant la quantité à calculer comme un taux de variations, on en déduit que la limite de cette quantité est donnée par la dérivée d'une certaine fonction en un point.

***Exemple* 4.22.** — On souhaite calculer la limite de la fonction $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$ en 0. En utilisant les règles sur les limites on voit que le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0 lorsque x tend vers 0, ce qui indique que la limite du quotient ne peut pas se déduire simplement des limites du numérateur et du dénominateur : il s'agit d'une forme indéterminée. En notant $f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$ la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, on voit que $g(x)$ s'écrit comme $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et apparait donc naturellement comme le taux de variation de la fonction f au point 0. Or, comme composée de la fonction puissance $h\colon u \mapsto u^{\frac{1}{3}}$ et de la fonction affine $u\colon x \mapsto 1+2x$, on sait que la fonction $f = h \circ u$ est dérivable en 0 et de dérivée

$$f'(0) = h'(u(0)) \times u'(0) = \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} \times 2 = \frac{2}{3} = \lim_{x\to 0} g(x).$$

On peut aller plus loin et utiliser les théorèmes suivants :

***Théorème* 4.23.** — **(Bernoulli - L'Hospital)**
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Si

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$$

et si

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et est fini,}$$

alors

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et } \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DÉMONSTRATION. L'existence de la limite $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se traduit de la façon suivante. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| < \varepsilon \text{ pour tout } \xi \in]b-\alpha, b[.$$

Appliquons alors le théorème des accroissements finis : pour $(u, v) \in]b-\alpha, b[^2$ il existe ξ entre u et v tel que

$$\left|\frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre v vers b (à gauche) et puisque $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$, il vient :

$$\left|\frac{f(u)}{g(u)} - \ell\right| < \varepsilon \text{ pour tout } u \in]b-\alpha, b[.$$

□

***Théorème* 4.24. — (Bernoulli - L'Hospital)**
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Si

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$$

et si

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et est fini,}$$

alors

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et } \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Remarque* 4.25.** — Les théorèmes sont évidemment vrais pour la limite à droite quand x tend vers a. Les théorèmes précédents restent vrais pour $b = +\infty$ en modifiant un peu la démonstration. Les conclusions sont également vraies si la limite $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ est infinie.

***Exemples* 4.26.** —

- ◇ Considérons le quotient $x \mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ pour $a > 0$ lorsque x tend vers 0^+ nous avons une forme indéterminée, mais il vient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{a x^{a-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \\ 0 & \text{si} \quad a < 1 \end{cases}$$

- ◇ Pour $a > 0$, considérons le quotient $x \mapsto \frac{\ln x}{x^a}$ lorsque x tend vers l'infini nous avons une forme indéterminée, mais il vient :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

◇ Pour $a > 0$, considérons le quotient $x \mapsto \frac{e^{ax}}{x^n}$ lorsque x tend vers l'infini nous avons une forme indéterminée, mais il vient en appliquant de façon itérée la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{ae^{ax}}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{a^n e^{ax}}{n!} = \infty.$$

5. Fonctions exponentielles

Une **équation différentielle** du premier ordre est une équation de la forme

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pour } x \in I$$

avec f une fonction de deux variables réelles et I un intervalle dans $\mathbb{R}$.
L'inconnue dans cette équation est la fonction dérivable y dont les dérivées vérifient en tout point $x \in I$ l'équation précédente. Sous des hypothèses très larges sur la fonction f, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de caractériser l'existence et l'unicité des fonctions y solutions d'une telle équation.
Un cas très particulier de ce type d'équations est le cas des équations linéaires homogènes du premier ordre. Cela signifie simplement que la fonction f est de la forme $f(x, y(x)) = a(x)y(x)$ avec a une fonction continue en x.
On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation $y'(x) = \alpha y(x)$ lorsque α est une constante réelle et x parcourt $\mathbb{R}$.
Un cas très particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe au moins (en fait exactement) une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $y'(x) = \alpha y(x)$ et telle que $y(0) = \gamma$, où γ est une valeur réelle arbitraire.
La fonction exponentielle (de base e) est précisément définie comme « la » solution de l'équation $y' = y$ telle que $y(0) = 1$. Nous admettrons dans la suite l'existence de cette fonction, que l'on notera $\exp(x)$.
Remarque : Une définition alternative de la fonction exponentielle peut être donnée de la manière suivante : Pour tout nombre réel (ou complexe) x, on peut montrer que la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge. On définit alors $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ comme la limite de cette suite. On peut montrer dans ce cas que $\exp(0) = 1$ et que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable et solution de $y' = y$. Cela fournit un procédé concret de construction de la fonction exponentielle.

Propriétés de base de la fonction exponentielle.

(1) Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, α un nombre réel, et g la fonction définie par $g(x) = f(\alpha x)$. Montrer que g est dérivable et que $g'(x) = \alpha f'(\alpha x)$.
(2) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.
  (a) Montrer que h est dérivable, calculer sa dérivée, et montrer que h est une fonction constante.
  (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
  (c) Montrer que la fonction exponentielle est une fonction strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Unicité de la fonction exponentielle.

(3) On veut montrer l'unicité de la fonction exponentielle. Supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $y' = y$ et telle que $f(0) = 1$. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times \exp(-x)$. Montrer que h est dérivable et constante et égale à 1. En déduire que nécessairement, on a $f = \exp$

(4) On veut montrer que pour tous nombres réels α et β on a $\exp(\alpha+\beta) = \exp(\alpha)\exp(\beta)$. On considère pour cela la fonction $u(x) = \exp(\alpha + x)\exp(-\alpha)$.
  (a) Montrer que cette fonction est dérivable et solution de $y' = y$.
  (b) Calculer $u(0)$ et en déduire le résultat.

Calcul des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

(5) (a) Montrer que le nombre $e = \exp(1)$ vérifie $e > 1$.
  (b) Montrer que la suite e^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
  (c) En déduire que la fonction exp n'est pas bornée, puis que $\lim\limits_{+\infty} \exp(x) = +\infty$.
  (d) Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \exp(x) = 0^+$.
  (e) Dresser le tableau de variations de la fonction exp.

Fonction réciproque.

(6) (a) Montrer qu'il existe une unique fonction, notée $\ln\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $(\ln \circ \exp)(x) = x$ et pour tout $t > 0$, on ait $(\exp \circ \ln)(t) = t$.
  (b) Montrer que la fonction ln est continue et strictement croissante.
  (c) Montrer que la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
  (d) Calculer $\ln(1)$ et $\ln(e)$.
  (e) Montrer que pour tous $A > 0$ et $B > 0$, on a $\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$.
  (f) En déduire que pour tout $t > 0$, on a $\ln(\frac{1}{t}) = -\ln(t)$.
  (g) Calculer $\lim\limits_{0^+} \ln(t)$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln(t)$.
  (h) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

Fonctions puissance.

(7) On définit, pour tout nombre réel α, la fonction $f_\alpha\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$.
  (a) Montrer que pour tout α la fonction f_α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
  (b) Déterminer le tableau de variations de f_α en fonction du signe de α.
  (c) Montrer que si $\alpha \neq 0$, la fonction f_α est bijective et calculer sa bijection réciproque.
  (d) Montrer que si $\alpha = n$ est un entier positif ou nul, la fonction f_n peut se prolonger par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.
  (e) Montrer que si $\alpha = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel, on a, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = \sqrt[q]{x^p}$.
  (f) Montrer que si x est fixé, on a $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f_\alpha(x) = f_{\alpha_0}(x)$.
  On notera dorénavant $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Croissances comparées.

(8) Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On souhaite comprendre le comportement de $g_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{\exp(\alpha x)}{x^\beta}$ au voisinage de $+\infty$.
  (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} g_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.

On supposera désormais que $\beta > 0$, et on s'intéresse à la fonction
$g(x) = g_{-1,-1}(x) = x\exp(-x)$.

(b) Calculer $g'(x)$ et montrer que si $x > 1$, alors $g'(x) < 0$.

(c) En déduire que sur $]1, +\infty[$, g est décroissante et strictement positive.

(d) Montrer que g admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

(e) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(2x)}{g(x)} = 0$ et en déduire que $\ell = 0$.

(f) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_{1,1}(x) = +\infty$.

(g) En posant $t = \alpha x^\beta$, exprimer $g_{\alpha,\beta}(x)$ en fonction de $g_{1,1}(t)$.

(h) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.

(9) En posant $u = \ln(x)$, déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta}$ pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

(10) A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0.$$

Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

(11) Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = ay(x)$ est l'ensemble

$$S_\alpha = \{x \mapsto \lambda \exp(\alpha x) | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$