

Développements limités, 1

Exercice 1

Soient $a < b$ deux réels. Notons $I =]a, b[$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La fonction f a donc un développement limité en x_0 à l'ordre 1. Rappeler l'écriture du développement limité de f en x_0 à l'ordre 1.

1. En quels points la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$ est-elle dérivable ?
Donner le développement limité en $x_0 = 0$ de f à l'ordre 1.
Donner le développement limité en $x_0 = 5$ de f à l'ordre 1.
2. Donner le développement limité en $x_0 = 0$ de $\sin(x)$ à l'ordre 1.
Donner le développement limité en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ de $\sin(x)$ à l'ordre 1.
Donner le développement limité en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ de $\sin(x)$ à l'ordre 1.
3. Soit $g:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_0^x \ln(1+t) dt$.
Donner le développement limité en $x_0 = 0$ de g à l'ordre 1.
Donner le développement limité en $x_0 = 1$ de g à l'ordre 1.

Exercice 2

Soit $a < 0 < b$ deux réels. Notons $I =]a, b[$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que f admet pour développement limité en 0 à l'ordre 5

$$f(x) = -2x^2 + 3x^3 - 17x^5 + x^5\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1. Préciser $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Préciser le développement limité en 0 de f à l'ordre 2.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \neq 0$ vérifiant $-\alpha < x < \alpha$, $f(x)$ soit strictement négative et donc en particulier nulle.
3. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\exp(x) - \sin(x) - \cos(x)$. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \sin(x) - \cos(x)}{f(x)}.$$

4. Que dire du signe de $f(x) + 2x^2$ sur un intervalle de nombres réels $] -\beta, \beta[$ pour $\beta > 0$ réel assez petit ?

Exercice 3

1. Donner le développement limité de $\exp(x)$ en $x = 2$ à l'ordre 4. On donnera une solution qui utilise la formule de Taylor-Young et une autre qui utilise le développement limité de $\exp(x)$ en $x = 0$ et une propriété de la fonction exponentielle.
2. Donner le développement limité de $2x^3 - x^4$ en $x = 2$ à l'ordre 2.
3. Donner le développement limité de $\sin(x)$ en $x = \frac{\pi}{3}$ à l'ordre 4.

Exercice 4

Nous considérons

$$h:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2(1+x)^{1/3} - 2(1-x)^{1/3}.$$

1. Donner le développement limité de h en 0 d'ordre 2.
2. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2(1+x)^{1/3} - 2(1-x)^{1/3}}{x^2 + x^3}$$