Université d'Orléans — Département de Mathématiques
Année 2021-2022 — Analyse S2

Développements limités, compléments

Exercice 1

Montrer que le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)\sin(x)$ a pour partie régulière $x + \frac{x^3}{3}$.

Solution 1

Les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions cosinus hyperbolique et sinus sont

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3) \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3).$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)\sin(x)$ est obtenue en conservant les monômes de degré inférieur ou égal à 3 dans l'expression du produit des parties régulières de ces deux développements limités. On a

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12}.$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)\sin(x)$ est donc $x + \frac{x^3}{3}$.

Même si le monôme x^5 est présent lorsque le produit est explicité, on ne dispose pas pour autant du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction car d'autres termes faisant intervenir le monôme x^5 n'ont pas été pris en compte dès le départ dans les développements limités des fonctions cosinus hyperbolique et sinus.

Exercice 2

1. Montrer que le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente est

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

2. Montrer que le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique est

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

3. En déduire le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\tan(x)}{\operatorname{th}(x)}$.

Solution 2

1. Le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus par la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction cosinus, autrement dit en effectuant la division de P_1 par Q_1 où

$$P_1 = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \qquad Q_1 = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!}.$$

On obtient

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

2. Le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus hyperbolique par la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction cosinus hyperbolique, autrement dit en effectuant la division de P_2 par Q_2 où

$$P_2 = X + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \qquad\qquad Q_2 = 1 + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!}$$

On obtient
$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

3. Le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \frac{\tan(x)}{\mathrm{th}(x)}$ ne peut pas s'obtenir en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 du polynôme de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente par le polynôme de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique car celui-ci est de valuation non nulle (on appelle valuation de $P = \sum_{n=0}^{k} a_n X^n$ et on note $\mathrm{val}(P)$ le plus petit entier enturel n tel que $a_n \neq 0$, autrement dit $\mathrm{val}(P) = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq 0\}$). On commence par écrire

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{X + \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15}}{X - \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15}} = \frac{1 + \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15}}{1 - \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15}}$$

puis on effectue la division selon les puissances croissantes à l'ordre 4 (et non pas à l'ordre 5) de P_4 par Q_4 où

$$P_4 = 1 + \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15} \qquad\qquad Q_4 = 1 - \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15}$$

On obtient
$$\frac{\tan(x)}{\mathrm{th}(x)} = 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{9} + o_0(x^4).$$

On remarquera que la fonction $x \mapsto \frac{\tan(x)}{\mathrm{th}(x)}$ étant paire, la partie régulière de son développement limité ne possède que des monômes de degré pair. On peut ainsi écrire

$$\frac{\tan(x)}{\mathrm{th}(x)} = 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{9} + o_0(x^5)$$

ce qui constitue le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction étudiée.

Exercice 3

Déterminer l'expression du développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application $h\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ en utilisant la composition $h = g \circ f$ où

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 2x$$

et
$$g\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad y \mapsto -\frac{1}{1+y}.$$

Solution 3

Remarquons que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et que f est un polynôme de degré 2 donc qu'il constitue son propre développement limité d'ordre n en 0 pour tout entier n supérieur à 2. Par ailleurs le développement limité d'ordre 4 en 0 de g est
$$g(y) = -1 + y - y^2 + y^3 - y^4 + o_0(y^4).$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 4 en 0 de $g \circ f$ est obtenue en conservant les monômes de degré inférieur ou égal à 4 de la fonction polynomiale $Q \circ P$ où

$$P = 2X + X^2 \qquad\qquad Q = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4.$$

On a

$$\begin{aligned} Q \circ P &= -1 + \left(2X + X^2\right) - \left(2X + X^2\right)^2 + \left(2X + X^2\right)^3 - \left(2X + X^2\right)^4 \\ &= -1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 - 5X^4 - 26X^5 - 23X^6 - 8X^7 - X^8. \end{aligned}$$

On notera qu'il n'est pas utile d'écrire les monômes de degré supérieur strictement à 4 lorsqu'on effectue les différents calculs avec la formule du binôme de Newton. On déduit du calcul précédent que le développement limité d'ordre 4 en 0 de $g \circ f$ a pour partie régulière

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4.$$

Il ne faut surtout pas penser que le développement limité d'ordre 5 en 0 de $g \circ f$ a pour partie régulière

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 - 26x^5.$$

Le coefficient du monôme X^5 est erroné puisqu'il manque la contribution $(2X)^5$ issue du terme $(2X + X^2)^5$ que l'on devrait rajouter à notre calcul pour obtenir un développement limité d'ordre 5 en 0.

Exercice 4

1. Calculer le développement limité à l'odre $2p$ en 0 de l'application

$$\varphi \colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. En déduire l'expression du développement limité à l'ordre $2p+1$ en 0 de la fonction arccos.

Solution 4

1. Pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha-1)\frac{u^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{u^n}{n!} + \mathcal{O}_0(u^n).$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ on obtient

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{u^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{u^n}{n!} + \mathcal{O}_0(u^n).$$

Comme $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ on en déduit que

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{2n}}{n!} + \mathcal{O}_0(x^{2n}).$$

On a donc

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^4}{2!} - \ldots - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{2n}}{n!} + \mathcal{O}_0(x^{2n}).$$

2. La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\left(\arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Comme $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2\,3}\,x^3 - \frac{3}{2\,2\,2!\,5}\,x^5 - \frac{3\,5}{2\,2\,2\,3!\,7}\,x^7 - \ldots - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k!} = \frac{1\,3\,5\,\ldots(2k-1)}{2^k\,k!}$$

et

$$2^k\,k! = 2^k\big(\underbrace{1\,2\,3\,\ldots k}_{k \text{ termes}}\big) = 2\,4\,6\,\ldots 2k.$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\ldots\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k!} = \frac{1\,3\,5\,\ldots(2k-1)}{2\,4\,6\,\ldots 2k}$$

On en conclut que

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2\,3}\,x^3 - \frac{3}{2\,4\,5}\,x^5 - \frac{3\,5}{2\,4\,6\,7}x^5 - \ldots - \frac{1\,3\,5\,\ldots(2n-1)}{2\,4\,6\,\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}).$$

Exercice 5

Calculer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 6
2. $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4
3. $x \mapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2
5. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3
6. $x \mapsto \exp(\arcsin(x))$ à l'ordre 3
7. $x \mapsto x\big(\mathrm{ch}(x)\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4
8. $x \mapsto \mathrm{argth}(x)$ à l'ordre 3
9. $x \mapsto \big(1+\arctan(x)\big)^{x/\sin^2(x)}$ à l'ordre 2

Solution 5

1. On a les développements limités suivants en 0

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_0(x^6) \qquad\qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o_0(x^6)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + o_0(x^6)\\ &= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o_0(x^6)\end{aligned}$$

Le développement limité d'ordre 6 en 0 de l'application $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ est donné par

$$\varphi(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45}\right) + o_0(x^6).$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degré inférieur à 6 on obtient

$$\varphi(x) = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o_0(x^6).$$

2. On a les développements limités suivants en 0

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4)$$

Le développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ est donné par

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o_0(x^4).$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degré inférieur à 4 on obtient

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4).$$

3. On a le développement limité suivant en 0

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} &= (1+u)^{\frac{1}{2}}\\ &= 1 + \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{u^3}{3!} + o_0(u^3)\\ &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_0(u^3).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o_0(x^3)$$

La fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + 1$ est de degré 3 et est son propre développement limité d'ordre 3 en 0. Le développement limité d'ordre 3 en 0 de l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ est donné par

$$f(x) = (x^3+1)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right) + o_0(x^3)$$

En développant le produit et en ne retenant que les monômes de degrés inférieur à 3 on obtient

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o_0(x^3).$$

4. On a les développements limités suivants en 0

$$\sin(x) = x + o_0(x^2) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^2)$$

d'où

$$\sin(x) - 1 = -1 + x + o_0(x^2) \qquad \cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^2)$$

Comme $\lim_{x\to 0} \cos(x) + 1 = 2 \neq 0$ on obtient le développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ en effectuant la division selon les puissances croissantes de $-1 + X$ par $2 - \frac{X^2}{2}$ à l'ordre 2.

$$
\begin{array}{r|l}
f = 1+x & g = 1+x^2 \\
g = 1+x^2 & \hline 1+x-x^2 \\
\hline
f - 1.g = x - x^2 & \\
x.g = x + x^3 & \\
\hline
f - 1.g - x.g = -x^2 - x^3 & \\
-x^2.g = -x^2 - x^4 & \\
\hline
f - g - xg - (-x^2)g = -x^3 + x^4 &
\end{array}
$$

$$f = (1+x-x^2)\,g - x^3 + x^4$$

$$f = (1+x-x^2)\,g + x^3(-1+x)$$

$$\text{i.e.} \quad (1+x) = \underbrace{(1+x-x^2)}_{\text{de degré} \leq 2}(1+x^2) + \underbrace{x^3(-1+x)}_{\text{de valuation} \geq 3}$$

On en conclut que le développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ est

$$\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_0(x^2).$$

5. On a les développements limités suivants en 0

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$$

Comme $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$, il n'est pas possible d'obtenir le développement limité de $\varphi\colon x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ en effectuant une division selon les puissances croissantes. Considérons les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions au numérateur et dénominateur de la fonction définissant φ.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}_0(x^4) \qquad\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}_0(x^4).$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}_0(x^4)}{x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}_0(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \mathcal{O}_0(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}_0(x^3)}.$$

On obtient le développement limité d'ordre 3 en 0 de φ en effectuant la division selon les puissances croissantes de $1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} - \frac{X^3}{4}$ par $1 - \frac{X^2}{6}$ à l'ordre 3.

$$\begin{array}{l|l}
f = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} & g = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \\
xg = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\
\hline
f - xg = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{3 \cdot 4!} & \\
\hline
f - xg = \frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{3 \cdot 4!} & \\
\frac{2}{15} x^5 - \frac{x^7}{15!} + \frac{2x^9}{15 \cdot 4!} & \\
\hline
\frac{19}{360} x^7 - \frac{2}{15 \cdot 4!} x^9 &
\end{array}$$

Ainsi

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5\right)}_{\text{quotient de la division}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + x^6 \underbrace{\left(\frac{19}{360} x - \frac{2}{15 \cdot 4!} x^3\right)}_{\text{reste de la division d'ordre 5}}$$

On en conclut que le développement limité d'ordre 3 en 0 de φ est

$$\varphi(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).$$

6. Commençons par déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction arcsinus. Pour $x \in]-1, 1[$ on a

$$\big(\arcsin(x)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus, du développement limité suivant au voisinage de 0

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + o_0(u),$$

on déduit que

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + o_0(u)$$

puis que

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$$

Comme $\arcsin(0) = 0$ on obtient

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$

Par ailleurs, on a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o_0(u^3).$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin(x) = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\exp\big(\arcsin(x)\big) &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 + o_0(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).
\end{aligned}$$

7. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\varphi(x) = x\mathrm{ch}(x)^{\frac{1}{x}} = x \exp\left(\frac{\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)}{x}\right).$$

On peut remarquer le terme x intervenant en produit dans l'expression de φ. Pour obtenir le développement limité d'ordre 4 en 0 de φ, on peut donc se contenter de calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}\right)$. Pour se faire on a besoin du développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)$ et non du développement limité d'ordre 3 en 0 en raison du terme $\frac{1}{x}$.

On a les développements limités suivants au voisinage de 0

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^4)$$

et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o_0(u^4)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big) &= \ln\big(1 + (\mathrm{ch}(x) - 1)\big) \\
&= \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4 + o_0(x^4) \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o_0(x^4)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o_0(x^3).$$

On a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o_0(u^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{\ln\left(\operatorname{ch}(x)\right)}{x}\right) &= 1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)^3+o_0(x^3)\\ &= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o_0(x^3).\end{aligned}$$

Finalement le développement limité d'ordre 4 en 0 de φ est

$$\varphi(x) = x\exp\left(\frac{\ln\left(\operatorname{ch}(x)\right)}{x}\right) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+o_0(x^4)$$

8. La dérivée de la fonction argument tangente hyperbolique est $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$. On a le développement limité d'ordre 2 en 0 suivant :

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+o_0(u^2)$$

d'où on déduit que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+o_0(x^2).$$

Comme la fonction argument tangente hyperbolique prend la valeur 0 en 0 on a

$$\operatorname{argth}(x) = x+\frac{x^3}{3}+o_0(x^3).$$

9. On a

$$\varphi(x) = \left(1+\arctan(x)\right)^{\frac{x}{\sin^2(x)}} = \exp\left(\frac{x\ln\left(1+\arctan(x)\right)}{\sin^2(x)}\right).$$

Commençons par déterminer un développement limité au voisinage de 0 pour la fonction arctangente. On a

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+o_0(u)$$

d'où

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+o_0(x^2).$$

Comme $\arctan(0)=0$ on obtient

$$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+o_0(x^3).$$

On a le développement limité suivant au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o_0(u^3).$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\arctan(x)=0$ on obtient

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\arctan(x)\right) &= x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^3)\end{aligned}$$

On a

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+o_0(x^4)$$

d'où

$$\sin^2(x) = x^2-\frac{x^4}{3}+o_0(x^4).$$

On en déduit que
$$\frac{x\ln\big(1+\arctan(x)\big)}{\sin^2(x)}=\frac{x^2-\frac{x^3}{2}+\mathcal{O}_0(x^4)}{x^2-\frac{x^4}{3}+\mathcal{O}_0(x^4)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\mathcal{O}_0(x^2)}{1-\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}_0(x^2)}$$
De plus
$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+\mathcal{O}_0(u^2)$$
d'où
$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}_0(x^2)}=1+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}_0(x^2)$$
et
$$\frac{x\ln\big(1+\arctan(x)\big)}{\sin^2(x)}=\left(1-\frac{x}{2}+\mathcal{O}_0(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}_0(x^2)\right)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}_0(x^2)$$
Enfin on a le développement limité suivant au voisinage de 0
$$\mathrm{e}^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\mathcal{O}_0(u^2)$$
mais, comme $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{\ln\big(1+\arctan(x)\big)}{\sin^2(x)}=1$ l'étape suivante est indispensable
$$\varphi(x)=\exp\left(\frac{x\ln\big(1+\arctan(x)\big)}{\sin^2(x)}\right)=e\,\exp\left(\frac{x\ln\big(1+\arctan(x)\big)}{\sin^2(x)}-1\right).$$
On obtient finalement
$$\begin{aligned}\varphi(x)&=e\,\exp\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}_0(x^2)\right)\\&=e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+\mathcal{O}_0(x^2)\right)\\&=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}\right)+\mathcal{O}_0(x^2)\\&=e-\frac{ex}{2}+\frac{11ex^2}{24}+\mathcal{O}_0(x^2)\end{aligned}$$

Exercice 6

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{6}$ de $x\mapsto\cos^2(2x)$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $x\mapsto\frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Solution 6

1. Soit $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos^2(2x)$. Considérons au voisinage de 0 la fonction φ_0 définie par $\varphi_0(t)=\varphi\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$. On a
$$\varphi_0(t)=\left(\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\right)^2=\left(\frac{\cos(2t)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)\right)^2.$$
Les développements limités en 0 à l'ordre 4 de sinus et cosinus sont
$$\sin(u)=u-\frac{u^3}{3!}+\mathcal{O}_0(u^4)\qquad\qquad\cos(u)=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\mathcal{O}_0(u^4)$$
On en déduit, en effectuant la substitution $u=2t$ et en sommant les deux développements limités que
$$\frac{\cos(2t)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)=\frac{1}{2}-\sqrt{3}t-t^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}t^3+\frac{t^4}{3}+\mathcal{O}_0(t^4).$$
Finalement

On en déduit que le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ de la fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos^2(2x)$ est

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

2. Soient $\varphi\colon x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ et f_0 la fonction définie pour t au voisinage de 0 par $\varphi_0(t) = \varphi(1+t)$. On a

$$\varphi_0(t) = \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2 - 1} = \frac{\ln(1+t)}{t(t+2)}.$$

Compte tenu du fait que nous allons être amené à diviser par t, considérons le développement limié à l'ordre 3 suivant en 0

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3).$$

On a donc

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o_0(t^2)$$

Par ailleurs, pour tout $t \in]-2, +\infty[$ on a

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{t}{2}}$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 en 0

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o_0(u^2)$$

on obtient

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + o_0(t^2).$$

Le développement limité à l'ordre 2 de φ_0 en 0 est donc

$$\varphi_0(t) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8}\right) + o_0(t^2) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{5t^2}{12} + o_0(t^2).$$

Finalement le développement limité à l'ordre 2 de φ en 1 est

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{12}(x-1)^2 + o_1\big((x-1)^2\big).$$

Exercice 7

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 et $x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$.

Solution 7

Pour calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\varphi\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ on ne peut pas procéder de la même manière que pour celui de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$. Pour mener à bien ce calcul on remarque

$$\exp\big(\cos(x)\big) = \mathrm{e}\,\exp\big(\cos(x) - 1\big),$$

que la fonction $\psi\colon x \mapsto \cos(x) - 1$ a pour limite 0 en 0 et a pour développement limité d'ordre 4 en 0

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^4).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos(x)-1} &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4 + o_0(x^4) \\
&= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o_0(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\varphi\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ est

$$\mathrm{e}^{\cos(x)} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{\cos(x)-1} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}x^4}{6} + \mathcal{O}_0(x^4).$$

Comme la fonction φ est paire, la partie régulière de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degré pair. On a donc sans calcul supplémentaire le développement limité d'ordre 5 en 0 de φ

$$\mathrm{e}^{\cos(x)} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}x^4}{6} + \mathcal{O}_0(x^5).$$

Exercice 8 Donner le développement limité des fonctions suivantes au voisinage de 0 à l'ordre 1 :

1. $\exp(x)$
2. $\sin(x)$
3. $\cos(x)$
4. $\tan(x)$
5. $\ln(1+x)$
6. $\sqrt{1+x}$
7. $\dfrac{1}{1+x}$

Solution 8

1. $\exp(x) = 1 + x + \mathcal{O}_0(x)$
2. $\sin(x) = x + \mathcal{O}_0(x)$
3. $\cos(x) = 1 + \mathcal{O}_0(x)$
4. $\tan(x) = x + \mathcal{O}_0(x)$
5. $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}_0(x)$
6. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \mathcal{O}_0(x)$
7. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \mathcal{O}_0(x)$

Exercice 9

Donner le développement limité des fonctions suivantes au voisinage de 0 à l'ordre 1 :

1. $\sqrt{4x+1}$
2. $\ln(1-x)$
3. $\dfrac{4x+1}{1-x}$
4. $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$
5. $\dfrac{\exp(x)}{\cos(x)}$

Solution 9

1. $\sqrt{4x+1} = 1 + 2x + \mathcal{O}_0(x)$,
2. $\ln(1-x) = -x + \mathcal{O}_0(x)$,
3. $\dfrac{4x+1}{1-x} = 1 + 5x + \mathcal{O}_0(x)$,
4. $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = -x + \mathcal{O}_0(x)$
5. $\dfrac{\exp(x)}{\cos(x)} = 1 + x + \mathcal{O}_0(x)$

Exercice 10

Écrire le développement limité de

1. $\varphi(x) = \exp(x)$ à l'ordre n en 1
2. $\varphi(x) = \sin(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
3. $\varphi(x) = \ln(1+3x)$ à l'ordre 3 en 1
4. $\cos(x)\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0

Solution 10

1. On pose $h = x - 1$. Si x est proche de 0, alors h est proche de 0. Nous allons nous ramener à un développement limité de $\exp h$ en $h = 0$.

$$\begin{aligned}
\exp x &= \exp(1 + (x-1)) \\
&= \exp(1)\exp(x-1) \\
&= \exp(1)\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \ldots + \frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h)\right) \\
&= \exp(1)\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\varepsilon((x-1))\right) \\
&= \exp(1)\left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\varepsilon((x-1))\right)
\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

2. Sachant que $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ on se ramène au développement limité de $\cos h$ lorsque $h = x - \frac{\pi}{2}$ tend vers 0. On a donc

$$\sin x = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

où $\lim_{x\to\pi/2} \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. Il faut se ramener à un développement limité du type $\ln(1+h)$ en $h = 0$. On pose $h = x - 1$ et donc $x = 1 + h$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \ln(1+3x) \\
&= \ln(4+3h) \\
&= \ln\left(4\left(1 + \frac{3h}{4}\right)\right) \\
&= \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{3h}{4}\right) \\
&= \ln(4) + \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^3 + h^3\varepsilon(h) \\
&= \ln(4) + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3(x-1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3(x-1)}{4}\right)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x-1)
\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

4. D'une part

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$$

d'autre part

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice 11

Calculer le développement limité de

1. $\varphi(x) = \sin(\ln(1+x))$ à l'ordre 3 en 0
2. $\varphi(x) = \sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\tan(x)$à l'ordre 5 en 0
4. $\dfrac{1+x}{2+x}$ à l'ordre 4 en 0

Solution 11

1. On pose ici $f(u)=\sin u$ et $g(x)=\ln(1+x)$. On a bien $f\circ g(x)=\varphi(x)$ et $g(0)=0$.
   Le développement limité à l'ordre 3 de f pour u proche de 0 est : $f(u)=\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+u^3\varepsilon_1(u)$.
   On pose $u=g(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)$ pour x proche de 0.
   On a $u^2=x^2-x^3+x^3\varepsilon_3(x)$ et $u^3=x^3+x^3\varepsilon_4(x)$.
   Par suite
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f\circ g(x)\\ &= f(u)\\ &= u-\frac{u^3}{3!}+u^3\varepsilon_1(u)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)-\frac{(x^3+x^3\varepsilon_4(x))^3}{3!}\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

2. Le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(u)=\sqrt{1+u}$ est $f(u)=\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\mathcal{O}_0(u^2)$. Si on pose $u(x)=\cos x-1$ alors on a $\varphi(x)=f(u(x))$ et $u(0)=0$. Le développement limité de $u(x)$ en 0 à l'ordre 4 est
$$u(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}_0(x^4)$$
   d'où $u^2(x)=\frac{x^4}{4}+\mathcal{O}_0(x^4)$. Ainsi
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(u)\\ &= 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\mathcal{O}_0(u^2)\\ &= 1+\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}{2}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2}{8}+\mathcal{O}_0(x^4)\\ &= 1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+\mathcal{O}_0(x^4)\end{aligned}$$

3. Tout d'abord $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)$. D'autre part $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)=1+u$ en posant $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)$. Nous aurons besoin de u^2 et u^3 :
$$\begin{aligned}u^2 &= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right)^2\\ &= \frac{x^4}{4}+x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$
   et $u^3=x^5\varepsilon(x)$. Ainsi
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+u^3\varepsilon(u)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+x^5\varepsilon(x)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$
   Finalement
$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x)\frac{1}{\cos x}\\ &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right)\\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o_0(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+o_O(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 12

Écrire le développement limité de

1. $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\arctan(x)$ à l'ordre n en 0
3. $\arcsin(x)$ à l'ordre 5 en 0
4. $\varphi(x)=\dfrac{2+x+2x^3}{1+x^2}$ à l'ordre 2 en 0

Solution 12

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} &= \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o_0(x^5)}{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o_0(x^5)} \\
&= \frac{x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o_0(x^4)\right)}{x\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o_0(x^4)\right)} \\
&= \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o_0(x^4)\right)\frac{1}{1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o_0(x^4)} \\
&= \dots \\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{18}+o_0(x^4)
\end{aligned}$$

2. On sait que $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. En posant $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $F(x)=\arctan(x)$ on écrit

$$F'(x)=f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+x^{2n}\varepsilon(x)$$

Et comme $\arctan(0)=0$

$$\arctan(x)=\sum\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\
&= 1-\frac{(-x^2)}{2}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-x^2)^2+x^4\varepsilon(x) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+x^5\varepsilon(x)$$

4. On pose $C(x)=2+x+2x^3$ et $D(x)=1+x^2$. Alors

$$C(x)=D(x)(2+x-2x^2)+x^3(1+2x).$$

Par suite $\varphi(x)=2+x-2x^2+x^2\varepsilon(x)$.

Exercice 13

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{\sin^2(x)}{2}}{3x^2\sin(x)^2}$.

Solution 13

Posons $\varphi(x) = \ln(1+x) - \tan x + \frac{\sin^2(x)}{2}$ et $\psi(x) = 3x^2\sin(x)^2$.
D'une part $\psi(x) = 3x^2\sin(x)^2 = 3x^2\left(x + \mathcal{O}_0(x)\right) = 3x^4 + \mathcal{O}_0(x^4)$.
D'autre part

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}_0(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}_0(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}_0(x^3)\right)^2 \\ &= -\frac{5x^4}{12} + \mathcal{O}_0(x^4)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{-\frac{5x^4}{12} + \mathcal{O}_0(x^4)}{3x^4 + \mathcal{O}_0(x^4)} = \frac{-\frac{5}{12} + \mathcal{O}_0(1)}{3 + \mathcal{O}_0(1)}$$

Finalement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{\sin^2(x)}{2}}{3x^2\sin(x)^2} = -\dfrac{5}{36}$.

Exercice 14

Soit $\varphi(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
Déterminons la tangente en $\frac{1}{2}$ du graphe de φ et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.

Solution 14

On a $\varphi'(x) = 4x^3 - 6x^2$ et $\varphi''(x) = 12x^2 - 12x$.
La formule de Taylor-Young assure que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\varphi''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\varepsilon(x) \\ &= \frac{13}{16} - \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

La tangente en $\frac{1}{2}$ a donc pour équation : $y = \frac{13}{16} - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ et le graphe de φ est situé en dessous de la tangente car

$$\varphi(x) - y = \left(-\frac{3}{2} + \varepsilon(x)\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

est négatif lorsque x est proche de $\frac{1}{2}$.

Exercice 15 On se propose d'étudier la fonction $f\colon x \mapsto x\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité/imparité de f. Peut-on réduire l'ensemble sur lequel on va étudier la fonction ? Si oui préciser l'ensemble $\mathcal{D}$ sur lequel il suffit d'étudier la fonction, si non notons $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.
3. Donner le sous-ensemble maximal de $\mathcal{D}$ sur lequel la fonction est continue. La fonction f est-elle continue en 1 ? prolongeable par continuité en 1 ?
4. Donner le sous-ensemble maximal de f sur lequel la fonction est dérivable. Préciser la dérivée.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Y a-t-il une asymptote verticale à la représentation graphique de f ? Si oui préciser là.
7. La droite d'équation $y = x$ est-elle asymptote à la représentation graphique de f au voisinage de $+\infty$? Si oui, préciser la position de la courbe par rapport à $y = x$ et les points d'intersection de la représentation graphique de f et $y = x$.
8. Donner les points d'inflexion de f.

9. Donner une représentation graphique de f.

Solution 15

1. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, f est définie pour tout réel x tel que $1-x^2 \neq 0$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
2. La fonction f est impaire. On l'étudiera donc sur $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.
3. La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ car la fonction rationnelle

$$g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

est continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1. Elle est toutefois prolongeable par continuité à droite en 1 en posant $f(1) = 0$.
4. La fonction rationnelle g est dérivable sur $\mathcal{D}$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a

$$f'(x) = \frac{x^4+1}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{e}^{1/(1-x^2)}.$$

5. Puisque la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives on en déduit que f' est strictement positive sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ et par conséquent que f est croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1+\infty$. Par ailleurs on $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f'(0) = \mathrm{e}.$$

Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $1-x^2$ tend vers 0 par valeurs supérieures et par suite $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{e}^{1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^2} = \lim_{u\to+\infty} u^2\,\mathrm{e}^u = +\infty.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$. Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures $1-x^2$ tend vers 0 par valeurs inférieures et ainsi $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x^2} = -\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{e}^{1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^2} = \lim_{u\to-\infty} u^2\,\mathrm{e}^u = 0.$$

et $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 0$. On obtient le tableau de variation suivant

x	0		1	1		$+\infty$
$f'(x)$	e	$+$	$+\infty$	0	$+$	0
$f(x)$			$+\infty$			$+\infty$
		$\nearrow$			$\nearrow$	
	0			0		

La représentation graphique de f au point d'abscisse 1 possède une demie tangente à droite horizontale.

6. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la représentation graphique de f. Recherchons une éventuelle asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ en cherchant un développement asymptotique pour f au voisinage de $+\infty$. Pour t au voisinage de 0^+, considérons la fonction f_0 définie par

$$f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right).$$

On a les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o_0(u^3) \qquad\qquad \frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + o_0(t^2)$$

d'où on déduit que $\frac{t^2}{t^2-1} = -t^2 + o_0(t^3)$ puis que

$$\exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) = 1 + (-t^2) + \frac{1}{2}(-t^2)^2 + \frac{1}{6}(-t^2)^3 + o_0(t^3) = 1 - t^2 + o_0(t^3).$$

On obtient le développement limité généralisé suivant pour f_0

$$f_0(t) = \frac{1}{t} - t + o_0(t^2)$$

ce qui indique que la fonction f admet pour développement asymptotique au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la représentation graphique de f au voisinage de $+\infty$. La quantité $-\frac{1}{x}$ étant négative au voisinage de $+\infty$ la courbe se situe au-dessous de l'asymptote.

7. Intéressons-nous aux points d'inflexion de f. Pour $x \in \mathcal{D}$ on a

$$f''(x) = -\frac{2x(x^4-3)}{(1-x^2)^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}.$$

Le signe de f'' dépend de celui de la fonction polynomiale $p\colon x \mapsto x(x^4-3)$. Cette fonction polynomiale est impaire. Il est évident que ses racines réelles positives sont 0 et $\sqrt[4]{3}$. Par ailleurs la fonction polynomiale $p'\colon x \mapsto 5x^4 - 3$ admet pour unique racine réelle positive $\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$. Remarquons que $\frac{3}{5} < 1 < 3$ et que la fonction racine quatrième est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} < 1 < \sqrt[4]{3}$. Le tableau de variation de p sur $[0, +\infty[$ est le suivant

x	0		$\sqrt[4]{3/5}$		$\sqrt[4]{3}$	$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$		
$p(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{12}{5}\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$	$\nearrow$		$+\infty$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		1		$\sqrt[4]{3}$		$+\infty$
$p(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

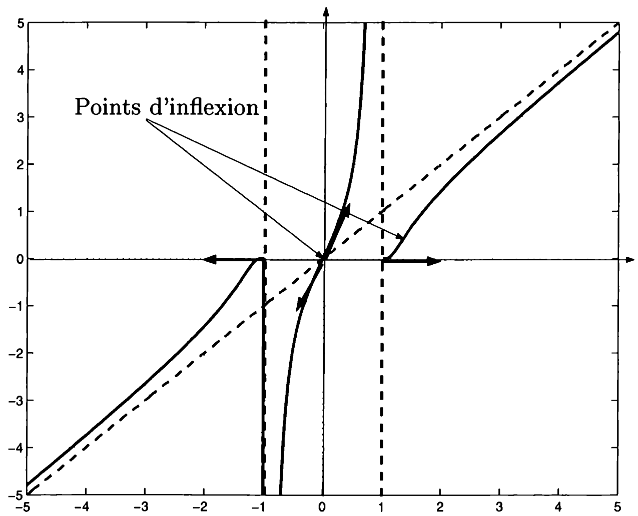
Ainsi, sur le domaine d'étude, la fonction f'' s'annule en 0 et $\sqrt[4]{3}$ en changeant de signe. Ces valeurs correspondent donc à des points d'inflexion de f. La fonction f est par conséquen convexe sur $[0, 1[$ et sur $]1, \sqrt[4]{3}[$ et concave sur $]\sqrt[4]{3}, +\infty[$.

8. Déterminons les points d'intersecion entre la représentation graphique de f et l'asymptote en $+\infty$ en résolvant l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}} = 1\right).$$

Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection entre la représentation graphique de f et l'asymptote en $+\infty$ qui est le point $(0,0)$ car l'équation $\frac{1}{1-x^2} = 0$ n'a pas de solution.

9. Représentaiton graphique de f



Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln(x)}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f_0 au voisinage de 1. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f_n au voisinage de 1 pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application f_n est dérivable en 1 et calculer $f_n'(1)$.
3. Donner l'équation de la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_n$ de f_n dans un repère orthonormé au point d'abscisse 1. Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_n$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1 dans un voisinage de ce point.

Solution 16

1. Pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$f_0(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

On considère le changement de variable $t = x - 1$ et la fonction g_0 définie par $g_0(t) = f_0(t+1)$. Pour x au voisinage de 1, la variable t est au voisinage de 0. On s'intéresse donc au développement limité au voisinage de 0 de

$$g_0(t) = \frac{\ln(t+1)}{t^2+2t} = \frac{1}{2t}\ln(t+1)\frac{1}{1+\frac{t}{2}}.$$

On a

$$\ln(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3) \qquad \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o_0(t^2)$$

d'où

$$\frac{1}{2t}\ln(t+1) = \frac{1}{2t}\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{6} + o_0(t^2).$$

et

$$g_0(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{6}\right)\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\right) + o_0(t^2) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{5t^2}{12} + o_0(t^2).$$

Ainsi f_0 admet pour développement limité d'ordre 2 au voisinage de 1

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{12}(x-1)^2 + o_1\big((x-1)^2\big).$$

La relation $f_n(x) = x^n f_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ va nous permettre d'obtenir le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_n à partir de celui calculé pour f_0. Il faut pour cela déterminer le développement limité d'ordre 2 en 1 de la fonction $x \mapsto x^n$. Une manière d'obtenir ce développement limité est d'avoir recours à la formule de Newton ; on a

$$\begin{aligned} x^n &= \big((x-1)+1\big)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1}(x-1) + \binom{n}{2}(x-1)^2 + o_1\big((x-1)^2\big) \\ &= 1 + n(x-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + o_1\big((x-1)^2\big). \end{aligned}$$

On en déduit que le développement limité d'ordre 2 en 1 de f_n est

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{2} + \frac{5(x-1)^2}{12}\right)\left(1 + n(x-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2\right) + o_1\big((x-1)^2\big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1) + \left(\frac{5}{12} - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4}\right)(x-1)^2 + o_1\big((x-1)^2\big). \end{aligned}$$

2. Une condition nécessaire et suffisante pour que f_n admette un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 est que f_n soit dérivable en ce point. Puisque f_n admet un développement limité à l'ordre 2, f_n est continue en 1 et elle est dérivable en 1. L'expression du développement limité d'ordre 2 en 1 de f_n indique que $f_n'(1) = \frac{(n-1)}{2}$.
3. L'équation de la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_n$ de f_n en 1 est

$$y = f_n(1) + f_n'(1)(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1).$$

La position de la courbe $\mathcal{C}_n$ par rapport à la tangente est donnée par le signe de

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1)\right).$$

D'après l'expression du développement limité à l'ordre 2 de f_n en 1, on a

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1)\right) = \left(\frac{5}{12} - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4}\right)(x-1)^2 + o_1\big((x-1)^2\big).$$

Pour x assez proche de 1, le signe de cette quantité est celui de

$$S_n = \left(\frac{5}{12} - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4}\right)(x-1)^2$$

c'est-à-dire, comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, celui de

$$T_n = \frac{5}{12} - \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3n}{4} + \frac{n^2}{4}.$$

Le polynôme $P = \frac{5}{12} - \frac{3X}{4} + \frac{X^2}{4}$ admet deux racines réelles qui sont

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6} \simeq 0.7362373842 \qquad\qquad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6} \simeq 2.263762616.$$

La fonction polynomiale P prend des valeurs négatives entre les deux racines car le monôme dominant qui est $\frac{X^2}{4}$ est positif. On en déduit que $T_0 = P(0) > 0$, que $T_1 = P(1) < 0$, que $T_2 = P(2) < 0$ et que pour $n \geqslant 3$ on a $T_n = P(n) > 0$. Les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_n$ pour $n \geqslant 3$ sont donc au dessus de leur asymptote en 1 alors que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont au dessous de leur asymptote.

Exercice 17

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 \text{arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}$? dérivable sur $\mathcal{D}$?
3. Donner le tableau de variation de f. (*Indication : on pourra étudier le signe de* $g(x) = \frac{f'(x)}{x}$).
4. La droite $y = x - 1$ est-elle asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$? Si oui peut-on préciser la position de $y = x - 1$ par rapport à la courbe ?

Solution 17

1. La fonction $f\colon x \mapsto x^2 \text{arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. La fonction f est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$.
3. Pour $x \in \mathcal{D}$ on a
$$f'(x) = x\left(2\text{arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{1+(1+x)^2}\right).$$
Le signe de f' dépend du signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$g(x) = 2\text{arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{1+(1+x)^2}.$$
Cette fonction est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a
$$g'(x) = -\frac{(2+x)^2+2}{\left(1+(1+x)^2\right)^2}$$
On en déduit le tableau de variation suivant pour g

x	$-\infty$		-1	-1		$+\infty$
g'		$-$			$-$	
g	0	$\searrow$	$1-\pi$	$1+\pi$	$\searrow$	0

ce qui permet d'obtenir le tableau de variation de la fonction f

x	$-\infty$		-1	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\pi/2-1$	$-\pi/2-1$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Afin d'étudier les branches infinies de f, calculons le développement limité généralisé de $g(x) = f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$. On considère au voisinage de 0 la fonction g_0 définie par
$$g_0(t) = \frac{f(1/t)}{1/t} = \frac{1}{t}\,\text{arctan}\left(\frac{1}{1+1/t}\right) = \frac{1}{t}\text{arctan}\left(\frac{t}{1+t}\right).$$
On a
$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} = t - t^2 + t^3 + o_0(t^3)$$
et
$$\text{arctan}(u) = u - \frac{u^3}{3} + o_0(u^3)$$
On en déduit que
$$g_0(t) = \frac{1}{t}\Big((t-t^2+t^3) - \frac{1}{3}(t-t^2+t^3)^3 + o_0(t^3)\Big) = 1 - t + \frac{2t^2}{3} + o_O(t^2)$$

puis que

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

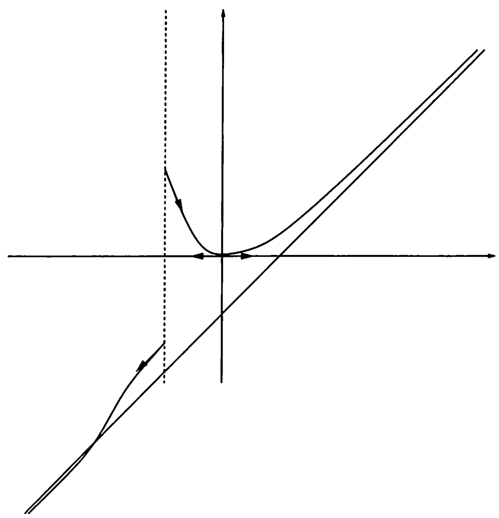
On a donc

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = x - 1$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$. Le même calcul indique que

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = x - 1$ est donc asymptote à la représentation graphique de f en $-\infty$ et la courbe est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous :



Exercice 18

Soit $f\colon x \mapsto \big(\cos(x)\big)^{1/x}$.

1. Sur quel ensemble $\mathcal{D}$ la fonction f est-elle définie ?
2. Vérifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée f'.
3. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note $\widetilde{f}$ le prolongement de f à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
5. Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Solution 18

1. La fonction f définie par
$$f(x) = \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x}\right)$$
est définie pour $x \neq 0$ tel que $\cos(x) > 0$ c'est-à-dire pour x appartenant à l'ensemble
$$\mathcal{D} = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\right)$$
2. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $]0, 1]$ et la fonction logarithme est dérivable sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. La fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est donc dérivable sur $\mathcal{D}$. De plus la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ donc la fonction $x \mapsto \frac{\ln(\cos(x))}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Enfin comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ on peut conclure que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a
$$f'(x) = \left(\frac{\ln(\cos(x))}{x}\right)' \exp\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x}\right) = -\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} + \frac{\tan(x)}{x}\right) f(x)$$

3. Le développement limité de f s'obtient en composant les développements limités de la manière suivante :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3) \qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$$

d'où

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o_0(x^3) \qquad \frac{\ln(\cos(x))}{x} = -\frac{x}{2} + o_0(x^2).$$

Or

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$$

donc

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o_0(x^2).$$

4. Le développement limité obtenu à la question précédente indique que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. D'autre part comme $\lim\limits_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x} = -\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$. Ainsi l'application

$$\widetilde{f} \colon x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue. On pourra remarquer que $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x} = +\infty$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$. L'application f n'est donc pas prolongeable par continuité à droite en $-\frac{\pi}{2}$.

5. Nous avons établi que f est dérivable sur $\mathcal{D}$. Par ailleurs nous avons déterminé le développement limité d'ordre 2 en 0 de f. Puisque f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 elle admet aussi un développement limité d'ordre 1 en 0. Cela implique que f, ou plus exactement le prolongement par continuité de f en 0, est dérivable en 0. L'expression du développement limité d'ordre 2 en 0 de f indique que $f'(0) = -\frac{1}{2}$. L'application f est donc dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\widetilde{f}' \colon x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \begin{cases} -\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} + \frac{\tan(x)}{x}\right) f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ revient à montrer que $\widetilde{f}'$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Notons $\mathcal{D}' = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction cosinus est continue sur $\mathcal{D}'$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$. La fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est donc continue sur $\mathcal{D}'$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathcal{D}'$ donc la fonction $x \mapsto \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ est continue sur $\mathcal{D}'$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathcal{D}'$. Par ailleurs la fonction tangente est continue sur $\mathcal{D}'$ et la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathcal{D}'$ et ne s'annule pas sur cet ensemble. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$ est continue sur $\mathcal{D}'$. Finalement comme f est elle même continue sur $\mathcal{D}'$, on en conclut que $\widetilde{f}'$ est continue sur $\mathcal{D}'$. Intéressons nous à présent à la continuité de $\widetilde{f}'$ en 0. On a d'une part

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \widetilde{f}'(x) = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x} + \frac{\tan(x)}{x}\right) f(x) = -\frac{1}{2} = \widetilde{f}'(0).$$

On en conclut que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 - x\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}$.

1. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\mathrm{sh}(x) > x$.
2. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de f. Que peut-on en déduire en 0 pour f ?
3. Donner le tableau de variation de f.
4. Montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
5. Montrer que $f(2)f(3) < 0$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]2, 3[$ tel que $f(c) = 0$ et que ce réel est le seul zéro de f sur $\mathbb{R}^+$, *i.e.* le seul réel positif à vérifier $f(c) = 0$.
6. Tracer la représentation graphique de f.

Solution 19

1. La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des accroissements finis [1]
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists\, c \in]0, x[\qquad \mathrm{sh}(x) = x\mathrm{ch}(c).$$
Comme la fonction cosinus hyperbolique est minorée strictement par 1 sur $\mathbb{R}^*$, on en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\mathrm{sh}(x) > x$.
2. On dispose des développements limités suivants
$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o_0(x^4) \qquad\qquad \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^5)$$
qui indiquent que que
$$\frac{x\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} = \frac{x^2 + \frac{x^4}{6} + o_0(x^5)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)} = \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^3)}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o_0(x^3)}.$$
En effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3 de $1 + \frac{X^2}{6}$ par $\frac{1}{2} + \frac{X^2}{24}$ on obtient le développement limité d'ordre 3 en 0 suivant pour f :
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^3).$$
Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}(x) = 1$ si et seulement si $x = 0$. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x) - 1$ ne s'annule qu'en 0 donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme f admet un développement limité d'ordre 3 en 0 elle admet aussi un développement limité d'ordre 1 en 0 et d'une part f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et d'autre part ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
3. On pourra noter que f est paire car la fonction sinus hyperbolique est impaire et la fonction cosinus hyperbolique est paire. On peut donc se contenter d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a
$$f'(x) = -\frac{\mathrm{sh}(x) - x}{\mathrm{ch}(x) - 1}.$$
La fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ car d'une part on a $\mathrm{sh}(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et d'autre part la fonction cosinus hyperbolique est minorée strictement par 1 sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs on a
$$\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \qquad\qquad \mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$$
d'où on déduit
$$\frac{x\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \underset{+\infty}{\sim} x \qquad\qquad \frac{\mathrm{sh}(x) - x}{\mathrm{ch}(x) - 1} \underset{+\infty}{\sim} 1.$$
Cela permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -1$.

   On a donc le tableau de variation suivant pour l'application f sur $\mathbb{R}^+$

1. Pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) supposée continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ vérifiant $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	-1
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. Pour montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$, montrons que $h(x) = f(x) - (-x + 3)$ admet pour limite 0 en $+\infty$. On a
$$h(x) = f(x) - (-x+3) = x\left(1 - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}\right) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{-x} - 1)}{1 + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}.$$
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.
Pour préciser la position de la représentation graphique de f par rapport à son asymptote en $+\infty$ étudions au voisinage de $+\infty$ le signe de
$$h(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{-x} - 1)}{1 + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}.$$
Au voisinage de $+\infty$ le numérateur est négatif, le dénominateur est positif, donc h est négatif. On en déduit que la représentation graphique de f est au voisinage de $+\infty$ sous l'asymptote.
5. On a
$$\begin{aligned} f(2)f(3) &= \left(3 - \frac{2\mathrm{sh}(2)}{\mathrm{ch}(2) - 1}\right)\left(3 - \frac{3\mathrm{sh}(3)}{\mathrm{ch}(3) - 1}\right) \\ &= \frac{3\big(3\mathrm{ch}(2) - 3 - 2\mathrm{sh}(2)\big)\big(\mathrm{ch}(3) - \mathrm{sh}(3) - 1\big)}{\big(\mathrm{ch}(2) - 1\big)\big(\mathrm{ch}(3) - 1\big)} \end{aligned}$$
Puisque la fonction cosinus hyperbolique est minorée par 1, le dénominateur est toujours positif. Par ailleus on a d'une part
$$\mathrm{ch}(3) - \mathrm{sh}(3) - 1 = \mathrm{e}^{-3} - 1 = \mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{0} < 0$$
car la fonction exponentielle est strictement croissante et $-3 < 0$ et d'autre part
$$3\mathrm{ch}(2) - 3 - 2\mathrm{sh}(2) = \frac{\mathrm{e}^2 + 5\mathrm{e}^{-2} - 6}{2}$$
car $\mathrm{e} > \frac{5}{2}$ d'où $\mathrm{e}^2 > \frac{25}{4} > \frac{24}{4} = 6$. On a donc bien $f(2)f(3) < 0$.
L'application f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Son image est $f(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 1[$. La restriction $f_{|\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, 1[$ est donc bijective. On en conclut que 0 admet un unique antécédent par f, autrement dit, qu'il existe un unique réel $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = 0$. Par ailleurs puisque $f(2)f(3) < 0$ le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $c \in]2, 3[$.
6. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous