Université d'Orléans
Année 2021-2022

Calcul intégral, 1

Exercice 1

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$f(x) = x^7 - \frac{1}{2}x + 2.$$

Donner les primitives de f et calculer $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

Exercice 2

Soient $a < b$ deux réels et $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Nous supposons que d'une part f admet sur $]a,b[$ une primitive et d'autre part que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que les primitives de f sur $]a,b[$ sont des fonctions croissantes sur $]a,b[$.
2. Quel est en fonction de la position de x, $y \in]a,b[$ le signe de $\in_x^y f(t)\,dt$?

Exercice 3

1. Montrer que pour tout x réel $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x+3)(x+1)^2 + 1$.
2. En déduire les primitives de

$$f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{(x+1)^2}$$

et

$$f\colon]-\infty,-1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{(x+1)^2}$$

Exercice 4

Sur chacun des intervalles où elle est définie donner une primitive de

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}$$

Exercice 5 [primitives de f et $f(ax+b)$]

1. Soit a un réel fixé. Rappeler les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions usuelles : $\exp(x)$, puis a^x et $\frac{1}{x^2+1}$. Rappeler les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction x^a.
2. À partir de ces primitives, donner les primitives des applications suivantes :

$$\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(x) = \exp(-2x-3),\\
&f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_2(x) = 7^{-2x-3},\\
&f_3\colon \left]-\frac{4}{3},+\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_3(x) = -\frac{5}{(3x+4)^2}\\
&f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_4(x) = \frac{1}{x^2+2}\\
&f_5\colon \left]-\infty,\frac{4}{3}\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_5(x) = \sqrt{3x-4}\\
&f_6\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_6(x) = -\frac{1}{3x^2+5}
\end{aligned}$$

Exercice 6 [intégration par parties]

Donner les primitives de

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto f(x)=(x^2-x+2)\exp(x),\\
&g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto g(x)=(2x-3)\exp(-5x+2),\\
&h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto h(x)=(5x-7)\sin(4x+1),\\
&m\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto m(x)=(\sin(x))^2,\\
&u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto u(x)=\sin(x)\exp(x),\\
&v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto v(x)=\cos(x)\exp(x).
\end{aligned}$$

Exercice 7

1. Soit $\alpha \neq -1$ un réel. Donner en fonction des valeurs de α les primitives de
$$f_\alpha\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto f_\alpha(x)=x^\alpha\ln(x).$$
2. Soit $\alpha \neq -1$ un réel. Donner en fonction des valeurs de α les primitives de
$$g_\alpha\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto g_\alpha(x)=x^\alpha(\ln(x))^2.$$

Exercice 8

Soit n un entier naturel. Posons $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier n non nul $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Exercice 9

Pour tout entier n posons
$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$
3. En déduire pour tout entier k les formules
$$I_{2k}=\pi\frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} \text{ et } I_{2k+1}=\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$