

Calcul intégral, 2

Exercice 1 [type $u'f(u)$, qui est u' ? qui est f ?]

1. Donner les primitives de

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(x) = \sin(x) (\cos(x))^{17}.$$

2. Donner les primitives de

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_2(x) = ((\sin(x))^2 - 3 \sin(x) + 8) \cos(x).$$

Donner la primitive F_2 de f_2 qui s'annule en $\frac{3\pi}{2}$.

3. Sur quels intervalles la fonction rationnelle $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ est-elle définie ? Déterminer alors

$$\int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+t-3} dt.$$

4. Donner les primitives de

$$f_3:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_3(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^{17}}.$$

5. Donner les primitives de

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_4(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x) + 17}}.$$

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

1. Pourquoi la fonction rationnelle $\frac{1}{1+x^n}$ est-elle définie pour $x > -1$? Donner alors les primitives de

$$f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^n}.$$

2. En déduire en fonction d'une primitive de $\ln(1+x^n)$ les primitives de

$$g:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

3. Considérons la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Montrer que $(I_n)_n$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

4. Établir ensuite que $nI_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

Exercice 3

Nous nous proposons de calculer $F(x) = \int \cos(\sqrt{t}) dt$ une primitive sur $]0, +\infty[$ de $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ en utilisant le changement de variables :

$$\psi:]0, +\infty[\quad t \mapsto u = \psi(t) = \sqrt{t}.$$

1. Préciser $g(u)$ quand $g(u) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{\psi'(t)}$ et $u = \sqrt{t}$.

2. Calculer une primitive de $g(u)$. Puis exprimer F à l'aide de cette primitive de g .

3. Retrouver ce résultat en remarquant que pour $x \in]0, +\infty[$ nous avons

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}).$$

Exercice 4

Nous nous proposons de calculer $F(x) = \int \frac{1}{2+\cos(t)} dt$ une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}$ sur $] -\pi, \pi[$ en utilisant le changement de variables

$$\psi:] -\pi, \pi[\rightarrow] -\infty, \infty[, \quad t \mapsto u = \psi(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

1. Expliquer pourquoi ψ est un "bon" changement de variables.
2. Montrer que pour $t \in] -\pi, \pi[$ et $u = \psi(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \psi'(t) = \frac{1}{2}(1+u^2).$$

3. Préciser $g(u)$ quand $g(u) = \frac{f(t)}{\psi'(t)}$ et $u = \psi(t)$.
4. Calculer une primitive de $g(u)$. Puis exprimer F à l'aide de cette primitive de g .

Exercice 5

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral de la fonction $\sin(x)$ en zéro à l'ordre 3.
2. Soit x réel non nul fixé, nous posons

$$R(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) dt$$

À l'aide du changement de variable

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto u = \psi(t) = \frac{t}{x}$$

montrer que

$$R(x) = \frac{x^4}{3!} \int_0^1 (1-u)^3 \sin(ux) du$$

3. Montrer que la limite quand x tend vers 0 de $x \int_0^1 (1-u)^3 \sin(ux) du$ est nulle.