Calcul intégral, compléments

1 Primitives

Exercice 1
Soit la fonction f définie par $f(x) = (\sin^2(x) - 3\sin(x) + 8)\cos(x)$. Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de f telle que $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Solution 1
Un calcul montre que

$$f(x) = \cos(x)\sin^2(x) - 3\cos(x)\sin(x) + 8\cos(x).$$

Posons $u(x) = \sin^3(x)$, $v(x) = \sin^2(x)$ et $w(x) = \sin(x)$. Alors $u'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$, $v'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et $w'(x) = \cos(x)$. Autrement dit

$$f(x) = \frac{u'(x)}{3} - \frac{3v'(x)}{2} + 8w'(x)$$

Les primitives de f sont

$$F(x) = \frac{u(x)}{3} - \frac{3v(x)}{2} + 8w(x) + c = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{3\sin^2(x)}{2} + 8\sin(x) + c$$

où c désigne un réel. Il en résulte que la primitive F de f telle que $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ est

$$F(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{3\sin^2(x)}{2} + 8\sin(x) + \frac{59}{6}.$$

Exercice 2
1. Montrer que $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x+3)(x^2+2x+1) + 1$.
2. En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}$ sur $]-\infty, -1[$.

Solution 2
1. Nous avons

$$(x+3)(x^2+2x+1) + 1 = x^3 + 2x^2 + x + 3x^2 + 6x + 3 + 1 = x^3 + 5x^2 + 7x + 4.$$

2. D'après ce qui précède

$$\frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1} = \frac{(x+3)(x^2+2x+1)+1}{x^2+2x+1} = x + 3 + \frac{1}{x^2+2x+1} = x + 3 + \frac{1}{(x+1)^2};$$

une primitive de f est donc

$$\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x+2}.$$

Exercice 3
Calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2}$ 2. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$ 3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+t-3}\,dt$

Solution 3

1. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\arctan(0)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

2. Puisque $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est paire on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

   Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} &= 2\Big[\operatorname{argth}(t)\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right)-2\operatorname{argth}(0) \\
&= 2\times\frac{1}{2}\times\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \ln(3)
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+t-3}\,dt &= \int_2^3 \frac{(t^2+t-3)'}{t^2+t-3}\,dt \\
&= \Big[\ln|t^2+t-3|\Big]_2^3 \\
&= \ln(9)-\ln(3) \\
&= \ln\left(\frac{9}{3}\right) \\
&= \ln(3)
\end{aligned}$$

Exercice 4

Déterminer une primitive de

1. $x \mapsto \tan(x)$.
2. $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$.
3. $x \mapsto \frac{\exp(-x)}{\operatorname{sh}^3(x)}$.

Solution 4

1. L'application tangente est 2π périodique et elle est continue sur chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Calculons les primitives sur chacun des intervalles.
   L'application $\phi\colon x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \cos(x) \in]0,1]$ est dérivable. Considérons $f\colon u \in]0,1] \mapsto -\frac{1}{u}$. On a
$$\begin{aligned}
\int \tan(t)\,dt &= \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt \\
&= \int -\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\,dt \\
&= \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \\
&= \Big[\int f(u)\,du\Big]_{u=\phi(t)} \\
&= \Big[\int f(u)\,du\Big]_{u=\cos(t)} \\
&= \Big[-\ln(|u|)\Big]_{u=\cos(t)} \\
&= -\ln(|\cos(t)|) \\
&= -\ln(\cos(t))
\end{aligned}$$
   En considérant l'application $\phi\colon x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\mapsto \cos(x) \in]0,1]$ on montre de façon analogue qu'une primitive de la fonction tangente sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ est $x \mapsto -\ln(-\cos(x))$.
2. L'application $\phi\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) \in [-1,1]$ est dérivable et $\phi'\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Posons $f\colon u \in [-1,1] \mapsto u^2$. On a
$$\int g(t)\,dt = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \Big[\int f(u)\,du\Big]_{u=\phi(t)} = \Big[\frac{u^3}{3}\Big]_{u=\phi(t)} = \frac{\sin^3(t)}{3}$$
3. La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en 0. Il s'en suit que la fonction $x \mapsto \frac{\exp(-x)}{\mathrm{sh}^3(x)}$ admet des primitives sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   Considérons $\phi\colon x \in]-\infty, 0[\mapsto \exp(2x) \in]0,1[$. Elle est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $\phi'\colon x \in]-\infty,0[\mapsto 2\exp(2x) \in]0,1[$. On a
$$\begin{aligned}
\int \frac{\exp(-t)}{\mathrm{sh}^3(t)}\,dt &= \int \frac{8\exp(-t)}{(\exp(t)-\exp(-t))^3}\,dt \\
&= \int \frac{8\exp(2t)}{(\exp(2t)-1)^3}\,dt \\
&= \int \frac{4\phi'(t)}{(\phi(t)-1)^3}\,dt \\
&= \Big[\int \frac{4}{(u-1)^3}\Big]_{u=\phi(t)} \\
&= \Big[-\frac{2}{(u-1)^2}\Big]_{u=\exp(2t)} \\
&= -\frac{2}{(\exp(2t)-1)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin(t)}$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1+\sin(t)}dt$

Solution 5

1. Posons $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin(t)}$. Posons $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, alors

$$t = \arctan\left(\frac{u}{2}\right), \qquad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$$
$$\tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad dt = \frac{2du}{1+u^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2+2u}\, du \\ &= \int_0^2 \frac{2}{(1+u)^2}\, du = \left[-\frac{2}{1+u}\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Posons $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1+\sin(t)} dt$. Remarquons que

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin(t)} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1+\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin(t)}{1+\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} dt = \Big[t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

2 Intégrations par parties

Exercice 6

Déterminer une primitive de :

1. $x \mapsto x^2 \ln(x)$
2. $x \mapsto x\arctan(x)$
3. $x \mapsto \ln(x)$ puis $x \mapsto \ln(x))^2$
4. $x \mapsto \cos(x)\exp(x)$

Solution 6

1. Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^3}{3}$; alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^2$. On a

$$\begin{aligned} \int t^2 \ln(t)\, dt &= \int u(t)v'(t)\, dt \\ &= [u(t)v(t)] - \int u'(t)v(t)\, dt \\ &= \left[\ln(t)\frac{t^3}{3}\right] - \int \frac{1}{t}\frac{t^3}{3}\, dt \\ &= \left[\ln(t)\frac{t^3}{3}\right] - \int \frac{t^2}{3}\, dt \\ &= \left[\ln(t)\frac{t^3}{3}\right] - \left[\frac{t^3}{9}\right] \\ &= \ln(t)\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{9} + c \end{aligned}$$

2. Posons $u(t) = \arctan(t)$ et $v'(t) = t$; alors $u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int t\arctan(t)\,dt &= \int u(t)v'(t)\,dt \\
&= [u(t)v(t)] - \int u'(t)v(t)\,dt \\
&= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+t^2}\frac{t^2}{2}\,dt \\
&= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+t^2}\,dt \\
&= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt \\
&= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt \\
&= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \left[\arctan(t)\frac{t^2}{2}\right] - \left[\frac{t}{2}\right] + \left[\frac{\arctan(t)}{2}\right] \\
&= \frac{t^2\arctan(t)}{2} - \frac{t}{2} + \frac{\arctan(t)}{2} + c \\
&= \frac{1+t^2}{2}\arctan(t) - \frac{t}{2} + c
\end{aligned}$$

3. Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = t$. Alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int \ln(t)\,dx &= \int u(t)v'(t)\,dt \\
&= [t\ln(t)] - \int \frac{1}{t}t\,dt \\
&= [t\ln(t)] - \int dt \\
&= [t\ln(t) - t]
\end{aligned}$$

Donc une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est $x\ln(x) - x$.
Posons $a(x) = (\ln(x))^2$ et $b(x) = x$. Alors $a'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ et $b'(x) = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int (\ln(x))^2\,dx &= \int a(x)b'(x)\,dx \\
&= [a(x)b(x)] - \int a'(x)b(x)\,dx \\
&= [x(\ln(x))^2] - \int \frac{2\ln(x)}{x}x\,dx \\
&= [x(\ln(x))^2] - 2\int \ln(x)\,dx \\
&= x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + c
\end{aligned}$$

4. Posons $I = \int \cos(x)\exp(x)\,dx$. Posons $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = \sin(x)$; alors $u'(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
I &= \int u(x)v'(x)\,dx \\
&= [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\,dx \\
&= [\exp(x)\sin(x)] - \int \exp(x)\sin(x)\,dx \\
&= [\exp(x)\sin(x)] - J
\end{aligned}$$

où $J = \int \exp(x)\sin(x)\,dx$. Posons $a(x) = \exp(x)$ et $b(x) = -\cos(x)$. Alors $a'(x) = \exp(x)$ et $b'(x) = \sin(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned} J &= \int a(x)b'(x)\,dx \\ &= [a(x)b(x)] - \int a'(x)b(x)\,dx \\ &= -[\exp(x)\cos(x)] + \int \exp(x)\cos(x)\,dx \\ &= -[\exp(x)\cos(x)] + I \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$I = [\exp(x)\sin(x)] - (-[\exp(x)\cos(x)] + I)$$

soit

$$2I = [\exp(x)\sin(x)] + [\exp(x)\cos(x)].$$

Enfin

$$I = \frac{\exp(x)(\sin(x)+\cos(x))}{2} + c.$$

Exercice 7

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\varphi\colon x \mapsto x\exp(-2x)$.
2. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction logarithme.
3. Déterminer une primitive F de $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

Solution 7

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(x) = u'(x)v(x)$ où $u\colon x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{\exp(-2x)}{2}$ et $v\colon x \in \mathbb{R} \mapsto x$. On a

$$\int x\exp(-2x)\,dx = -\frac{x\exp(-2x)}{2} + \int \frac{\exp(-2x)}{2}\,dx = -\frac{x\exp(-2x)}{2} - \frac{\exp(-2x)}{4} = -\frac{(1+2x)\exp(-2x)}{4}.$$

2. Écrivons $\ln(x) = u'(x)v(x)$ où $u\colon x \in]0,+\infty[\mapsto x$ et $v\colon x \in]0,+\infty[\mapsto \ln x$. D'une part $u'(x)v(x) = \ln(x)$, d'autre part $u(x)v'(x) = 1$. Par suite

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln x - x.$$

Il en résulte qu'une primitive de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto x\ln x - x$.

3. On écrit f sous la forme $u'v$ où $u\colon x \in]-1,1[\mapsto x$ et $v\colon x \in]-1,1[\mapsto \sqrt{1-x^2}$. Puisque $v'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ on a

$$F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Or

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1-1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin(x) - F(x)$$

donc

$$F(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - F(x).$$

On en déduit que

$$F(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2}$$

Autrement dit une primitive de $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ est

$$F(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2}.$$

Exercice 8

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Calculons $\int_a^b \arctan(t)\, dt$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Calculons $I = \int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt$.

Solution 8

1. Considérons les applications $u\colon t \in [a,b] \mapsto \arctan(t)$ et $v\colon t \in [a,b] \mapsto t$. Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad\qquad v'(t) = 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_a^b \arctan(t)\, dt &= \Big[t\arctan(t)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{t^2}{1+t^2}\, dt\\ &= \Big[t\arctan(t)\Big]_a^b - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\, dt\Big]_a^b\\ &= b\arctan(b) - a\arctan(a) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{1+b^2}\right)\end{aligned}$$

2. Considérons les applications $u\colon t \in [a,b] \mapsto \cos(t)$ et $v\colon t \mapsto \exp(t)$. Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [a,b]$

$$u'(t) = -\sin(t) \qquad\qquad v'(t) = \exp(t).$$

La formule d'intégration par parties conduit à

$$\int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt = \Big[\cos(t)\exp(t)\Big]_a^b + \int_a^b \sin(t)\exp(t)\, dt$$

Considérons les applications $\widetilde{u}\colon t \in [a,b] \mapsto \sin(t)$ et $\widetilde{v}\colon t \mapsto \exp(t)$. La formule d'intégration par parties conduit à

$$\int_a^b \sin(t)\, dt = \Big[\sin(t)\exp(t)\Big]_a^b - \int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt$$

Par suite

$$\int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt = \Big[\cos(t)\exp(t)\Big]_a^b + \Big[\sin(t)\exp(t)\Big]_a^b - \int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt$$

et

$$2\int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt = \Big[\cos(t)\exp(t)\Big]_a^b + \Big[\sin(t)\exp(t)\Big]_a^b = \cos(b)\exp(b) - \cos(a)\exp(a) + \sin(b)\exp(b) - \sin(a)\exp(a)$$

soit

$$\int_a^b \cos(t)\exp(t)\, dt = \frac{(\cos(b)+\sin(b))\exp(b)}{2} - \frac{(\cos(a)+\sin(a))\exp(a)}{2}$$

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$.

1. Calculons I_0 et I_1.
2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Solution 9

1. D'une part

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = \Big[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

D'autre part

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx = \Big[-\frac{2x(1-x)^{3/2}}{3}\Big] + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\, dx = \frac{2}{3}\Big[-\frac{2(1-x)^{5/2}}{5}\Big]_0^1 = \frac{4}{15}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties on obtient

$$I_n = \Big[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^n\Big]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,dx$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,dx &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)(1-x)^{1/2}\,dx\\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{1/2}\,dx - \int_0^1 x^n(1-x)^{1/2}\,dx\\ &= I_{n-1} - I_n.\end{aligned}$$

donc $I_n = \frac{2n(I_{n-1}-I_n)}{3}$ d'où $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Exercice 10

Considérons la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que $nI_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 10

1. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2$ d'où $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ et $\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

soit

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ on obtient que la suite $(I_n)_n$ tend vers 0.

2. Posons $u(x) = \ln(1+x^n)$ et $v(x) = x$ alors $u'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ et $v'(x) = 1$. Nous avons

$$nI_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$$

soit

$$nI_n = \Big[x\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

Exercice 11

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$
4. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,dt$

Solution 11

1. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = -\cos(t)$. Alors $u'(t) = 1$, $v'(t) = \sin t$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\,dt &= \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\,dt\\ &= [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\,dt\\ &= [-t\cos(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos(t)\,dt\\ &= 0 - 0 + [\sin(t)]_0^{\pi/2}\\ &= 1\end{aligned}$$

2. Posons $u = \exp(t)$. Alors $t = \ln(u)$ et $du = \exp(t)dt$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\,dt &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\
&= [2\sqrt{u+1}]_1^e \\
&= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. Posons $t = \tan(u)$. Alors $u = \arctan(t)$ et $dt = (1+\tan^2(u))du = \frac{du}{\cos^2(u)}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^2}(1+\tan^2(u))\,du \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\,du \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos^2(u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos(2u)+1)\,du \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(2u)}{2} + u\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

4. Posons $u = \frac{1}{t}$; alors $t = \frac{1}{u}$ et $dt = -\frac{du}{u^2}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,dt \\
&= \int_2^{1/2} (1+u^2)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right) \\
&= \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\,du
\end{aligned}$$

Comme $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$ nous avons

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)\right)\,du \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\,du - \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan(u)\,du \\
&= \frac{\pi}{2}\Big[-\frac{1}{u} + u\Big]_{1/2}^2 - I \\
&= \frac{3\pi}{2} - I
\end{aligned}$$

Par suite $I = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 12

Déterminer une primitive de :

1. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^n}$, $n \neq 1$.
2. $x \mapsto (x^2+x+1)\exp(x)$.

Solution 12

1. Posons $u'(t) = t^{-n}$ et $v(t) = \ln(t)$. Alors $u(t) = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(t)}{t^n}\,dt &= \int u'(t)v(t)\,dt \\
&= \Big[u(t)v(t)\Big] - \int u(t)v'(t)\,dt \\
&= \Big[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\ln(t)\Big] + \int \frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\frac{1}{t}\,dt \\
&= \Big[-\frac{\ln(t)}{(n-1)t^{n-1}}\Big] + \int \frac{1}{n-1}\frac{1}{t^n}\,dt \\
&= -\frac{\ln(t)}{(n-1)t^{n-1}} + C + \frac{1}{n-1}\Big[\frac{1}{-n+1}\frac{1}{t^{n-1}}\Big] \\
&= -\frac{\ln(t)}{(n-1)t^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} + K
\end{aligned}$$

2. Posons $u(t) = t^2 + t + 1$ et $v'(t) = \exp(t)$. Alors $u'(t) = 2t + 1$ et $v(t) = \exp(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int (t^2+t+1)\exp(t)\,dt &= \int u(t)v'(t)\,dt \\
&= \Big[u(t)v(t)\Big] - \int u'(t)v(t)\,dt \\
&= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - \int (2t+1)\exp(t)\,dt \\
&= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - 2\int t\exp(t)\,dt - \int \exp(t)\,dt \\
&= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - 2\int t\exp(t)\,dt - \Big[\exp(t)\Big]
\end{aligned}$$

Posons $a(t) = t$ et $b'(t) = \exp(t)$. Alors $a'(t) = 1$ et $b(t) = \exp(t)$ et

$$\begin{aligned}
\int (t^2+t+1)\exp(t)\,dt &= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - 2\int a(t)b'(t)\,dt - \Big[\exp(t)\Big] \\
&= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - 2\Big[a(t)b(t)\Big] + 2\int a'(t)b(t)\,dt - \Big[\exp(t)\Big] \\
&= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - 2\Big[t\exp(t)\Big] + 2\int \exp(t)\,dt - \Big[\exp(t)\Big] \\
&= \Big[(t^2+t+1)\exp(t)\Big] - 2\Big[t\exp(t)\Big] + 2\Big[\exp(t)\Big] - \Big[\exp(t)\Big] \\
&= (t^2+t+1)\exp(t) - 2t\exp(t) + \exp(t) + C \\
&= (t^2-t+2)\exp(t) + C
\end{aligned}$$

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que pour tout $n \geqslant 2$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\,dt$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 2$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$I_{2k} = \pi \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} \qquad\qquad I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Solution 13

1. Nous avons

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\, dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

2. Posons $u(t) = \cos^{n-1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$. Alors $u'(t) = -(n-1)\sin(t)\cos^{n-2}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$. Nous avons

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\, dt \\ &= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\, dt \\ &= \Big[\cos^{n-1}(t)\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\, dt \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\, dt \end{aligned}$$

Or $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ donc

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\cos^{n-2}(t)\, dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Finalement

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3. Par récurrence sur k en séparant les cas I_{2k} et I_{2k+1}.

3 Changements de variables

Exercice 14

Déterminer une primitive de :

1. $x \mapsto (\cos(x))^{1234}\sin(x)$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{3+\exp(-x)}$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

Solution 14

1. Posons $u = \cos(t)$. Alors $t = \arccos(u)$ et $du = -\sin(t)\, dt$. Nous avons donc

$$\int (\cos(t))^{1234}\sin(t)\, dt = -\int u^{1234}\, du = -\Big[\frac{u^{1235}}{1235}\Big] = -\Big[\frac{\cos^{1235}(t)}{1235}\Big]$$

Donc une primitive de $(\cos(x))^{1234}\sin(x)$ est $-\Big[\frac{\cos^{1235}(x)}{1235}\Big]$.

2. Posons $u = \ln(t)$. Alors $t = \exp(u)$ et $du = \frac{dt}{t}$. Nous avons

$$\int \frac{dt}{t\ln(t)} = \int \frac{du}{u} = [\ln|u|] = [\ln|\ln(t)|].$$

Ainsi une primitive de $\frac{1}{x\ln(x)}$ est $\ln|\ln(x)|$.

3. Posons $u = \exp(t)$. Alors $t = \ln(u)$ et $du = \exp(t)dt$, soit $dt = \frac{du}{u}$. Ainsi

$$\int \frac{dt}{3+\exp(-t)} = \int \frac{du}{u}\frac{1}{3+\frac{1}{u}} = \int \frac{du}{3u+1} = \left[\frac{\ln|3u+1|}{3}\right] = \left[\frac{\ln|3\exp(x)+1|}{3}\right]$$

Par suite une primitive de $\frac{1}{3+\exp(-x)}$ est $\frac{\ln|3\exp(x)+1|}{3}$.

4. On a

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4\left(1-\left(\frac{t}{2}-1\right)^2\right)}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{\left(1-\left(\frac{t}{2}-1\right)^2\right)}}$$

Posons $u = \frac{t}{2} - 1$ alors $dt = 2du$. Ainsi

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t-t^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{\left(1-\left(\frac{t}{2}-1\right)^2\right)}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin(u)] = \left[\arcsin\left(\frac{t}{2}-1\right)\right]$$

Il en résulte qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ est $\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

Exercice 15

Calculer l'intégrale suivante $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin(t)}$.

Solution 15

Posons $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin(t)}$. Posons $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, alors

$$t = \arctan\left(\frac{u}{2}\right), \qquad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad dt = \frac{2du}{1+u^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2+2u}\,du \\ &= \int_0^2 \frac{2}{(1+u)^2}\,du = \left[-\frac{2}{1+u}\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 16

Déterminer une primitive de

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{ch}(x)}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{(\operatorname{ch}(x)+1)^2}$

Solution 16

1. On a

$$\int \frac{dt}{1+\operatorname{ch}(t)} = \int \frac{dt}{1+\frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}}$$

Posons $u = \exp(t)$, alors $t = \ln(u)$ et $dt = \frac{du}{u}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{1+\operatorname{ch}(t)} &= \int \frac{du}{u\left(1+\frac{u+\frac{1}{u}}{2}\right)} \\
&= \int \frac{du}{(x+\frac{u^2+1}{2})} \\
&= \int \frac{du}{(\frac{u^2+2u+1}{2})} \\
&= 2\int \frac{du}{u^2+2u+1} \\
&= 2\int \frac{du}{(u+1)^2} \\
&= \left[-\frac{2}{u+1}\right] \\
&= \left[-\frac{2}{\exp(t)+1}\right]
\end{aligned}$$

2. On a

$$\frac{1}{(\operatorname{ch}(x)+1)^2} = \frac{1}{(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}+1)^2}$$

Posons $u = \exp(x)$, alors $x = \ln(u)$ et $dx = \frac{du}{u}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(\operatorname{ch}(x)+1)^2} &= \int \frac{du}{u\left(\frac{u+\frac{1}{u}}{2}+1\right)^2} \\
&= \int \frac{du}{u\left(\frac{u+\frac{1}{u}}{2}+1\right)^2} \\
&= \int \frac{du}{u\left(\frac{u^2+1}{2u}+1\right)^2} \\
&= \int \frac{du}{u\left(\frac{u^2+2u+1}{2u}\right)^2} \\
&= \int \frac{du}{u\left(\frac{(u+1)^2}{2u}\right)^2} \\
&= 4\int \frac{udu}{(u+1)^4} \\
&= 4\int \frac{(u+1)-1}{(u+1)^4}\,du \\
&= 4\int \frac{du}{(u+1)^3} - 4\int \frac{du}{(u+1)^4} \\
&= 4\left[-\frac{1}{2(u+1)^2)}\right] - 4\left[-\frac{1}{3(u+1)^3)}\right] \\
&= \left[-\frac{2}{(u+1)^2)} + \frac{4}{3(u+1)^3)}\right] \\
&= \left[-\frac{2}{(\exp(t)+1)^2)} + \frac{4}{3(\exp(t)+1)^3)}\right] \\
&= \left[\frac{-6(\exp(t)+1)+4}{3(\exp(t)+1)^3)}\right] \\
&= \left[-2\frac{3\exp(t)+1}{3(\exp(t)+1)^3)}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 17

1. Déterminer une primitive de $g\colon x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une primitive de $g\colon x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 17

1. Considérons $\phi\colon x \mapsto 1+x^2$ et $f\colon u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$. L'application ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $J = [1, +\infty[$. L'application f est continue sur J. De plus $g = (f \circ \phi)\phi'$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt &= \int (f \circ \phi(t))\phi'(t)\,dt \\
&= \Big[\int f(u)\,dt\Big]_{u=\phi(t)} \\
&= \Big[\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du\Big]_{u=1+t^2} \\
&= \Big[\sqrt{u}\Big]_{u=1+t^2} \\
&= \sqrt{1+t^2}
\end{aligned}$$

2. Considérons $\phi\colon x \mapsto \exp(x)$ et $f\colon u \mapsto \frac{2}{u^2+1}$. L'application ϕ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $J = \mathbb{R}_*^+$. L'application f est continue sur J. Alors $g = (f \circ \phi)\phi'$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)} &= \int \frac{2}{\exp(t)+\exp(-t)} dt \\
&= \int \frac{2\exp(t)}{\exp(2t)+1} dt \\
&= \int \frac{2}{(\exp(t))^2+1)} \exp(t)dt \\
&= \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \\
&= \Big[\int f(u)\,du\Big]_{u=\exp(t)} \\
&= \Big[2\arctan(u)\Big]_{u=\exp(t)} \\
&= 2\arctan(\exp(t))
\end{aligned}$$

Exercice 18

Déterminer une primitive de

1. $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$.
2. $x \mapsto \frac{\exp(-x)}{\operatorname{sh}^3(x)}$.

Solution 18

1. L'application $\phi\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) \in [-1,1]$ est dérivable et $\phi'\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Posons $f\colon u \in [-1,1] \mapsto u^2$. On a

$$\int g(t)\,dt = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \Big[\int f(u)\,du\Big]_{u=\phi(t)} = \Big[\frac{u^3}{3}\Big]_{u=\phi(t)} = \frac{\sin^3(t)}{3}$$

2. La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en 0. Il s'en suit que la fonction $x \mapsto \frac{\exp(-x)}{\operatorname{sh}^3(x)}$ admet des primitives sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   Considérons $\phi\colon x \in]-\infty, 0[\mapsto \exp(2x) \in]0,1[$. Elle est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $\phi'\colon x \in]-\infty, 0[\mapsto$

$2\exp(2x) \in]0,1[$. On a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\exp(-t)}{\operatorname{sh}^3(t)}\,dt &= \int \frac{8\exp(-t)}{(\exp(t)-\exp(-t))^3}\,dt \\
&= \int \frac{8\exp(2t)}{(\exp(2t)-1)^3}\,dt \\
&= \int \frac{4\phi'(t)}{(\phi(t)-1)^3}\,dt \\
&= \Big[\int \frac{4}{(u-1)^3}\Big]_{u=\phi(t)} \\
&= \Big[-\frac{2}{(u-1)^2}\Big]_{u=\exp(2t)} \\
&= \Big[-\frac{2}{(\exp(2t)-1)^2}\Big]
\end{aligned}$$

Exercice 19

1. Déterminer une primitive de $f\colon t \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}$ (on pourra considérer le changement de variable $\phi\colon x \mapsto \ln(x)$).
2. Déterminer une primitive de $f\colon t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ (on pourra considérer le changement de variable $\phi\colon x \mapsto \sin(x)$).

Solution 19

1. L'application ϕ est continue sur $]0,1[$, bijective de $]0,1[$ dans $]-\infty,0[$. Elle est dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$; notons que celle-ci ne s'annule pas sur $]0,1[$. La bijection réciproque $\phi^{-1}\colon x \in]-\infty,0[\mapsto \exp(x) \in]0,1[$ est continue sur $]-\infty,0[$. L'application ϕ est donc un difféomorphisme et
$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)}\,dt = \Big[\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx\Big]_{x=\phi^{-1}(t)} = \Big[\int \frac{1}{\operatorname{sh}(\ln(x))}\frac{1}{x}\,dx\Big]_{x=\exp(t)}$$
Pour tout $x \in]0,1[$ on a
$$\operatorname{sh}(\ln(x)) = \frac{\exp(\ln(x)) - \exp(-\ln(x))}{2} = \frac{x - x^{-1}}{2} = \frac{x^2-1}{2x}.$$
On en déduit que sur $]-\infty,0[$
$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)}\,dt = -2\Big[\int \frac{dx}{1-x^2}\Big]_{x=\exp(t)} = -2\Big[\operatorname{argth}(x)\Big]_{x=\exp(t)} = -2\operatorname{argth}(\exp(t)).$$
De même en considérant $\phi\colon x \in]1,+\infty[\mapsto \ln(x) \in]0,+\infty[$ on obtient les primitives de f sur $]0,+\infty[$:
$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)} = -2\Big[\int \frac{dx}{1-x^2}\Big]_{x=\exp(t)} = -2\Big[\int \frac{-dx}{2(x-1)} + \int \frac{dx}{2(x+1)}\Big]_{x=\exp(t)} = \Big[\int \frac{dx}{(x-1)} - \int \frac{dx}{(x+1)}\Big]_{x=\exp(t)}$$
soit
$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)}\,dt = \Big[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Big]_{x=\exp(t)} = \ln\left(\frac{\exp(t)-1}{\exp(t)+1}\right).$$
2. La fonction f est définie et continue sur $[-1,1]$. L'application ϕ est un difféomorphisme de $\Big]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big[$ dans $]-1,1[$ dont la bijection réciproque est
$$\phi^{-1}\colon t \in [-1,1] \mapsto \arcsin(t) \in \Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]$$
On a
$$\int f(t)\,dt = \Big[\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx\Big]_{x=\phi^{-1}(t)} = \Big[\int \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\,dx\Big]_{x=\arcsin(t)}$$
D'une part $\sqrt{1-\sin^2(x)} = |\cos(x)|$, d'autre part la fonction cosinus est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Par suite
$$\int f(t)\,dt = \Big[\int \cos^2(x)\,dx\Big]_{x=\arcsin(t)} = \Big[\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right)\,dx\Big]_{x=\arcsin(t)} = \Big[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\,dx\Big]_{x=\arcsin(t)}$$

Il en résulte que

$$\int f(t)\,dt = \frac{\arcsin(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}.$$

Exercice 20

1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,dt$.
2. Calculer $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

Solution 20

1. Pour tout t dans $\mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{2}{\exp(t)+\exp(-t)} = \frac{2\exp(t)}{\exp(2t)+1} = \frac{2\exp(t)}{(\exp(t))^2+1}$$

Par suite

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = \int_0^1 \frac{2}{(\exp(t))^2+1}\exp(t)dt.$$

Considérons $\phi\colon t\in[0,1]\mapsto \exp(t)$ et $f\colon u\mapsto \frac{2}{u^2+1}$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et la fonction f est continue sur $\phi([0,1])=[1,\mathrm{e}]$. On a

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = \int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(0)}^{\phi(1)} f(u)\,du = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{du}{1+u^2} = 2[\arctan(u)]_1^{\mathrm{e}} = 2\arctan(e) - \frac{\pi}{2}.$$

2. Introduisons les applications $f\colon t\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]\mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ et $\phi\colon y\in[1,2]\mapsto \exp(y)\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et f est continue sur $\phi([1,2])=[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ car la fonction $t\mapsto t\ln(t)$ est continue sur $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle.
La formule de changement de variable donne

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = \int_{\phi(1)}^{\phi(2)} f(t)\,dt = \int_1^2 f(\phi(u))\phi'(u)\,du = \int_1^2 \frac{1}{\exp(u)\ln(\exp(u))}\exp(u)\,du = \int_1^2 \frac{du}{u} = \Big[\ln(u)\Big]_1^2 = \ln(2)$$

Exercice 21

Soit ϕ la fonction définie par $\phi(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t\,dt$.

1. Montrer que ϕ est dérivable et déterminer ϕ' sans expliciter.
2. Montrer qu'une primitive de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$ est $x\mapsto x\ln(x)-x$. En déduire l'expression de ϕ puis retrouver l'expression de ϕ' obtenue à la question précédente.

Solution 21

1. L'application $v\colon x\in\mathbb{R}\mapsto x^2+1$ est une application polynomiale. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Son image est $J=[1,+\infty[$. L'application $f\colon t\in[1,+\infty[\mapsto \ln(t)$ étant continue l'application ϕ est dérivable sur J de dérivée en $x\in J$

$$\phi'(x) = v'(x)\phi(v(x)) = 2x\ln(x^2+1).$$

2. Soit $\psi\colon x\in\mathbb{R}^*\mapsto x\ln x - x$. L'application ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction logarithme est dérivable sur cet ensemble. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\psi'(x) = 1+\ln x - 1 = \ln x$. Par suite ψ est une primitive de la fonction logarithme. Ainsi

$$\phi(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t\,dt = \Big[t\ln(t) - t\Big]_1^{1+x^2} = (x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2.$$

Dérivons

$$\begin{aligned}\Big((x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2\Big)' &= 2x\ln(x^2+1) + (x^2+1)\frac{2x}{x^2+1} - 2x\\ &= 2x\ln(x^2+1).\end{aligned}$$

Exercice 22

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$
3. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,dt$

Solution 22

1. Posons $u=\exp(t)$. Alors $t=\ln(u)$ et $du=\exp(t)dt$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\,dt &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}}\\ &= [2\sqrt{u+1}]_1^e\\ &= 2\sqrt{e+1}-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

2. Posons $x=\tan(u)$. Alors $u=\arctan(x)$ et $dx=(1+\tan^2(u))du=\frac{du}{\cos^2(u)}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^2}(1+\tan^2(u))\,du\\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\,du\\ &= \int_0^{\pi/4} \cos^2(u)\,du\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos(2u)+1)\,du\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u)}{2}+u\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

3. Posons $u=\frac{1}{t}$; alors $t=\frac{1}{u}$ et $dt=-\frac{du}{u^2}$. Nous avons

$$\begin{aligned}I &= \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t)\,dt\\ &= \int_2^{1/2} (1+u^2)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right)\\ &= \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\,du\end{aligned}$$

Comme $\arctan(u)+\arctan\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2}$ nous avons

$$\begin{aligned}I &= \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(u)\right)\,du\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\,du - \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan(u)\,du\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{1/2}^2 - I\\ &= \frac{3\pi}{2}-I\end{aligned}$$

Par suite $I=\frac{3\pi}{4}$.

4 Formule de Taylor avec reste intégral

Exercice 23

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\ln 2}{2}$$

Solution 23

Si $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$, alors

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f à l'ordre 2 entre 0 et 1 assure que

$$f(1) = f(0) + f'(0) \times 1 + \int_0^1 \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}(1-t)\,dt$$

Puisque $f(1) = \ln 2$ et $f(0) = f'(0) = 0$ nous obtenons

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}(1-t)\,dt$$

soit

$$\ln 2 = 2\int_0^1 \frac{(1-t)(1+t)}{(1+t^2)^2}(1-t)\,dt$$

ou encore

$$\ln 2 = 2\int_0^1 \frac{(1-t)^2(1+t)}{(1+t^2)^2}\,dt$$

et finalement

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 24

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à $f : x \mapsto (1+x)^{-1/3}$ montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ nous avons les inégalités

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leqslant 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Solution 24

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(1+x)^{-4/3} \qquad f''(x) = \frac{4}{9}(1+x)^{-7/3}$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{28}{27}(1+x)^{-10/3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{280}{81}(1+x)^{-13/3}$$

D'une part la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction f à l'ordre 3 entre 0 et $x \in [0, +\infty[$ assure que

$$f(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} + \int_0^x (x-t)^2 \frac{f^{(3)}(t)}{2}\,dt$$

Or pour tout $x \geqslant 0$ et tout $t \in [0, x]$ on a

$$(x-t)^2 \frac{f^{(3)}(t)}{2} = -\frac{14(x-t)^2}{27}(1+x)^{-10/3} \leqslant 0$$

On en déduit pour tout $x \geqslant 0$ l'inégalité

$$f(x) \leqslant 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

D'autre part la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction f à l'ordre 4 entre 0 et $x \in [0, +\infty[$ assure que

$$f(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \int_0^x (x-t)^3 \frac{f^{(4)}(t)}{6}\, dt$$

Or pour tout $x \geqslant 0$ et tout $t \in [0, x]$ on a

$$(x-t)^3 \frac{f^{(4)}(t)}{6} = (x-t)^3 \frac{140}{243}(1+x)^{-13/3} \geqslant 0$$

On en déduit pour tout $x \geqslant 0$ l'inégalité

$$f(x) \geqslant 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$

Ainsi pour tout $x \geqslant 0$

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leqslant f(x) \leqslant 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$