Rappels, analyse de la variable réelle

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition, discuter de la parité de la fonction f dans les exemples suivants.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,

(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,

(c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(e) $f(x) = x - |x|$,

(f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,

(g) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$,

(h) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,

(i) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$,

(j) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 2. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim\limits_{0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim\limits_{0^-} f(x) = 2^+$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{4^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{4^+} f(x) = +\infty$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$.

Exercice 3. Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

(a) $\operatorname{ch}(\alpha+\beta) = \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta)$,

(b) $\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta)$,

(c) $\operatorname{th}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{th}(\alpha)+\operatorname{th}(\beta)}{1+\operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(\beta)}$,

(d) $\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$,

(e) $\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$,

(f) $\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\alpha-\beta)$,

(g) $\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$,

(h) $\operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})$,

(i) $\operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$,

(j) $\operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 4x + 3$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}$,

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3}$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + x + \ln x$,

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 e^x \ln^2 x$,

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4-1}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,

(m) $\lim_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,

(n) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^2}+x}{\sin x}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$,

(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(s) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

(t) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(u) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$,

(v) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{x-1}$,

Exercice 5. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\sin x}{x^2+1}$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)$,

(c) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-x}{x+2}}$,

(d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{\ln x-1}$,

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(xe^x)}{x}$,

(f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$,

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$,

(h) $\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$,

(i) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$,

(j) $\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(x^2e^x\right)$,

(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{x-1}$,

(m) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$,

(n) $\lim_{x\to 0^+} (\ln x)e^{-\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$,

(r) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{5x-1}\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x-1}$,

(s) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3}}$,

(t) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}$,

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer en utilisant la définition que $|f|$ est continue.

(b) La réciproque est-elle vraie, *i.e.* si $|f|$ est continue, alors f est-elle continue ?

(c) Montrer en utilisant la définition que $\sup(f,g)$ est continue.

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 8. Étudier les fonctions $f(x) = x^2 - x^{3/2}$ et $g(x) = 3^x - 2^x$ et dessiner leur graphe.

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty, 1[, \\ x^2 & \text{si } x \in [1,4], \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \in]4, +\infty[. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est strictement croissante.
(b) Tracer le graphe de la fonction f.
(c) f est-elle continue ?
(d) Montrer que f est bijective.
(e) Caractériser la bijection réciproque f^{-1} de f via une formule.

Exercice 10. (a) Existe-t-il une application $f\colon\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[\,?$$

(b) Existe-t-il une application $f\colon [0, 1] \to [0, +\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 11. Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante ; puis montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 12. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

(a) $3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$,	(b) $\frac{e^x}{1+x}$,	(c) $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$,
(d) $\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$,	(e) $\frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$,	(f) x^x,
(g) $e^{\alpha \tan(x)}$,	(h) $\sin(\sin(\sin x))$,	(i) $\cos(\sin(\tan(\pi x)))$,
(j) $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$,	(k) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,	(l) x^{x^x}.

Exercice 13. 1. Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la valeur de la fonction.

(a) $\cos(\arccos(x))$,	(b) $\sin(\arcsin(x))$,	(c) $\tan(\arctan(x))$,
(d) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$,	(e) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$,	(f) $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(x))$,
(g) $\arccos(\cos(x))$,	(h) $\arcsin(\sin(x))$,	(i) $\arctan(\tan(x))$,
(j) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$,	(k) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$,	(l) $\mathrm{argth}(\mathrm{th}(x))$.

2. Calculer les dérivées des fonctions $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\mathrm{argch}(x)$, $\mathrm{argsh}(x)$, $\mathrm{argth}(x)$.

3. Calculer, pour tout $x \neq 0$ la valeur de la fonction $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 14. Fonctions circulaires réciproques.

(a) Rappeler la définition des fonctions réciproques arctan, arcsin et arccos. En utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable, calculer les fonctions dérivées de arctan, arcsin et arccos.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x.$$

(c) Calculer

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Exercice 15. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est identiquement nulle. Décrire f.

Exercice 16. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes.

(a) $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{x^2+1}$,

(b) $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$,

(c) $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

(d) $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$,

(e) $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 17. Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 18. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

(a) Etudier la continuité de f.

(b) Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.

(c) Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.

(d) Montrer que

$$\forall x > 1, \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{3\pi}{4} + \arctan x.$$

Exercice 19. Déterminer les extrema locaux et globaux sur l'intervalle I pour la fonction f dans les cas suivants :

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ et $I = [2,4]$,

(b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ et $I = [-1,1]$,

(c) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ et $I = [-2,2]$,

(d) $f(x) = (x^2+2x)^3$ et $I = [-2,1]$,

(e) $f(x) = x + \sin(2x)$ et $I = [0,\pi]$,

(f) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $I = [1,3]$.

Exercice 20. Calculer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{1} \frac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1}$,

(b) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\operatorname{sh}(4x)}{\operatorname{th}(5x)}$,

(d) $\displaystyle\lim_{0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x^3}$,

(f) $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{0} \frac{5^x - 3^x}{x}$,

(h) $\displaystyle\lim_{0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,

(i) $\displaystyle\lim_{1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$,

(j) $\displaystyle\lim_{1} \frac{\cos(x)\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$,

(k) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$,

(l) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$,

(m) $\displaystyle\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$,

(n) $\displaystyle\lim_{1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,

(o) $\displaystyle\lim_{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$.

Exercice 21. Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(b) Montrer que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.

(c) Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.

(d) Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 22. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + e^x$.

(a) Montrer que f est bijective.

(b) On note g la bijection réciproque de f. Donner le tableau de variations de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?

(d) Déterminer $g'(1)$.

Exercice 23. Considérons la fonction $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Rappeler soigneusement la définition exacte de la formule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]\gamma, +\infty[\quad f(x) \leqslant 1.$$

(c) Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g\colon\ [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

où y_0 est un réel que l'on précisera.

(d) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, \gamma]$ tel que : $\forall x \in [0, \gamma] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.

(e) Montrer que $f(1) < 0$ et que $f(2) > 0$. (Indication : on rappelle que $e > 2$).

(f) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, déduire de la question précédente que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]1, 2[$.